计算方法作业 #5

陈文轩
KFRC

更新：March 29, 2025

1 题目

1.1 符号说明

对常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$，两边在区间 $[x_{n-p}, x_[n+1]]$ 上积分得 $y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \displaystyle\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。我们用数值积分来近似 $\displaystyle\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，从而构造线性多步格式。

格式中有两个控制量 p 和 q，其中 p 控制积分区间，q 控制插值节点，若用积分节点 $\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}\}$ 近似计算 $\displaystyle\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，得到显式公式 $y_{n+1} = y_{n-p} + \displaystyle\sum_{j=0}^{q} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$；若用积分节点 $\{x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}\}$ 近似计算 $\displaystyle\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，得到隐式公式 $y_{n+1} = y_{n-p} + \displaystyle\sum_{j=-1}^{q-1} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$

更一般地，一个 $k+1$ 步的线性多步格式具有如下形式：

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} + \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

1.2 作业

1. (12pts) 设有常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -y(x), 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$，假设求解区间 $[0,1]$ 被 n 等分，令 $h = \dfrac{1}{n}, x_k = \dfrac{k}{n}(k = 0, 1, \cdots, n)$

   (a). 分别写出用向前 Euler 公式，向后 Euler 公式，梯形公式以及改进的 Euler 公式求上述微分方程数值解时的差分格式（即y_{k+1} 与 y_k二者之间的递推关系式）；

   (b). 设$y_0 = y(0)$，分别求这四种公式（方法）下的近似值y_n的表达式（注：这里的y_n即是$y(x_n) \equiv y(1)$ 的近似值；

(c). 当n足够大（即区间长度$h \to 0$时，分别判断四种方法下的近似值y_n是否收敛到原问题的真解$y(x)$在$x=1$处的值。

2. (8pts) 试推导 $p=1, q=2$ 显式公式$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2}))$的局部截断误差，即验证$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$（提示：将差分格式右端点某些项在某点处同时作 Taylor 展开）；

3. (18pts) 试用线性多步法构造$p=1, q=2$时的隐式差分格式，求该格式局部截断误差的误差主项并判断它的阶，最后为该隐式格式设计一种合适的预估-校正格式。

4. (12pts) 试推导如下 Runge-Kutta 公式的局部截断误差及其误差主项，判断该公式/格式的（精度）阶数。提示：利用二元函数的 Taylor 展开。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \end{cases}$$

Deadline:2025.4.6

2 解答

1. 显然解析解是 $y = e^{-x}$，对应 $y(1) = e^{-1}$。以下 $n = \frac{1}{k}$。

- 向前 Euler 公式：$y_{k+1} = y_k + h(-y_k) = (1-h)y_k, y_n = (1-h)^n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-1} = y(1)$；
- 向后 Euler 公式：$y_{k+1} = y_k - hy_{k+1} = \dfrac{y_k}{1+h}, y_n = \left(\dfrac{1}{1+h}\right)^n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-1} = y(1)$；
- 梯形公式：$y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}(-y_k - y_{k+1}) = \dfrac{2-h}{2+h} y_k, y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-1} = y(1)$；
- 改进的 Euler 公式：预测：$y^* = y_k + h(-y_k) = (1-h)y_k$，

$$\text{校正：} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(-y_k - y^*) = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) y_k$$

$$y_n = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^n, \text{ 此时 } \lim_{n\to\infty} y_n = e^{-1} = y(1)\text{。}$$

2. $y(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + 2hy'(x_{n-1}) + 2h^2 y''(x_{n-1}) + \frac{4}{3}h^3 y'''(x_{n-1}) + \frac{2}{3}h^4 y''''(x_{n-1}) + O(h^5)$;

$$f(x_n, y_n) = y'(x_n) = y'(x_{n-1}) + hy''(x_{n-1}) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_{n-1}) + \frac{1}{6}h^3 y''''(x_{n-1}) + O(h^4)$$

$$f(x_n, y_{n-2}) = y'(x_{n-2}) = y'(x_{n-1}) - hy''(x_{n-1}) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_{n-1}) - \frac{1}{6}h^3 y''''(x_{n-1}) + O(h^4)$$

$$
\begin{aligned}
&y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_{n+1})-\frac{h}{3}\left(7f(x_n,y_n)-2f(x_{n-1},y_{n-1})+f(x_{n-2})\right)\\
=&y(x_{n-1})+2hy'(x_{n-1})+2h^2y''(x_{n-1})+\frac{4}{3}h^3y'''(x_{n-1})+\frac{2}{3}h^4y''''(x_{n-1})+O(h^5)-\frac{h}{3}\\
&\left(7\left(y'(x_{n-1})+hy''(x_{n-1})+\frac{1}{2}h^2y'''(x_{n-1})+\frac{1}{6}h^3y''''(x_{n-1})+O(h^4)\right)-2y'(x_{n-1})\right.\\
&\left.+\left(y'(x_{n-1})-hy''(x_{n-1})+\frac{1}{2}h^2y'''(x_{n-1})-\frac{1}{6}h^3y''''(x_{n-1})+O(h^4)\right)\right)\\
=&\frac{1}{3}h^4y^{(4)}(x_{n-1})+O(h^5)
\end{aligned}
$$

故 $T_{n+1}=\dfrac{1}{3}h^4y^{(4)}(x_{n-1})+O(h^5)$。

3. 差分格式为 $y_{n+1}=y_{n-1}+\beta_{-1}f(x_{n+1},y_{n+1})+\beta_0f(x_n,y_n)+\beta_1f(x_{n-1},y_{n-1})$；

记 $x=x_{n-1}+\xi,\xi\in[0,2h]$，则对应节点为 $\xi=0,h,2h$，Lagrange 基函数为：

$l_0(\xi)=\dfrac{(\xi-h)(\xi-2h)}{2h^2},l_1(\xi)=-\dfrac{\xi(\xi-2h)}{h^2},l_2(\xi)=\dfrac{\xi(\xi-h)}{2h^2}$。对应权重如下：

$\beta_1=\displaystyle\int_0^{2h}l_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{h}{3},\beta_0=\int_0^{2h}l_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{4h}{3},\beta_1=\int_0^{2h}l_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{h}{3},$

故差分格式为 $y_{n+1}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}\left(f(x_{n+1},y_{n+1})+4f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})\right)$。

以下记 $x_{n-1}=r,x_n=s,x_{n+1}=t$，则 $s=r+h,t=r+2h$，Taylor 展开为：

$$y(t)=y(r)+2hy'(r)+2h^2y''(r)+\frac{4}{3}h^3y'''(r)+\frac{4}{2}h^4y^{(4)}(r)+\frac{4}{15}h^5y^{(5)}(r)+O(h^6)$$

$$y'(t)=y'(r)+2hy''(r)+2h^2y'''(r)+\frac{4}{3}h^3y^{(4)}(r)+\frac{4}{2}h^4y^{(5)}(r)+O(h^5)$$

$$y'(s)=y'(r)+hy''(r)+\frac{1}{2}h^2y'''(r)+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(r)+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(r)+O(h^5)$$

$$
\begin{aligned}
&\tau_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(t)-y(r)-\frac{h}{3}(y'(r)+4y'(s)+y'(t))\\
=&y(r)+2hy'(r)+2h^2y''(r)+\frac{4}{3}h^3y'''(r)+\frac{4}{2}h^4y^{(4)}(r)+\frac{4}{15}y^{(5)}(r)+O(h^6)-y(r)\\
&-\frac{h}{3}\left(y'(r)+4\left(y'(r)+hy''(r)+\frac{1}{2}h^2y'''(r)+\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(r)+\frac{1}{24}h^4y^{(5)}(r)+O(h^5)\right)\right.\\
&\left.+\left(y'(r)+2hy''(r)+2h^2y'''(r)+\frac{4}{3}h^3y^{(4)}(r)+\frac{4}{2}h^4y^{(5)}(r)+O(h^5)\right)\right)\\
=&-\frac{1}{90}h^5y^{(5)}(r)+O(h^6)
\end{aligned}
$$

因此方法的误差主项为 $-\dfrac{1}{90}h^5y^{(5)}(r)$，阶数为 4。

一种预估-校正方法如下：使用显式公式作为预估：

$y_{n+1}^{(p)}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}\left(7f(x_n,y_n)-2f(x_{n-1},y_{n-1})+f(x_{n-2},y_{n-2}\right)$，

用预估值替代隐式公式中的未知量：

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}\Big(f(x_{n+1},y_{n+1}^{(p)})+4f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})\Big)。$$

4. 记 $x=x_n, y=y_n, f=f(x,y), f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$，高阶偏导均在 (x,y) 取值。

$$\begin{aligned}
&k_2=f(x+2h,y+2hk_1)=f(x+2h,y+2hf)\\
=&f+2hf_x+2hff_y+\frac{1}{2}(f_{xx}(2h)^2+2f_{xy}(2h)(2hf)+f_{yy}(2hf)^2)+O(h^3)\\
=&f+2hf_x+2hff_y+2h^2f_{xx}+4h^2f_{xy}f+2h^2f_{yy}f+O(h^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y_{n+1}=y(x)+\frac{h}{4}(3f+f(x+2h,y+2hk_1))\\
=&y(x)+\frac{h}{4}(3f+2hf_x+2hff_y+2h^2f_{xx}+4h^2f_{xy}f+2h^2f_{yy}f+O(h^3))\\
=&y(x)+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+f_yf)+\frac{h^3}{2}(f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2)+O(h^4)
\end{aligned}$$

$$y'(x)=f(x,y(x))\Rightarrow y''(x)=f_x+f_yy'=f_x+f_yf, y'''=f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_yf_x+f_y^2f；$$

$$\begin{aligned}
&y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{1}{2}h^2y''(x)+\frac{1}{6}h^3y'''(x)\\
=&y(x)+hf+\frac{h^2}{2}(f_x+ff_y)+\frac{h^3}{6}(f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_yf_x+f_y^2f)
\end{aligned}$$

此时 $\tau=y(x+h)-y_{n+1}=\dfrac{h^3}{6}(f_xf_y+f_y^2f-2f_{xx}-4f_{xy}f-2f_{yy}f^2)+O(h^4)$

故误差主项是 $\dfrac{h^3}{6}(f_xf_y+f_y^2f-2f_{xx}-4f_{xy}f-2f_{yy}f^2)$，阶数为 2。