计算方法作业 #13

陈文轩
KFRC

更新：June 15, 2025

1 题目

1. (6pts) 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是否有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. (6pts) 将下列线性规划问题化为标准形式，并列出初始单纯形表.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{aligned}$$

3. (6pts) 求下列线性规划问题中满足约束条件的所有基解，并指出哪些是基可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ & x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

4. (6pts) 用单纯形方法求解以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_3 \leq 13 \\ & x_2 + 3x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

5. (6pts) 用大 M 法求解下列线性规划问题：

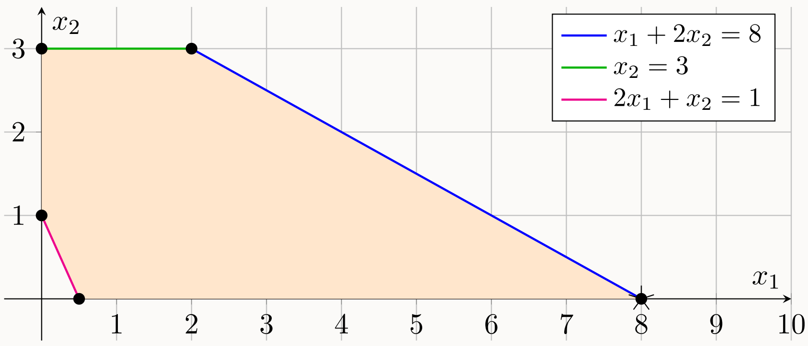
$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

6. (6pts) 分别用最速下降法与牛顿法求函数 $f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2, x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ 的极小点, 初始点 $x_0 = (0, 0, 0)^\top$，要求：
   (a). 最速下降法进行 2 次迭代, 并验证相邻两步的搜索方向正交；
   (b). 牛顿法进行 1 次迭代。

Deadline:2025.6.22

2 解答

1. 图像如下图所示：



直线对应约束条件，橙色区域为可行域。可行基解为 $(0.5, 0), (8, 0), (2, 3), (0, 3), (0, 1)$，对应值为 $1, 16, 13, 9, 3$，因此最优解为 $(8, 0)$，对应目标函数值为 16，存在唯一最优解。

2. 令 $x_4=x_5-x_6, x_5, x_6 \geq 0$，对后两个不等式约束添加松弛变量 x_7, x_8，则标准形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 + 2x_6 \\
\text{s.t.} \quad & -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 - x_6 = 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 14 \\
& -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 - x_8 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
\end{aligned}
$$

容易得到一组初始基可行解为 $(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0, 2, 0, 0, 0, 12, 4)$，

对应目标函数值为 -4，初始单纯形表如下：

$c_j \to$			1	-2	3	-2	2	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8
-2	x_2	2	-4	1	-2	1	-1	0	0
0	x_7	12	1	1	-1	2	-2	1	0
0	x_8	4	-2	3	1	-1	1	0	-1
σ_j			-7	0	-1	0	0	0	0

3. 有 2 个等式约束和 4 个变量，因此需要令除基变量的 2 个变量为 0，以下为结果：

基变量	解向量	是否可行	目标函数值
x_1, x_2	$(1, 2, 0, 0)$	是	0
x_1, x_3	$(\frac{45}{13}, 0, -\frac{14}{13}, 0)$	否	N/A
x_1, x_4	$(\frac{34}{5}, 0, 0, \frac{7}{5})$	是	$\frac{82}{5}$
x_2, x_3	$(0, \frac{45}{16}, \frac{7}{16}, 0)$	是	$-\frac{3}{2}$
x_2, x_4	$(0, \frac{68}{29}, 0, -\frac{7}{29})$	否	N/A
x_2, x_3	$(0, 0, -\frac{68}{31}, -\frac{45}{31})$	否	N/A

因此最优解是 $\left(\dfrac{34}{5}, 0, 0, \dfrac{7}{5}\right)$，对应目标函数值为 $\dfrac{82}{5}$。

4. 对约束条件添加松弛变量 x_4, x_5, x_6，则标准形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 13 \\
& x_2 + 3x_3 + x_5 = 17 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 13 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

一组初始基可行解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 13, 17, 13)$，初始单纯形表如下：

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	13	3	0	2	1	0	0
0	x_5	17	0	1	3	0	1	0
0	x_6	13	2	1	1	0	0	1
σ_j			3	-2	5	0	0	0

以下进行单纯形表迭代：

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	$\frac{5}{3}$	3	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	0
5	x_3	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	x_6	$\frac{22}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1
σ_j			3	$-\frac{11}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	0

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_1	$\frac{5}{9}$	1	$-\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	0
5	x_3	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	x_6	$\frac{56}{9}$	0	$\frac{10}{9}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	1
σ_j			0	-3	0	-1	-1	0

因此最优解为 $\left(\frac{5}{9}, 0, \frac{17}{3}, 0, 0, \frac{56}{9}\right)$，对应目标函数值为 30。

5. 对约束条件添加松弛变量 x_3, x_4，并添加人工变量 x_5, x_6，则标准形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -3x_1 + x_2 - Mx_5 - Mx_6 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\
& 2x_1 - 3x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

初始基可行解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 3, 1)$，初始单纯形表如下：

$c_j \to$			-3	1	0	0	$-M$	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-M$	x_5	3	3	1	-1	0	1	0
$-M$	x_6	1	2	-3	0	-1	0	1
σ_j			$5M-3$	$1-2M$	$-M$	$-M$	0	0

以下进行单纯形表迭代：

$c_j \to$			-3	1	0	0	$-M$	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-M$	x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{11}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
-3	x_1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
σ_j			0	$\frac{11M-7}{2}$	$-M$	$\frac{3M}{2}$	0	$\frac{3-5M}{2}$

$c_j \to$			-3	1	0	0	$-M$	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	$\frac{3}{11}$	0	1	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{3}{11}$
-3	x_1	$\frac{10}{11}$	1	0	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
σ_j			0	0	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}-M$	$\frac{6}{11}-M$

因此最优解为 $\left(\frac{10}{11}, \frac{3}{11}, 0, 0, 0, 0\right)$，对应目标函数值为 $-\frac{27}{11}$。

6. $\nabla f = (2x_1 - x_2 + x_3 - 2, -x_1 + 2x_2 + 4, x_1 + 2x_3 + 2)^\top, \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

对于最速下降法，初始点为 $x_0 = (0,0,0)^\top, d_0 = \nabla f(x_0) = (-2,4,2)^\top$，

$\alpha_0 = \arg\min\limits_{\alpha} f(x_0 + \alpha d_0) = \arg\min\limits_{\alpha}(28\alpha^2 - 24\alpha - 2) = \frac{3}{7}$，

$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \left(\frac{6}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}\right)^\top, d_1 = \nabla f(x_1) = \left(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)^\top, \langle d_0, d_1 \rangle = 0$，

$\alpha_1 = -\frac{\nabla f(x_1)^\top d_1}{d_1^\top \nabla^2 f(x_1) d_1} = \frac{21}{62}, x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \left(\frac{144}{217}, -\frac{351}{217}, -\frac{270}{217}\right)^\top$，

对于牛顿法，$x_1 = x_0 - \nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0) = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)^\top$，

由于 $\nabla^2 f \succ 0, \nabla f(x) = 0$ 时 $x^* = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)^\top$，有 x^* 为全局最优解，$f(x^*) = -\frac{15}{2}$。