计算方法作业 #3

陈文轩

KFRC

更新：March 17, 2025

1 题目

1. (6pts) 构造积分 $\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式 $I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0f(0)+a_1f(2h)$，$h>0$；
2. (6pts) 分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$
3. (10pts) 记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中 $I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
   (a). 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
   (b). 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差
4. (8pts) 求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0(n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

2 解答

1. 积分对 $p_0(x)=1,p_1(x)=x,p_2(x)=x^2$ 无误差，对应方程组 $\begin{cases} a_{-1}+a_0+a_1=3h \\ -2a_{-1}+4a_1=3h \\ a_{-1}+4a_1=3h \end{cases}$

$$\Rightarrow a_{-1}=0,a_0=2.25h,a_1=0.75h,I(f)=\frac{9}{4}hf(0)+\frac{3}{4}hf(2h).$$

2. 准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$；

$f(0)=0, f(1)\approx 0.30956, f(2)\approx 0.12306$；

Simpson 公式:$I_1 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\approx 0.4538$，误差约为 0.0128；

梯形公式：$I_2 = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\approx 0.12306$，误差约为 0.3436。

3. 取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1, p_2(x)=x^2, p_4(x)=x^4$ 无误差，

对应方程组 $\begin{cases} 2A+B=4 \\ A\alpha^2=\frac{8}{3} \\ A\alpha^4=\frac{32}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} A=C=\frac{10}{9} \\ B=\frac{16}{9} \\ \alpha=\frac{2}{5}\sqrt{15} \end{cases}$，代数精度为 5 次。

误差为 $E(f)=\frac{E(x^6)}{6!}f^{(6)}(\xi)=\left(\int_{-2}^2 x^6\,\mathrm{d}x - S(x^6)\right)\frac{f^{(6)}(\xi)}{216}=\frac{64}{7875}f^{(6)}(\xi), \xi\in[-2,2]$

4. $S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=0,1,2$ 满足 $S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$

记 $M_i=S''(x_i)$，则 $\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$

$M_i=0, i=0,3$，其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。现在有 12 个方程与 12 个未知数，解方程组得到：

$$S(x)=\begin{cases} -4+6.25(x+2)^2-0.25(x+2)^3, & x\in[-2,-1] \\ 2+1.75(x+1)-0.75(x+1)^2+0.09375(x+1)^3, & x\in[-1,1] \\ 2.5-0.9375(x-1)-0.1875(x-1)^2+0.0625(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

故 $S(0)=3.5625=\frac{57}{16}$