计算方法作业 #6

陈文轩
KFRC

更新：May 28, 2025

1 题目

注意：须给出解题过程或步骤，不可直接写答案；必要时，可使用计算器帮助。

$e = 2.7182818285$

1. (6pts) 利用牛顿迭代公式估算 $\ln 2$ 的值 (可取 $f(x) = e^x - 2 = 0$)，取初值 $x_0 = 0.618$，迭代 5 次，列表计算 $x_i, i = 1, 2, \cdots, 5$。请估计 x_5 的有效数字位数 (计算 x_5 时，请保留尽量多的小数点位数)；
2. (6pts) 设 $n > 1$，给出用牛顿法计算 $\sqrt[n]{a}(a > 0)$ 时的迭代公式，并用它来计算 $\sqrt[5]{2025}$，取初值 $x_0 = 5.0$，求 x_4；
3. (10pts) 写出对方程 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ 求根时的 Newton 迭代公式 $x_n = \varphi(x_{n-1})$，取初值 $x_0 = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在；
4. (10pts) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑实值函数，$r \in \mathbb{R}$ 为 $f(x)$ 的一个 p 重根 ($p \geq 2$)，试推导迭代公式 $x_{k+1} = x_k - p\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 在根 r 附近的收敛阶。

Deadline:2025.4.13

2 解答

1. $f(x) = e^x - 2, f'(x) = e^x$，迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}}$。

   $x_0 = 0.618, x_1 = 0.69600, x_2 = 0.693151, x_3 = 0.69314718056, x_4 = 0.6931471805599453,$

   $x_5 = 0.693147180559945309417232121458 18$。实际上，$x_5$ 的误差在 10^{-45} 量级。

2. $f(x) = x^n - a, f'(x) = nx^{n-1}$，迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x^n - a}{nx_n^{n-1}}$

   $x_0 = 5, x_1 = 4.648, x_2 = 4.5858, x_3 = 4.58464, x_4 = 4.58443$。

3. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$，迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2}{3x_n - 5}$。

$$\varphi(x) = \frac{2x^2-2x-2}{3x-5}, \forall x \in [0,1), \frac{f(x)}{f'(x)} < 0, 2x^2-2x-2-(3x-5) > 0 \Rightarrow \varphi(x) < 1$$

因此从 $x_0 = 0$ 开始的迭代序列是单调递增的，且有上界 1，因此收敛。

4. 设 $f(x) = (x-r)^p g(x), g(r \neq 0), f'(x) = p(x-r)^{r-1}g(x) + (x-r)^p g'(x)$，令 $e_k = x_k - r$，

   则 r 附近 $f(x_k) = e_k^p g(x_k), f'(x_k) = e_k^{p-1}(pg(x_k) + e_k g'(x_k))$，带入迭代公式，

   $x_{k+1} = x_k - \dfrac{e_k^p g(x_k)}{e_k^{p-1}(pg(x_k)+e_k g'(x_k))} = x_k - \dfrac{e_k g(x_k)}{pg(x_k)+e_k g'(x_k)}$，两边同时减去 r，

   $$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - \frac{e_k g(x_k)}{pg(x_k)+e_k g'(x_k)} = e_k\left(1 - \frac{pg(x_k)}{pg(x_k)+e_k g'(x_k)}\right) = e_k \cdot \frac{e_k g'(x_k)}{pg(x_k)+e_k g'(x_k)} \\ &= e_k^2 \cdot \frac{g'(x_k)}{pg(x_k)+e_k g'(x_k)} \xlongequal{C:=\frac{g'(r)}{pg(r)}} Ce_k^2 \end{aligned}$$

   因此迭代公式是二次收敛的。