计算方法作业 #2

陈文轩
KFRC

更新：March 5, 2025

1 题目

注意：须给出解题过程或步骤，不可直接写答案；必要时，可使用计算器帮助。

1. (6pts) 利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

2. (6pts) 利用数据 $f(0) = 2.0, f(1) = 1.5, f(3) = 0.25, f'(3) = 1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。
3. (6pts) 设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1,2,4]$ 和 $f[1,2,3,4]$；
4. (6pts) 设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^{6}$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^{6}$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum\limits_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum\limits_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。
5. (6pts) 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n (n > 2)$ 为互异的节点，$l_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为与其对应的 n 次 Lagrange 插值基函数，证明 $\sum\limits_{k=0}^{n}(x_k - x)^n l_k(x) = 0$。

截止日期：2025.3.16 23:59

提交方式：通过 bb 系统提交

2 解答

1. 先计算各阶差商：$f[x_0] = 2.5, f[x_1] = 4, f[x_2] = 3.5, f[x_3] = 2$;

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = 1.5, f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = -0.5, f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} = -1$;

$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -1, f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = -0.2$;

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_3-x_0}=\dfrac{8}{35}.$

因此，插值多项式 $P_3(x)=2.5+1.5(x-1)-(x-1)(x-2)+\dfrac{8}{35}(x-1)(x-2)(x-3),$

完全展开可以得到 $P_3(x)=\dfrac{8}{35}x^3-\dfrac{83}{35}x^2+\dfrac{491}{70}x-\dfrac{83}{35}.$

误差项 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4.5),\xi\in[1,4.5].$

$P_3(1.5)=\dfrac{251}{70},P_3(4)=\dfrac{83}{35}.$

2. 设插值多项式 $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0$，对应 $P_3'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$;

   则有 $P_3(0)=a_0=2,P_3(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=1.5,P_3'(3)=27a_3+6a_2+a_1=1$

   $P_3(3)=27a_3+9a_2+3a_1+a_0=0.25\Rightarrow a_3=\dfrac{41}{144},a_2=-\dfrac{85}{72},a_1=\dfrac{19}{48},a_0=2$

   所以插值函数为 $P_3(x)=\dfrac{41}{144}x_3-\dfrac{85}{72}x^2+\dfrac{19}{48}x+2$，

   余项为 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)(x-3)^2,\xi\in[0,3];P_3(2)=\dfrac{25}{72}$

3. $f[1]=2043,f[2]=2182,f[3]=2561,f[4]=3300;$

   $f[1,2]=139,f[2,3]=379,f[3,4]=739,f[2,4]=559;$

   $f[1,2,3]=120,f[2,3,4]=180,f[1,2,4]=140;$

   $f[1,2,3,4]=20.$

4. 记 $f(x)=x^3+x^2+1$，则 $l_i(x)$ 可以看作对 $f(x)$ 插值时的基函数。由于节点数量为 7，

   $\deg f(x)=3$，所以 $\sum\limits_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i(x)=f(x)=x^3+x^2+1,$

   $\sum\limits_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i'(x)=f'(x)=3x^2+2x.$

5. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^nl_k(x)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\binom{n}{m}x_k^{n-m}(-x)^m\right)l_k(x)\\&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-x)^m\sum_{k=0}^{n}x_k^{n-m}l_k(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-x)^mx^{n-m}\\&=(x-x)^n\equiv 0\end{aligned}$$