计算方法作业 #9

陈文轩
KFRC

更新：May 10, 2025

1　题目

1. (4pts) 设 n 阶实方阵 A 有相异的特征根 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$。对给定的实数 $\alpha \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，利用规范幂法或规范反幂法，设计一个能计算离 α 距离最近的矩阵 A 的特征根的迭代格式（注：不容许对矩阵求逆）。
2. (8pts) 考虑用 Jacobi 方法计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值。求对 A 作一次 Givens 相似变换时的 Givens（旋转）变换矩阵 Q（要求相应的计算效率最高）以及 Givens 变换后的矩阵 B（其中，$B = Q^\top AQ$）。
3. (8pts) 设 $p < q$，$Q(p, q, \theta)$ 为 n 阶Givens矩阵，θ 为角度。记
$$A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n} = Q^\top(p, q, \theta)AQ(p, q, \theta),$$
假设 $a_{pq} \neq 0$，证明：当 θ 满足 $\cot 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ 时，有
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2.$$
提示：只需证 $b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$。
4. (10pts) 设 $A = \dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & 7 & 24 \\ 0 & 50 & -25 \\ 24 & 24 & -7 \end{bmatrix}$，利用 Householder 矩阵，求 A 的正交分解，即 $A = QR$，其中 Q、R 分别为 Householder 正交阵和上三角阵。

Deadline:2025.5.5

2　解答

1. 初始化：选择初始向量 $y_0, x_0 = \dfrac{y_0}{\|y_0\|}$；

迭代格式：解方程组 $(A-\alpha I)y_{k+1}=x_k,\sigma_k=x_k^\top y_{k+1},\lambda_k=\alpha+\dfrac{1}{\sigma_k},x_{k+1}=\dfrac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$；

收敛判断：$\|x_{k+1}-x_k\|<\epsilon$ 时结束迭代。

2. 选取模长最大的非对角元 a_{13} 与 a_{31}，对应 $\varphi=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2a_{13}}{a_{11}-a_{33}}=\dfrac{1}{2}\arctan 1=\dfrac{\pi}{8}$，

对应旋转矩阵 $Q=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{bmatrix}$，

$$B=Q^\top AQ=\begin{bmatrix}5 & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & 4 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & 5\end{bmatrix}。$$

3. 以下记 $t=\tan\theta$，由 $\dfrac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}=\cot 2\theta=\dfrac{1}{\tan 2\theta}=\dfrac{1-t^2}{2t}$，有 $a_{qq}-a_{pp}=\dfrac{1-t^2}{t}a_{pq}$。

$$\begin{aligned}b_{pp}^2+b_{qq}^2&=(a_{pp}-ta_{pq})^2+(a_{qq}+ta_{pq})^2=a_{pp}^2+a_{qq}^2+2t^2a_{pq}^2-2ta_{pp}a_{pq}+2ta_{qq}a_{pq}\\&=a_{pp}^2+a_{qq}^2+2t^2a_{pq}^2+2ta_{pq}(a_{qq}-a_{pp})\\&=a_{pp}^2+a_{qq}^2+2t^2a_{pq}^2+2ta_{pq}\cdot\frac{1-t^2}{t}a_{pq}=a_{pp}^2+a_{qq}^2+2a_{pq}^2\end{aligned}$$

由于其他对角线元素不变，故 $\sum\limits_{i=1}^n b_{ii}^2=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}^2+2a_{pq}^2$。

4. 取 $x=\dfrac{1}{25}(7,0,24)^\top,\|x\|=1,v=x-\|x\|e_1=\dfrac{1}{25}(-18,0,24)^\top,\|v\|=\dfrac{6}{5}$，

$H_1=I-2\dfrac{vv^\top}{v^\top v}=\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 0 & 24\\ 0 & 25 & 0\\ 24 & 0 & -7\end{bmatrix},H_1A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 已经是上三角矩阵。

因此 QR 分解是 $Q=H_1=\dfrac{1}{25}\begin{bmatrix}7 & 0 & 24\\ 0 & 25 & 0\\ 24 & 0 & -7\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。