计算方法作业 #11

陈文轩
KFRC

更新：May 25, 2025

1 题目

1. (5pts) 试利用 Gram-Schmidt 正交化算法，求 $[0,1]$ 上的三次多项式关于内积

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

的一组正交基。

2. (5pts) 对下列数据用最小二乘法求形如 $\varphi(x) = \dfrac{x}{a+bx}$ 的拟合函数。

x_i	2.10	2.50	2.80	3.20
y_i	0.6087	0.6849	0.7368	0.8111

3. (5pts) 试确定常数 $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $\displaystyle\int_0^1 |e^x - c_0 - c_1 x|^2\,\mathrm{d}x$ 达到极小，并求出极小值。
4. (5pts) 求函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $[0,1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = \sqrt{x}$ 的三次最佳平方逼近多项式。

Deadline:2025.5.18

2 解答

1. 一组基为 $\{v_i\}_{i=1}^4 = \{1, x, x^2, x^3\}, e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}, u_2 = v_2 - \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \dfrac{3}{5},$

$\|u_2\|^2 = \dfrac{8}{175}, e_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}(5x-3), u_3 = v_3 - \dfrac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \dfrac{\langle x^2, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2 = x^2 - \dfrac{10}{9}x + \dfrac{5}{21},$

$\|u_3\|^2 = \dfrac{128}{43659}, e_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \dfrac{\sqrt{11}}{16}(63x^2 - 70x + 15),$

$u_4 = v_4 - \dfrac{\langle x^3, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \dfrac{\langle x^3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} \cdot v_2 - \dfrac{\langle x^3, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle} \cdot v_3 = x^3 - \dfrac{21}{13}x^2 + \dfrac{105}{143}x - \dfrac{35}{429},$

$\|u_4\|^2=\dfrac{512}{2760615}, e_4=\dfrac{u_4}{\|u_4\|}=\dfrac{\sqrt{30}}{32}(429x^3-693x^2+315x-35), \{e_i\}_{i=1}^4$ 即为所求。

数值结果如下：$e_1=1.22474, e_2=4.67707x-2.80624,$

$e_3=4.39726-20.5206x+18.4685x^2, e_4=-5.99072+53.9164x-118.616x^2+73.4291x^3$

可以在 Mathematica 利用以下代码验证：

```
ip[f_, g_] := Integrate[Sqrt[x]*f*g, {x, 0, 1}];
basis = {1, x, x^2, x^3};
orthonormalBasis = Orthogonalize[basis, ip];
Simplify /@ orthonormalBasis
```

2. 令 $u_i=\dfrac{1}{x_i}, v_i=\dfrac{1}{y_i}$，问题化为 $v_i=au_i+b$，此时数据如下：

u_i	0.4762	0.4000	0.3571	0.3125
v_i	1.6420	1.4603	1.3571	1.2333

拟合得到 $a\approx 2.4867, b\approx 0.4623$。

3. $\displaystyle\int_0^1 |e^x-c_0-c_1x|^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (e^x-c_0-c_1x)^2\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\left(c_0^2-2c_0e^x+e^{2x}+2c_0c_1x-2c_1xe^x+c_1^2x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=c_0^2+(2-2e)c_0+c_0c_1-\frac{1}{2}-2c_1+\frac{1}{3}c_1^2+\frac{e^2}{2}:=f(c_0,c_1)$$

$$\nabla f=\left(2c_0+2-2e+c_1, c_0+\frac{2}{3}c_1-2\right)^\top=0\Rightarrow c_0=4e-10, c_1=18-6e$$

此时 Hessian 矩阵为 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2/3\end{bmatrix}$ 正定，故是极小值点，

计算得到极小值为 $-\dfrac{7}{2}e^2+20e-\dfrac{57}{2}$

4. 沿用 1 中记号，$f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^4\langle e_i(x),\cos x\rangle e_i(x)=\sum_{i=1}^4\int_0^1\sqrt{x}e_i(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\cdot e_i(x)$

$$\approx 0.999046+0.0141787x-0.556365x^2+0.0830802x^3$$