计算方法作业 #12

陈文轩
KFRC

更新：May 27, 2025

1 题目

1. (5pts) 设 $f(x) = x^2$，求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的二次最佳平方逼近三角多项式。
2. (10pts) 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，且 $f''(x) > 0$。设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一次最佳一致逼近多项式为 $p_1^*(x) = c_0 + c_1 x$。
   (a). 证明：$\exists c \in [a,b], \text{s.t. } c_1 = f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, c_0 = \dfrac{f(a)+f(c)}{2} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \dfrac{a+c}{2}$；
   (b). 求 $f(x) = \cos x$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的一次最佳一致逼近多项式。
3. (5pts) 求多项式 $p(x) = 6x^3 + 3x^2 + x + 4$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式。
4. (5pts) 求函数 $f(x) = \cos \dfrac{\pi}{2} x$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ 的三次最佳平方逼近多项式。

Deadline:2025.5.25

2 解答

1. 即计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并截断到二次。由于 $f(x)$ 是偶函数，故正弦系数为 0。

   余弦系数 $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$，常数项 $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{3}$，

   故二次最佳平方逼近三角多项式为 $S(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$。

2. 设 $e(x) = f(x) - p_1^*(x)$，则 $e''(x) = f''(x) > 0$，故 $e(x)$ 是凸函数。记 $E = \min\limits_{c_0,c_1} \max\limits_{x\in[a,b]} |e(x)|$，

   由 Chebyshev，$e(a) = e(b) = -E, e(c) = E$，其中 $c \in (a,b)$ 唯一存在。

   此时有 $\begin{cases} e(a) = f(a) - c_0 - c_1 a = -E \\ e(b) = f(b) - c_0 - c_1 b = -E \end{cases}$，二者相减即得到 $c_1 = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

   又有 $e(c) = f(c) - c_0 - c_1 c = E$，代入 $e(a) = -E$ 即有 $c_0 = \dfrac{f(a)+f(c)}{2} - c_1 \dfrac{a+c}{2}$，

且由于 $e(x)$ 凸，故误差最大值点 c 满足 $e'(c) = f'(c) - c_1 = 0$，即 $c_1 = f'(c)$。

由于 $-\cos x$ 在 $[0, \frac{pi}{2}]$ 凸，对 $-\cos x$ 使用上述结论，得到其一次最佳一致逼近多项式为

$\tilde{p}_1^*(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}$，故 $\cos x$ 的一次最佳一致逼近多项式为

$p_1^*(x) = -\frac{2}{\pi}x + \frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi} \approx -0.6366x + 1.1053$

3. 重写 $f(x) = \frac{3}{2}T_3(x) + 3x^2 + \frac{11}{2}x + 4$，其中 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ 是 3 次 Chebyshev 多项式。

   $T_3(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上满足等振条件，故 $f(x)$ 的二次最佳一致逼近多项式是 $3x^2 + \frac{11}{2}x + 4$。

4. Chebyshev 多项式 $\{T_i(x)\}$ 在权函数 $\rho(x)$ 下正交，故所求 $p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\langle f(x), T_i(x)\rangle}{\langle T_i(x), T_i(x)\rangle} T_i(x)$。

   由于 $f(x)$ 和 $\rho(x)$ 均为偶函数，故 $T_1(x), T_3(x)$ 系数为 0。考虑 $T_0(x) = 1, T_2(x) = 2x^2 - 1$，

   系数为 $\alpha_0 = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x} = J_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2-1)\cos\frac{\pi}{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} \frac{(2x^2-1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x} = -2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$。

   故所求多项式为 $p(x) = -4J_2\left(\frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2J_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0.9988x^2 + 0.9714$。