科 技 大 学

一模

课程名称 计算方法　　课程编号 001511

考试时间 2025年　　考试形式 闭卷/120分钟

姓名 陈文轩　　学号 ______　　学院 ______

注意事项：

- **给出详细的解题过程或步骤；直接在试卷上答题,草稿纸上答题无效！**

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

答题时不要超过此线

得 分

一（本题12分） 给定区间$[-1,1]$上的函数 $f(x)=|x|$,

(1) 求 $f(x)$ 在权函数 $\rho(x)=x^2$ 下的二次**最佳平方**逼近多项式;

(2) 求 $f(x)$ 的一次**最佳一致**逼近多项式.

(1) $<1,1>=\frac{2}{3}$, $<1,x>=0$, $<1,x^2>=\frac{2}{5}$

$<x,x>=\frac{2}{5}$, $<x,x^2>=0$, $<x^2,x^2>=\frac{2}{7}$

$<1,|x|>=\frac{1}{2}$, $<x,|x|>=0$, $<|x|,x^2>=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 问题法方程为 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{2}{5} & 0\\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a_0=\frac{5}{16}$, $a_1=0$, $a_2=\frac{35}{48}$, $P_2^*(x)=\frac{35}{48}x^2+\frac{5}{16}$

(2) $P_1^*(x)=\frac{1}{2}$.

得 分

二（本题15分） 设 $A=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & 7 & 24\\ 0 & 50 & 25\\ 24 & 24 & -7\end{pmatrix}$.

(a) 求 A 的矩阵范数 $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$;

(b) 求 A 的Doolittle分解(提示：要求下三角矩阵为单位下三角);

(c) 利用 Householder 矩阵, 求A的正交分解, i.e., $A=QR$, 其中, Q,R 分别为正交阵和上三角阵。

(a) $\|A\|_1=\frac{81}{25}$, $\|A\|_\infty=3$

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{7} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7}{25} & \frac{7}{25} & \frac{24}{25}\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{25}{7}\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

得 分

三 (本题10分)

设有线性规划问题

$$\min_{x_1,x_2,x_3} Z = -2x_1 + x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 6, \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,3. \end{cases}$$

(a) 写出其标准形式;

(b) 给出初始单纯形表, 以及相应的初始基可行解.

(a) $\max Z = 2x_1 - x_2$

$s.t.$ $x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$.

(b) $x_0 = (0,0,0,4,6)$. Δ

$(0,0,3,7,0)$

$(0,1,0,0,5)$

$(0,\frac{14}{9},\frac{20}{9},0,0)$

$(4,0,0,0,2)$

$(\frac{14}{3},0,\frac{2}{3},0,0)$.

	$c_j \rightarrow$		-2	1	0	0	0		
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_4	4	1	4	-1	1	0		
0	x_5	6	1	2	2	0	1		
	σ_j		2	-1	0	0	0		

得分	评卷人

四 、(本题12分)

设有数值积分公式

$$\int_{-2}^{1} w(x)f(x)dx \approx S(f(x)) = Af(-2) + Bf(1) + Cf(2) + Df'(1)$$

其中, 权重函数 $w(x) \equiv x + 2$.

(a) 求常数 A, B, C, D 使其达到最高阶的代数精度；此时的代数精度是多少？

(b) 假设 $f(x)$ 充分可微, 试求此数值积分公式的积分误差。

(a) 对 $f(x)=1$ 无误差：$A+B+C = \int_{-2}^{1}(x+2)\,dx = \frac{9}{2}$

对 $f(x)=x$ 无误差：$-2A+B+2C+D = \int_{-2}^{1} x(x+2)dx = 0$

对 $f(x)=x^2$ 无误差：$4A+B+4C+2D = \int_{-2}^{1} x^2(x+2)dx = \frac{9}{4}$

对 $f(x)=x^3$ 无误差：$-8A+B+8C+3D = \int_{-2}^{1} x^3(x+2)\,dx = -\frac{9}{10}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=\frac{9}{2} \\ -2A+B+2C+D=0 \\ 4A+B+4C+2D=\frac{9}{4} \\ -8A+B+8C+3D=-\frac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{21}{40}, \quad B=\frac{39}{20} \\ C=\frac{81}{40}, \quad D=-\frac{99}{20} \end{cases}$$

对 $f(x)=x^4$, $S(x^4) = 16A+B+16C+4D = \frac{459}{20}$

$\int_{-2}^{1} x^4(x+2)\,dx = \frac{27}{10}$ 有误差, 故代数精度为3阶

(b) 积分误差为 $K \cdot f''''(\xi)$,

对 $f(x)=x^4$, $f''''(x)=24$, $E(x^4) = I(x^4) - S(x^4) = -\frac{81}{4}$

$\Rightarrow -\frac{81}{4} = 24k$, $k = -\frac{27}{32}$, 故误差为 $-\frac{27}{32} f^{(4)}(\xi)$

得 分

五（本题15分）

考虑一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x,y), & x\in[a,b] \\ y(a) = 2023. \end{cases}$

(a) 求二阶中点公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n+\frac{1}{2}h, y_n+\frac{1}{2}hf(x_n,y_n))$ 的绝对稳定区域（设步长 $h>0$）；

(b) 给定步长 $h>0$，求 α 使得线性多步法

$$y_{n+1}+\alpha(y_n-y_{n-1})-y_{n-2} = \frac{h}{2}(3+\alpha)\Big[f(x_n,y_n)+f(x_{n-1},y_{n-1})\Big]$$ 是4阶的.

(a) 对 $\begin{cases} u'(x) = \lambda u(x) \\ u(a) = \tilde{\alpha} \end{cases}$ $(Re\lambda<0)$ 使用中点公式

有 $u_{n+1} = u_n + h\lambda(u_n+\frac{1}{2}h\lambda u_n) = (1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2})u_n$

绝对稳定区域为 $|1+\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}|<1$.

(b) $y(x_{n+1}) = y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\frac{h^4}{24}y''''(x_n)+O(h^5)$

$y(x_{n-1}) = y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\frac{h^4}{24}y''''(x_n)+O(h^5)$

$y(x_{n-2}) = y(x_n)-2hy'(x_n)+2h^2y''(x_n)-\frac{4}{3}h^3y'''(x_n)+\frac{2}{3}y''''(x_n)+O(h^5)$

$f(x_{n-1},y_{n-1}) = y'(x_{n-1}) = y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)-\frac{h^3}{6}y''''(x_n)+O(h^5)$

$\Rightarrow h\cdot T_n = y(x_{n+1})+\alpha(y_n-y_{n-1})-y_{n-2}-\frac{h}{2}(3+\alpha)(y'(x_n)-y'(x_{n-1}))$

$= (-\frac{1}{12}\alpha+\frac{3}{4})h^3y'''(x_n)+(\frac{1}{24}\alpha-\frac{3}{8})h^4y''''(x_n)+O(h^5)$

4阶精度时 $\begin{cases} -\frac{1}{12}\alpha+\frac{3}{4}=0 \\ \frac{1}{24}\alpha-\frac{3}{8}=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=9.$

答题时不要超过此线

得 分

六（本题16分）

设有线性方程组 $Ax=b$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & c \\ 0 & c & 3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$.

(a) 分别写出相应的 Jacobi 迭代, Gauss-Seidel 迭代, 以及以$0<\omega<2$为松弛因子的松弛迭代(SOR)的迭代格式(分量形式);

(b) 求参数 c 的取值范围使得相应的 Gauss-Seidel 迭代收敛;

(c) 记 x^* 为原方程组的精确解, G 为对原方程组进行 Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵, $x^{(k)}$ 为由 Gauss-Seidel 迭代产生的迭代序列(不妨取初始解 $x^{(0)}=(1,2,3)^T$). 证明: 当 $\|G\|_2<1$ 时, 存在常数 $T>0$ 使得不等式 $\|x^*-x^{(k)}\|_2\le T\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_2$, 对 $\forall k\ge1$ 恒成立.

(a) Jacobi: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3+\frac{1}{2}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -3-\frac{1}{2}x_1^{(k)}+\frac{c}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2-\frac{c}{3}x_2^{(k)} \end{cases}$,

Gauss-Seidel: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3+\frac{1}{2}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -3-\frac{1}{2}x_1^{(k+1)}+\frac{c}{2}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2-\frac{c}{3}x_2^{(k+1)} \end{cases}$

SOR: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}-\frac{w}{2}(2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}-6) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}+\frac{w}{2}(-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k)}+cx_3^{(k)}-6) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)}-\frac{w}{3}(cx_2^{(k+1)}+3x_3^{(k)}-6) \end{cases}$

(b) $G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{c}{2} \\ 0 & \frac{c}{12} & -\frac{1}{6}c^2 \end{bmatrix}$, $\det(\lambda I-G)=\lambda^2(\lambda+\frac{1}{4}+\frac{c^2}{6})$

$\det(\lambda I-G)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=-\frac{c^2}{6}-\frac{1}{4}$. $\rho(G)=\frac{c^2}{6}+\frac{1}{4}<1$

$\Rightarrow c\in(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$.

(c) x^* 满足 $x^*=Gx^*+d$, 此时

$\|x^*-x^{(k)}\|_2 = \|G(x^*-x^{(k)})\|_2 \le \|G\|_2\cdot\|x^{(*)}-x^{(k)}\|_2$

$\le\|G\|_2(\|x^*-x^{(k)}\|_2+\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_2)$

$\Rightarrow \|x^*-x^{(k)}\|_2\le\frac{\|G\|_2}{1-\|G\|_2}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_2$, 取 $T=\frac{\|G\|_2}{1-\|G\|_2}$ 即可.

答题时不要超过此线

得 分

七（本题8分）

设 n 次实系数多项式 $p_n(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ 有互异的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n\ (n>2)$,

证明:

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{p_n'(x_j)} = \begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}$$

$P_n(x)=a_n\prod_{i=1}^n(x-x_i)$, $P_n'(x)=a_n\sum_{l=1}^n\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^n(x-x_i)$

$P_n'(x_j)=a_n\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n(x_j-x_i)$, $\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{P_n'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^n\frac{x_j^k}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n(x_j-x_i)}$

对 $g(x)=x^k$, $g(x)=g(x_1)+g[x_1,x_2](x-x_1)+\cdots+g[x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{P_n'(x_j)} = \frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^n \frac{g(x_1)+g[x_1,x_2](x-x_1)+\cdots+g[x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n(x_j-x_i)}$$

$$=\frac{1}{a_n}g[x_1,\cdots,x_n]$$

$$=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} \text{ for some } \xi\in\mathbb{R}.$$

$$=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2\\ \frac{1}{a_n}, & k=n-1.\end{cases}$$

得 分

八（本题12分）

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑实函数, r 为 $f(x)$ 的一个实根且满足 $f'(r)\neq 0$, $f''(r)\neq 0$. 考虑迭代公式 $x_{k+1}=g(x_k)$, 其中 $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}Q(x)$.

(a) 令 $Q(x)\equiv 1$, 求上述迭代公式在根 r 附近的收敛阶;

(b) 令 $Q(x)=\left[1-2\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)f'(x)}\right]^{-1}$, 求上述迭代公式在根 r 附近的收敛阶。

(a) $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_{k+1}=e_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$0=f(r)=f(x_k)+f'(x_k)(r-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(r-x_k)^2$

$\Rightarrow f(x_k)=f'(x_k)e_k-\frac{f''(\xi_k)}{2}e_k^2$

$\Rightarrow e_{k+1}=\frac{f'(x_k)e_k-f'(x_k)e_k+\frac{f''(\xi_k)}{2}e_k^2}{f'(x_k)}=\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}e_k^2$

$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{e_k^2}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\right|=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|>0 \Rightarrow$ 2阶收敛

(b) $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\cdot\frac{f'^2(x_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}$

$\Rightarrow e_{k+1}=e_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}=\frac{e_kf'^2(x_k)-2e_kf(x_k)f''(x_k)-f(x_k)f'(x_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}$

$=\frac{e_kf'^2(x_k)-2e_k\left(f'(x_k)e_k-\frac{f''(\xi)}{2}e_k^2\right)-\left(f'(x_k)e_k-\frac{f''(\xi)}{2}e_k^2\right)f'(x_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}$

$=\frac{e_k^2\left(\frac{1}{2}f'(x_k)f''(\xi_k)-2f'(x_k)f''(x_k)+O(e_k)\right)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{e_k^2}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2}f'(x_k)f''(\xi_k)-2f'(x_k)f''(x_k)+O(e_k)}{f'^2(x_k)-2f(x_k)f''(x_k)}\right|$

$=\left|\frac{-\frac{3}{2}f''(x_k)}{f'(x_k)}\right|>0 \Rightarrow$ 2阶收敛