2025 春计算方法–实验报告 #3

姓名：________ 学号：____________

2025 年 4 月 5 日

运行环境：________

实验内容与要求

分别编写 Newton 迭代法 (通常也称 Newton-Raphson 迭代法)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

和霍氏迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)f'(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

的通用程序, 并利用它们对如下非线性方程

$$f(x) := \arctan(x) + 0.2x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 0.601958 = 0$$

求根，计算中的停止条件为 $|f(x_n)| < 10^{-8}$或迭代步数 $n > 10^4$(可视为迭代失败). **提示**：编程前分别手算出 $f'(x), f''(x)$。

- 列表给出两种迭代方法在初始点 x_0 依次取值 $-75, -60, -50, -40, -30, -20, -10, -5, 0, 6, 15, 25, 35, 45, 50, 60, 75$ 时的迭代步数（若迭代步数超过 1 万步，可视为迭代失败）以及相应的数值解 x_n (保留小数点后 6 位; 迭代失败时无需给出);
- 比较并分析两种方法的优劣，给出合理的算法分析并作实验小结。

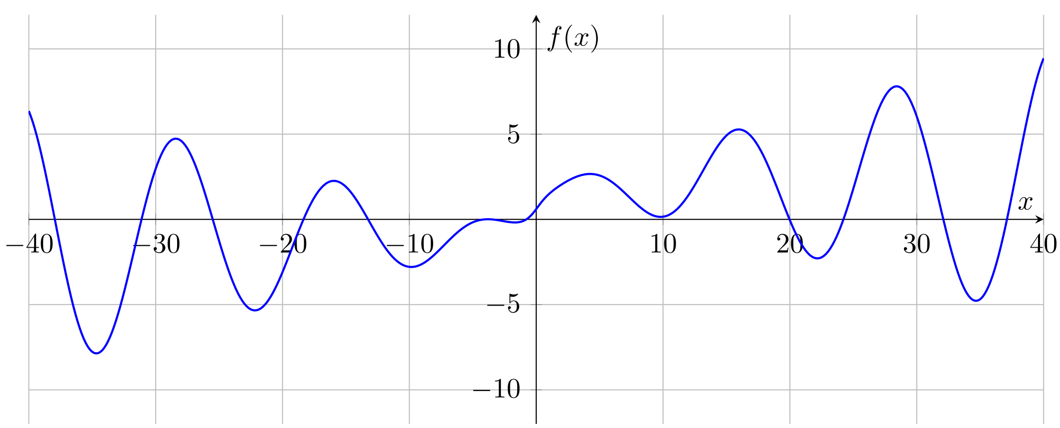

图 1: 函数图像

1 数值结果（列表或作图）

表 1: 实验结果: 误差精度 $\varepsilon = 10^{-9}$, 最大迭代步数为 10^4

Newton 步数	数值解	初始点	霍氏步数	数值解
3	-75.524836	-75	3	-75.524836
6	-75.524836	-60	5	-62.983302
3	-50.453858	-50	3	-50.453858
5	-37.948118	-40	4	-37.948118
4	-31.113718	-30	3	-31.113718
4	-18.345832	-20	3	-18.345832
4	-43.765725	-10	6	-13.253998
6	-4.069180	-5	4	-4.069180
5	-0.777558	0	3	-0.777558
53	-138.299622	6	19	-0.777558
15	119.561796	15	17	100.314946
4	24.221546	25	3	24.221546
5	44.470662	35	5	37.112548
3	44.470662	45	3	44.470662
3	49.830044	50	2	49.830044
6	75.109719	60	5	62.484953
3	75.109719	75	2	75.109719

Newton 得到的解可能与初值偏离较大，Halley 法可以较好调节步长以避免这个问题。

2 算法分析

从实验结果表格中，我们可以观察到以下几点：

- **Newton 迭代法的收敛性**：Newton 迭代法在初始点较接近实际根的情况下，收敛速度非常快。由于 Newton 迭代法依赖于一阶导数，因此在函数 $f(x)$ 的一阶导数不为零或变化不剧烈的情况下，能够较快收敛到根。然而，当初始点较远或导数接近零时，Newton 迭代法可能会发生收敛缓慢或者发散的情况。
- **霍氏迭代法的表现**：霍氏迭代法引入了二阶导数的修正，因此在某些情况下比 Newton 迭代法更稳定，特别是在初始点较远或函数一阶导数变化剧烈时，霍氏迭代法表现出更好的适应性。霍氏迭代法在处理复杂的非线性方程时，通过二阶导数减少了迭代的振荡和不稳定性。
- **迭代步数的比较**：从迭代步数的统计来看，Newton 迭代法在初始点靠近根的情况下通常收敛更快，但当初始点较远时，霍氏迭代法的表现更为稳定。Newton 法更容易在初始点远离根时表现出发散或振荡行为，而霍氏法则更适合在导数变化剧烈的情况下使用。

3 实验小结

在本次数值实验中，我们分别测试了 Newton 迭代法和霍氏迭代法对非线性方程的求解表现。通过实验分析，我们得出以下结论：

- **Newton 迭代法的优点**：Newton 迭代法的主要优点在于其快速收敛，尤其是在初始点接近根时。该方法在许多实际应用中因其简单且高效而广泛应用。
- **Newton 迭代法的缺点**：其缺点在于对初始点的敏感性较高，容易在函数的导数接近零时失效。此外，当初始点距离根较远时，Newton 迭代法容易发散，尤其是当函数具有多重根或复杂的非线性行为时。
- **霍氏迭代法的优点**：霍氏迭代法的主要优势在于其更好的稳定性，尤其是在初始点较远或函数导数变化较大的情况下表现更为优异。由于考虑了二阶导数的影响，它在处理复杂非线性方程时有更好的收敛性。
- **霍氏迭代法的缺点**：由于引入了二阶导数，霍氏迭代法的计算量相比 Newton 法有所增加，这可能在每次迭代的成本上增加一定的计算复杂度。此外，当二阶导数较小或为零时，霍氏法的效果可能不如预期。

总的来说，Newton 迭代法更适用于初始点较接近根且导数变化平缓的情况，而霍氏迭代法在处理复杂非线性方程时表现出更好的适应性。通过对两种方法的比较，我们可以根据不同的实际问题选择合适的求根方法，以提高计算效率和收敛速度。