计算方法作业 #4

陈文轩
KFRC

更新：April 2, 2025

1 题目

1. (6pts) 给定函数 $f(x)$ 离散值如下：

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	2.5	1.0	2.0	3.5

   分别用向前、向后以及中心差商公式计算 $f'(0.02)$ 和 $f'(0.04)$；
2. (8pts) 用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 及其积分误差；
3. (8pts) 试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；
4. (10pts) 设函数 $f(x)$ 充分光滑（可微），试推导如下数值微分公式（即确定常数 A, B, C, D, E），使其截断误差为 $O(h^4)$, $f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

Deadline:2025.3.30

2 解答

1. 向前差分：$f'(0.02) = \dfrac{f(0.04)-f(0.02))}{0.02} = 50, f'(0.04) = \dfrac{f(0.06)-f(0.04)}{0.02} = 75;$

   向后差分：$f'(0.02) = \dfrac{f(0.02)-f(0.00)}{0.02} = -75, f'(0.04) = \dfrac{f(0.04)-f(0.02)}{0.02} = 50;$

   中心差分：$f'(0.02) = \dfrac{f(0.04)-f(0.00)}{0.04} = -12.5, f'(0.04) = \dfrac{f(0.06)-f(0.02)}{0.04} = 62.5$。

2. 准确值：0.4666。先换元 $\int_{-1}^{1} e^{-t-1}\sin(t+1)\,\mathrm{d}t$，记 $g(t) = e^{-t-1}\sin(t+1)$，

$$I(g) = \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx 0.4665,$$

3. 先换元为 $\int_{-1}^{1} t^2 f(t+1)\,\mathrm{d}t$，此时 $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$，由于对称性，权重相等，代入 $f(t)=1$ 时无误差，得到 $W_1 = W_2 = \frac{1}{3}$，故 $I(f) = \frac{1}{3} f\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{1}{3} f\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$。

4. 作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \frac{2}{3}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \frac{2}{3}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$

$$\begin{aligned}
&Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h) \\
=&(A+B+C+D+E)f(x) + (-2A-B+D+2E)hf'(x) \\
&+ (2A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + 2E)h^2 f''(x) + (-\frac{4}{3}A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}D + \frac{4}{3}E)h^3 f'''(x) \\
&+ (\frac{2}{3}A - \frac{1}{24}B + \frac{1}{24}D + \frac{2}{3}E)h^4 f''''(x) \\
:=&hf'(x) + O(h^5)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=0 \\ -2A-B+D+2E=1 \\ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E=0 \\ -\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E=0 \\ \frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \\ E=\frac{1}{12} \end{cases}$$

因此数值微分公式为 $f'(x) = \dfrac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + O(h^4)$。