# 计算方法作业 #8

陈文轩
KFRC

更新：April 20, 2025

## 1 题目

1. (10pts) 设有线性方程组 $Ax = b$，其中，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   (a). 写出 Jacobi 迭代的迭代格式（分量形式）；
   (b). 求 Jacobi 迭代的迭代矩阵；
   (c). 讨论此时 Jacobi 迭代法的收敛性（请给出理由或证明）。

2. (10pts) 设有线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 50 \end{cases}$$

   (a). 分别写出 Gauss-Seidel 迭代和 SOR 迭代的分量形式；
   (b). 求 Gauss-Seidel 迭代的分裂矩阵（splitting matrix）及迭代矩阵（iteration matrix）；
   (c). 讨论 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性（请给出理由或证明）。

3. (10pts) 设有线性方程组 $Ax = b$，其中，$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$。

   利用如下迭代公式解此方程

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

   (a). 写出此迭代法的迭代矩阵；
   (b). 求使该迭代法收敛时参数 $\alpha$ 的最大取值范围；
   (c). 当 $\alpha$ 取何值时，迭代收敛速度最快。

Deadline:2025.4.27

## 2 解答

1. 迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(2 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}(2 + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{2}(4 + x_3^{(k)}) \end{cases}$ $, G = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$。

   $G$ 的特征值为 $\dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{4}, \rho(G) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$，故迭代收敛。

2. Gauss-Seidel 迭代格式：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(10 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(20 + 3x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(50 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}) \end{cases}$ ,

   SOR 迭代格式：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \frac{\omega}{5}(10 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \frac{\omega}{5}(20 + 3x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \frac{\omega}{5}(50 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}) \end{cases}$ 。

   分裂矩阵 $Q = D + L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, G = -(D+L)^{-1}U = \dfrac{1}{125}\begin{bmatrix} 0 & 75 & -50 \\ 0 & 45 & -80 \\ 0 & -48 & 52 \end{bmatrix}$。

   注意到系数矩阵各阶主子式为 $\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \Delta_3 = 16$，是正定的，故迭代收敛。

3. 迭代公式可以写为 $x^{(k+1)} = (I - \alpha A)x^{(k)} + \alpha b$,故迭代矩阵为 $I - \alpha A = \begin{bmatrix} 1-3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$。

   特征值为 $1-\alpha, 1-4\alpha$，收敛条件为 $|1-\alpha| < 1, |1-4\alpha| < 1$，即 $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$。

   当 $\alpha = \dfrac{2}{5}$ 时，谱半径 $\rho(G) = \max\{|1-\alpha|, |1-4\alpha|\}$ 最小，收敛速度最快。