第九章　函数逼近

数学科学学院　中国科学技术大学

函数逼近

函数逼近问题

如何寻找简单的函数 $\varphi(x)$ 去近似地代替一个复杂的函数 $f(x)$，其中近似代替又称为逼近，函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别称为被逼近函数和逼近函数.

函数逼近

例 9.2

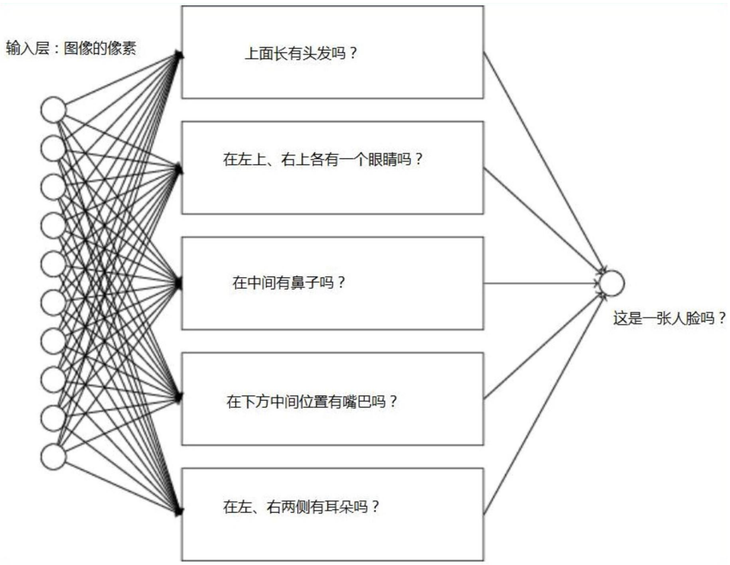
通过观察或测量函数 $f(x)$ 得到一组**离散**数据:

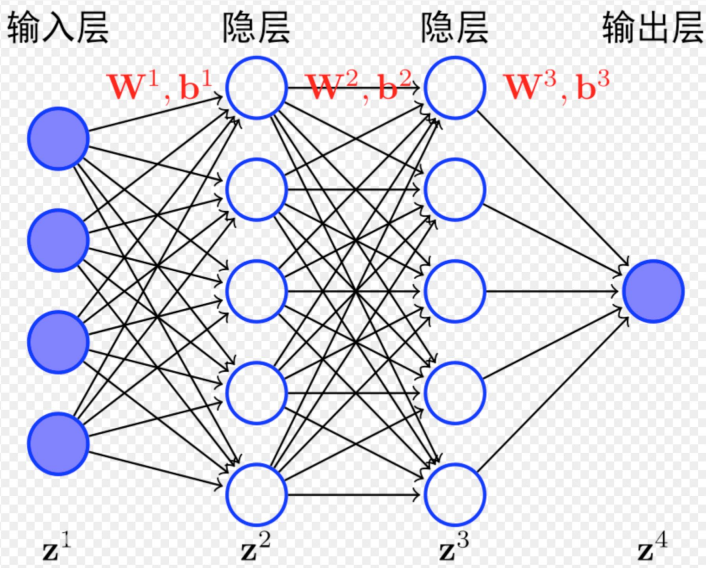
$$\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\},$$

在函数空间 $\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_i(x) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ 中选择 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x)$ 使得逼近误差最小, 即

$$\min_{\varphi \in \Phi} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \varphi(x_i) \right|^2 = \min_{c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i) \right|^2.$$

函数逼近


输入层：图像的像素
上面长有头发吗？
在左上、右上各有一个眼睛吗？
在中间有鼻子吗？
在下方中间位置有嘴巴吗？
在左、右两侧有耳朵吗？
这是一张人脸吗？



输入层
隐层
隐层
输出层
$\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1$
$\mathbf{W}^2, \mathbf{b}^2$
$\mathbf{W}^3, \mathbf{b}^3$
$\mathbf{z}^1$
$\mathbf{z}^2$
$\mathbf{z}^3$
$\mathbf{z}^4$

函数逼近

函数逼近问题

如何寻找简单的函数 $\varphi(x)$ 去近似地代替一个复杂的函数 $f(x)$, 其中近似代替又称为逼近, 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别称为被逼近函数和逼近函数.

函数逼近

函数逼近问题

如何寻找简单的函数 $\varphi(x)$ 去近似地代替一个复杂的函数 $f(x)$，其中近似代替又称为逼近，函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别称为被逼近函数和逼近函数.

函数逼近目的

- 使得一些常用的操作，譬如函数求值、微分甚至积分，可以变得更容易执行.
- 利用函数的部分信息，譬如函数值表，重建或恢复一个函数.

例 9.1

在区间 $[-1,1]$ 上, 确定具有最低次数的多项式 $p(x)$ 使得 $|p(x)-\arccos(x)| \leqslant 10^{-7}$ 成立. 更一般地, 给定函数 $f(x)$ 和正数 ε, 确定多项式 $p(x)$, 使在区间 $[a,b]$ 上有 $|p(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.

例 9.2

通过观察或测量函数 $f(x)$ 得到一组**离散**数据:

$$\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\},$$

在函数空间 $\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_i(x) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ 中选择 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x)$ 使得逼近误差最小, 即

$$\min_{\varphi\in\Phi} \sum_{i=1}^{n} \left|y_i - \varphi(x_i)\right|^2 = \min_{c_1,c_2,\cdots,c_m\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \left|y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i)\right|^2.$$

§9.1.1 赋范线性空间

在逼近问题中几乎都涉及到从一个集合中选择一个元素，使它在某种意义上**接近**该集合外的一个预先给定的元素．因此,若要确切的描述逼近问题，**需要明确两个元素之间的距离**是如何度量的．

在统一的框架下描述逼近问题，引入**赋范线性空间**．

§9.1.1 赋范线性空间

定义 9.1

设集合 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的**线性空间**, 如果 V 中任意一个元素 f 都按某一法则对应一个实数, 记作 $\|f\|$, 并且它满足下列条件:

(1) **正定性**: $\|f\| \geqslant 0, \quad \forall f \in V$; $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$ 成立;
(2) **齐次性**: $\|cf\| = |c|\|f\|, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in V$;
(3) **三角不等式**: $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in V$.

上述对应关系可视为 $V \to \mathbb{R}$ 的映射, 称为**线性空间** V 的**范数**, 并简记为 $\|\cdot\|$. **定义了范数的线性空间**称为**赋范线性空间**.

例 9.3

记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维线性空间, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

易验证 $\|\cdot\|_2$ 满足条件 (1) $\sim$ (3). 因此, $\mathbb{R}^n$ 按 $\|\cdot\|_2$ 构成一赋范线性空间. 另外, 不难验证 $\mathbb{R}^n$ 还可按如下范数

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

分别构成不同的赋范线性空间. 更一般地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

例 9.3

记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维线性空间, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

易验证 $\|\cdot\|_2$ 满足条件 (1) $\sim$ (3). 因此, $\mathbb{R}^n$ 按 $\|\cdot\|_2$ 构成一赋范线性空间. 另外, 不难验证 $\mathbb{R}^n$ 还可按如下范数

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

分别构成不同的赋范线性空间. 更一般地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

构成向量 $\mathbf{x}$ 的***p*-范数**, 前面的范数分别对应 $p = 1, 2, \infty$ 的情形.

例 9.4

记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上**连续函数的全体**, **按通常的函数加法与数乘运算构成线性空间**. 在 $C[a,b]$ 中定义

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|, \quad \forall f \in C[a,b].$$

易验证 $\|\cdot\|_\infty$ 满足条件 $(1)\sim(3)$. 因此, $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|_\infty$ 构成一赋范线性空间, 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 称为 **一致范数** 或 **Chebyshev 范数**.

例 9.5

记 $C^r[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上 r **次连续可微函数的全体**. 定义 $C^r[a,b]$ 的范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}\left\{|f(x)|, |f'(x)|, \cdots, |f^{(r)}(x)|\right\}, \quad \forall f \in C^r[a,b].$$

显然, $C[a,b]$ 是 $C^r[a,b]$ 的一个特殊情形.

回顾

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

例 9.6

记 $L^p[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有满足

$$\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty, \quad p \geqslant 1,$$

的 Lebesgue 可积函数 f 构成的函数类 (Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广). 因区间 $[a,b]$ 上所有的连续函数都是 Riemann 可积的, 故 $C[a,b] \subset L[a,b]$. 在 $L^p[a,b]$ 中定义

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p[a,b], \tag{1}$$

可以证明 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p[a,b]$ 的一个范数. 注意, 在 $L^p[a,b]$ 中约定: 将几乎处处相等的两个可测函数 f, g 视为同一函数.

§9.1.2 距离

定义 9.2

在赋范线性空间 V 中，定义函数

$$d(f,g) = \|f-g\|, \quad \forall f,g \in V,$$

称为 f 与 g 之间的**距离**. 不难验证 $d(f,g)$ 满足距离定义所要求的条件:

(1) **正定性**: $d(f,g) \geqslant 0, \quad \forall f \in V$; $d(f,g)=0$ 当且仅当 $f=g$ 成立;

(2) **对称性**: $d(f,g)=d(g,f), \quad \forall f,g \in V$;

(3) **三角不等式**: $d(f,g) \leqslant d(f,h)+d(h,g), \quad \forall f,g,h \in V$.

引理 9.1

在赋范线性空间 V 中，加法，数乘和范数都是距离 $d(f,g)$ 下的连续函数.

设 X 是**赋范线性空间**, M 是 X 的非空子集, 我们希望从 M 中选取元素逼近 X 中的元素, M 称为 X 的一个**逼近集合**.

定义 9.3

任意 $x \in X$, 如果有元素 $m^* \in M$ 使得

$$\|x - m^*\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| \triangleq d(x, M),$$

则称 m^* 为子集 M 逼近 x 的**最佳逼近元**, 记为 $m^* \in \mathcal{B}_M(x)$, 其中

$$\mathcal{B}_M(x) \triangleq \left\{ m \in M : \|x - m\| = d(x, M) \right\}$$

表示由 M 逼近 x 的**最佳逼近元构成的集合**, 用 $\#\mathcal{B}_M(x)$ 表示最佳逼近元的个数.

§9.1.3 最佳逼近

有了最佳逼近元的定义之后，自然地会产生以下问题：

- 存在性，即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \geqslant 1$;
- 唯一性，即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \leqslant 1$;
- 最佳逼近元应具有什么特征;
- 最佳逼近元的构造及其应用.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.4

X 的一个子集 M 称为**列紧的**, 如果 M 中的每个点列都有一个收敛于 M 中一点的子序列.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.4

X 的一个子集 M 称为**列紧的**, 如果 M 中的每个点列都有一个收敛于 M 中一点的子序列.

定理 9.1

设 M 是 X 的列紧子集, 则对于任意的 $x \in X$, 存在最佳逼近元 $m^* \in M$.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.4

X 的一个子集 M 称为**列紧的**, 如果 M 中的每个点列都有一个收敛于 M 中一点的子序列.

定理 9.1

设 M 是 X 的列紧子集, 则对于任意的 $x \in X$, 存在最佳逼近元 $m^* \in M$.

推论 9.1 X 是**赋范线性空间**

若 M 是 X 的线性子空间, 且 $\dim(M) < +\infty$, 则对任意的 $x \in X$, **存在最佳逼近元**$m^* \in M$.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.5

设 M 是赋范线性空间 X 的非空子集, 称 M 是**凸集**, 如果对任意的 $m_1, m_2 \in M$, $t \in (0,1)$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M$ 成立. 进一步, 若 $m_1 \neq m_2$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M^\circ$ 成立 (M° 表示集合 M 的内部), 则称 M 是**严格凸集**.

定义 9.5

设 M 是赋范线性空间 X 的非空子集, 称 M 是**凸集**, 如果对任意的 $m_1, m_2 \in M$, $t \in (0,1)$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M$ 成立. 进一步, 若 $m_1 \neq m_2$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M^\circ$ 成立 (M° 表示集合 M 的内部), 则称 M 是***严格凸集***.

定义 9.6

如果赋范线性空间 X 按某一范数 $\|\cdot\|$ 的闭球 $B(x,r)$ 是严格凸集, 则称该范数 $\|\cdot\|$ 是**严格凸的**.

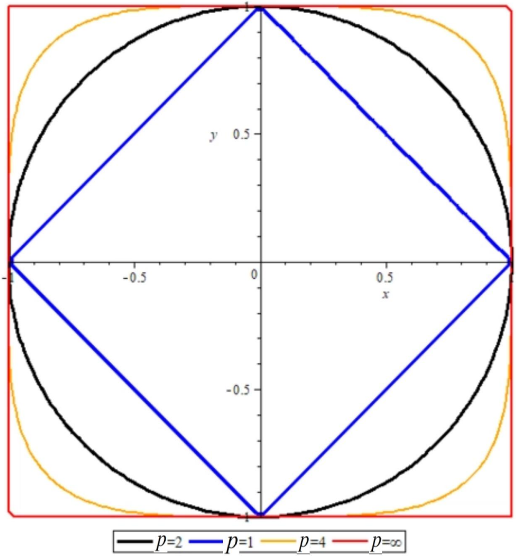
定义 9.5

设 M 是赋范线性空间 X 的非空子集，称 M 是**凸集**，如果对任意的 $m_1, m_2 \in M$, $t \in (0,1)$，均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M$ 成立. 进一步，若 $m_1 \neq m_2$，均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M^\circ$ 成立 (M° 表示集合 M 的内部)，则称 M 是**严格凸集**.

定义 9.6

如果**赋范线性空间** X 按某一范数 $\|\cdot\|$ 的闭球 $B(x,r)$ 是**严格凸集**，则称该范数 $\|\cdot\|$ 是**严格凸的**.

几何上,严格凸意味者单位球球面上不含任何____



1
y
0.5
-0.5
-1
0
0.5
x
1
-1
p=2
p=1
p=4
p=∞

§9.1.4 存在性与唯一性

定理 9.2

设 M 是 X 的**列紧子集**，且 M 是**严格凸集**，则对任意的 $x \in X$，**存在唯一的最佳逼近元** $m^* \in M$.

§9.1.4 存在性与唯一性

定理 9.2

设 M 是 X 的列紧子集，且 M 是严格凸集，则对任意的 $x \in X$，存在唯一的最佳逼近元 $m^* \in M$.

推论 9.2 X 是赋范线性空间

若 M 是 X 的线性子空间，且 $\dim(M) < +\infty$，X 的范数 $\|\cdot\|$ 是严格凸的，则对任意的 $x \in X$，存在唯一的最佳逼近元 $m^* \in M$.

§9.2.1 内积空间

为了描述向量的长度、**正交**等几何性质，需要引入**内积**.

§9.2.1 内积空间

为了描述向量的长度、**正交**等几何性质，需要引入**内积**.

定义 9.7

设集合 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，如果 V 中任意一对元素 f, g 都按某一法则对应一个实数，记作 (f, g)，并且满足下列条件:

(1) **对称性**: $(f,g)=(g,f), \quad \forall f,g\in V;$

(2) **线性性**:

$$(\lambda f+\mu g, h)=\lambda(f,h)+\mu(g,h), \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall f,g,h\in V;$$

(3) **正定性**: $(f,f)\geqslant 0, \quad \forall f\in V;\ (f,f)=0\Leftrightarrow f=0,$

则称二元实函数 $(\cdot,\cdot)$ 是线性空间 V 上的一个**内积**. 定义了内积的线性空间 V 称为**内积空间**.

例 9.7

在 $\mathbb{R}^n$ 空间中，任取一组标准正交基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$，则

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$，$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + y_n \mathbf{e}_n$.

§9.2.1 内积空间

例 9.8

在 $L^2[a,b]$ 空间中，定义

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f,g \in L^2[a,b]. \tag{2}$$

易验证 $(\cdot,\cdot)$ 满足条件 $(1) \sim (3)$. 因此，$L^2[a,b]$ 按 $(\cdot,\cdot)$ 构成一内积空间.

命题 9.3

(**Cauchy-Schwarz 不等式**) 设 V 是内积空间，则有

$$|(f,g)| \leqslant \sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}, \quad \forall f,g\in V.$$

若在内积空间 V 中定义

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad \forall f \in V,$$

则有

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g,f+g) = (f,f)+2(f,g)+(g,g) \\ &\leqslant (f,f)+2\sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}+(g,g) = (\|f\|+\|g\|)^2, \end{aligned}$$

即 $\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$. 易验证, $\|\cdot\|$ 构成 V 的一个范数, 称 $\|\cdot\|$ 是**内积诱导的范数**.

§9.2.2 内积的性质

命题 9.4

（平行四边形等式）设 V 是内积空间，则有

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

在内积空间中，若 f 与 g 的内积为零，即 $(f,g)=0$，则称 f 与 g 是**正交**的．此时，$\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$，类似于欧式空间中的勾股定理．

在内积空间中讨论最佳逼近问题.

定义 9.8

设 V 是**内积空间**, $M \subset V$ 为**有限维子空间**. 对于 $x \in V$, 如果有元素 $m^* \in M$ 使得

$$\|x - m^*\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| \triangleq d(x, M),$$

则称 m^* 为子集 M 逼近 x 的**最佳逼近元**, 将所有 M 中 x 的最佳逼近元构成的集合记作 $\mathcal{B}_M(x)$, 这里 $\|\cdot\|$ **是 V 内积诱导的范数**.

§9.2.3 最佳逼近

M 是 X 的线性子空间，且 $\dim(M) < +\infty$

存在唯一性定理

V 为内积空间

定理 9.5

对于任意的 $x \in V$, 存在唯一的最佳逼近元$m^* \in M$.

§9.2.4 特征与表示

刻画**内积空间最佳逼近元的特征**性质. V 为**内积空间**

定理 9.6

对任意的 $x \in V$, 则 $m^* \in M$ 为 x 的**最佳逼近元的充分必要条件**是 $x - m^*$ 与 M 中的任意元素**正交**, 即

$$(x - m^*, m) = 0, \quad \forall m \in M.$$

§9.2.4 特征与表示

刻画内积空间最佳逼近元的特征性质.

定理 9.6

对任意的 $x \in V$, 则 $m^* \in M$ 为 x 的最佳逼近元的充分必要条件是 $x - m^*$ 与 M 中的任意元素正交, 即

$$(x - m^*, m) = 0, \quad \forall m \in M.$$

定理9.6的几何意义: x **在 M 中的正交投影** m^* 即为 x 的最佳逼近元. 利用该定理, 最佳逼近元的距离可表示为:

$$d(x, M)^2 = (x, x) - (x, m^*). \tag{3}$$

设 M 是 X 的 n 维线性子空间, M 有一组基: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 那么 x 的最佳逼近元 m^* 可表示为 $m^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \varphi_i$. 利用定理9.6, m 分别取 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 可得

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)\, c_i^* = (x, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

称式 (4) 为**最佳逼近元的*法方程组***.

引入记号

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix},\ \mathbf{c}^*=\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\\ \vdots\\ c_n^*\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}(x,\varphi_1)\\ (x,\varphi_2)\\ \vdots\\ (x,\varphi_n)\end{pmatrix},$$

则法方程组可写成 $G\,\mathbf{c}^*=\mathbf{b}$.

基于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 的线性无关性, 容易证明矩阵 G 是**正定的**. 因此, **法方程组的解存在且唯一**.

§9.2.4 特征与表示

若 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 构成 M 的一组**正交基**, 则 G 是一个对角矩阵, 法方程组可以直接解出, 最佳逼近元 m^* 显式地表示为

$$m^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \varphi_i, \tag{5}$$

称式 (5) 为 x 的**广义Fourier展开**, φ_i 的系数为**广义Fourier系数.**

§9.2.4 特征与表示

利用 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 的正交性，可知式 (3) 等价于

$$\|x-m^*\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^n (c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2, \quad c_i^*=\frac{(x,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}.$$

在上式中，若令 $n\to\infty$，则得 **Bessel 不等式**:

$$\sum_{i=1}^\infty (c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

特别地，若最佳逼近元序列收敛于 x，则上述不等式变成等式，称为**广义 Parseval 等式**.

§9.2.5 正交基的存在性

M 有一组基: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$

定理 9.7

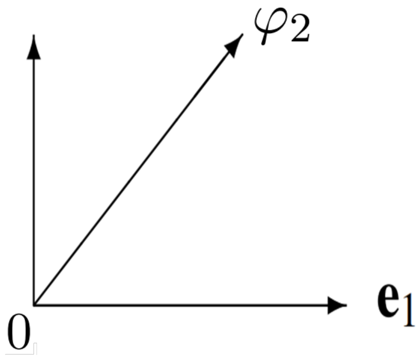
任何 n 维内积空间 M 都存在正交基.

通过如下算法构造正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$:

(1) $e_1 = \varphi_1$;

(2) $e_i = \varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\varphi_i, e_j)}{(e_j, e_j)} e_j, \quad j = 2, \cdots, n.$

上述算法称为 **Gram-Schmidt 正交化**, 是一个非常重要的构造性算法.


φ_2
$\mathbf{e}_1$
0

函数的最佳多项式逼近问题, 即**连续情形的最佳平方逼近问题**.

记 $L^2_\rho[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上满足

$$\int_a^b \rho(x) f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

的 Lebesgue **可积函数** f 构成的函数类, 其中称非负函数 $\rho(x)$ 为 **权函数**, 如果 $\rho(x)$ 满足:

(1) 对于非负整数 n, 积分 $\int_a^b \rho(x) x^n\,\mathrm{d}x$ 存在且有限;

(2) 对于非负连续函数 $g(x)$, 若有 $\int_a^b \rho(x) g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $g(x)\Big|_{[a,b]} \equiv 0$.

显然, 当 $\rho(x) \equiv 1$ 时, 即为 $L^2[a,b]$.

§9.3.1 最佳平方逼近多项式

在 $L^2_\rho[a,b]$ 中，定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f,g \in L^2_\rho[a,b],$$

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad \forall f \in L^2_\rho[a,b].$$

不难验证，$(\cdot,\cdot)$ 与 $\|\cdot\|$ 分别构成 $L^2_\rho[a,b]$ 的内积与范数.

记 $\mathbb{P}_n[x]$ 为所有次数不超过 n 的多项式构成的空间，则 $\mathbb{P}_n[x]$ 是 $L^2_\rho[a,b]$ 的 $n+1$ 维子空间.

存在唯一性定理

利用定理9.5知，**对任意的** $f \in L^2_\rho[a,b]$，**存在唯一的** n **次多项式**

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{P}_n[x],$$

使得 $\|f-p\|$ 取到最小值，即**最佳平方逼近多项式**.

多项式 $p(x)$ 的系数可由如下**法方程**确定:

$$\sum_{i=0}^{n}(x^j, x^i)\, c_i = (f, x^j), \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{6}$$

其中

$$(x^j, x^i) = \int_a^b \rho(x) x^{i+j}\, \mathrm{d}x, \quad (f, x^j) = \int_a^b \rho(x) f(x) x^j\, \mathrm{d}x.$$

例 9.9

设 $f(x) = \sin(\pi x)$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.

即存在唯一性定理

解 取函数空间 $M = \text{span}\{1, x, x^2\}$, 由定理9.5知, 二次最佳平方逼近多项式 $p_2^*(x)$ 存在且唯一. 取权函数 $\rho(x) = 1$, 易得

解　取函数空间 $M=\mathrm{span}\{1,x,x^2\}$, 由定理9.5知, 二次最佳平方逼近多项式 $p_2^*(x)$ 存在且唯一. 取权函数 $\rho(x)=1$, 易得

$$(\varphi_0,\varphi_0)=1,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=1/2,\quad (\varphi_0,\varphi_2)=1/3,$$

$$(\varphi_1,\varphi_0)=1/2,\quad (\varphi_1,\varphi_1)=1/3,\quad (\varphi_1,\varphi_2)=1/4,$$

$$(\varphi_2,\varphi_0)=1/3,\quad (\varphi_2,\varphi_1)=1/4,\quad (\varphi_2,\varphi_2)=1/5,$$

$$(f,\varphi_0)=\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi},$$

$$(f,\varphi_2)=\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2-4}{\pi^3},$$

故 $p_2^*(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ 满足法方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \\ \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{pmatrix}$$

故 $p_2^*(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ 满足法方程

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \\ \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \end{pmatrix}$$

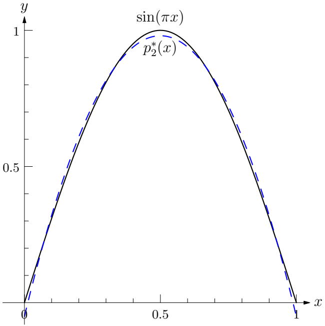
求解出

$$c_0=\frac{12\pi^2-120}{\pi^3}\approx -0.050465,\ c_1=\frac{720-60\pi^2}{\pi^3}\approx 4.12251,\ c_2=-c_1\approx -4.12251.$$

因此, $p_2^*(x)\approx -0.050465+4.12251x-4.12251x^2$, 逼近情况如图所示. [

例 9.9

设 $f(x) = \sin(\pi x)$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.



当 $[a,b]=[0,1]$, $\rho(x)=1$ 时, 法方程组 (6) 的系数矩阵是

$$H=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix},$$

H 称为**希尔伯特** (Hilbert) **矩阵**. 当 n 较大时, 可证明 ***H* 是病态的**.

因此, 对于许多实际问题来说, **通过法方程来确定函数的最佳平方逼近多项式是有困难的**.

§9.3.2 最佳平方逼近多项式

如果能找到 $\mathbb{P}_n[x]$ 的一组**正交基**, 即**正交多项式**, 那么法方程组 (6) 的系数矩阵就是**对角矩阵**, 线性方程组便可直接求解,即式 (5), 从而保证了计算的可靠性. 另外, **正交多项式本身在数值积分, 微分方程, 数学物理方法, 编码理论等领域也有重要的应用**.

§9.3.2 正交多项式

定义 9.9

定义在 $[a,b]$ 上的函数系 $\{g_l(x)\}_{l=0}^n$ 称为 $\mathbb{P}_n[x]$ 的一组**正交多项式基**, 如果它满足以下条件

(1) $g_l(x)$ 是 l 次多项式, 即

$$g_l(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + a_0,\ a_l \neq 0;$$

(2) $(g_i, g_j) = 0,\ \forall i \neq j; \quad (g_i, g_i) > 0,\ i = 0, 1, \cdots, n,$

其中 $g_l(x)$ 称为**l 次正交多项式**. 进一步, 若有 $(g_i, g_i) = 1,\ i = 0, 1, \cdots, n$, 则称 $\{g_l(x)\}_{l=0}^n$ 是 $[a,b]$ 上 $\mathbb{P}_n[x]$ 一组**规范正交多项式基**.

§9.3.2 正交多项式

利用正交性, 对于任意的 k 次多项式 $p_k(x)$, 则有

$$(p_k, g_l) = 0, \quad l > k.$$

令 $g_l^*(x) = g_l(x)/a_l$, $l = 0, 1, \cdots, n$, 称 $\{g_l^*(x)\}_{l=0}^n$ 为 $[a, b]$ 上 $\mathbb{P}_n[x]$ 一组**首项系数为 1 的正交多项式基**.

如何计算正交多项式?

定理 9.8

正交多项式基 $\{g_l^*(x)\}_{l=0}^n$ 有递推公式:

$$\begin{cases} g_0^*(x) = 1, \quad g_1^*(x) = x - \dfrac{(xg_0^*, g_0^*)}{(g_0^*, g_0^*)}, \\ g_k^*(x) = (x - a_k)g_{k-1}^*(x) - b_k g_{k-2}^*(x), \quad k = 2, 3, \cdots, n, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $a_k = \dfrac{(xg_{k-1}^*, g_{k-1}^*)}{(g_{k-1}^*, g_{k-1}^*)}$, $b_k = \dfrac{(xg_{k-1}^*, g_{k-2}^*)}{(g_{k-2}^*, g_{k-2}^*)}$.

定理 9.9

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一连续函数, 与 $g_0^*(x), g_1^*(x), \cdots, g_n^*(x)$ 都正交, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 中至少变号 $n+1$ 次或者恒等于零.

定理 9.9

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一连续函数，与 $g_0^*(x), g_1^*(x), \cdots, g_n^*(x)$ 都正交，则 $f(x)$ 在 (a,b) 中至少变号 $n+1$ 次或者恒等于零.

推论 9.3

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一连续函数，$p(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式，则 $p(x)$ 在 (a,b) 中至少 $n+1$ 个点插值于 $f(x)$.

§9.3.2 正交多项式

与一般的多项式不同，正交多项式的**零点**具有很好的**性质**.

定理 9.10

区间 $[a,b]$ 上的 l 次正交多项 $g_l^*(x)$ 恰有 l 个互异的实根，并且全部位于 $[a,b]$ 的内部.

§9.3.3 常用的正交多项式

勒让德 (Legendre) 多项式

设 $\rho(x) \equiv 1$, 区间 $[-1, 1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $P_k(x)$ 为**勒让德多项式**.

$P_k(x)$ 的解析表达式:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(x^2 - 1)^k \right], \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{8}$$

递推计算公式:

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

当 k 为偶数时, $P_k(x)$ 为偶函数; 当 k 为奇数时, $P_k(x)$ 为奇函数.

勒让德(Legendre)多项式重要性质

性质1 **正交性**

$$(P_m(x), P_n(x)) = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

性质2 **奇偶性**

$$P_n(x) \text{ 为} \begin{cases} \text{偶函数,} & n \text{ 为偶数时} \\ \text{奇函数,} & n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

性质3 **递推公式** $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$

性质4 零点: $P_n(x)$ 在$(-1,1)$上恒有 n 个互异实根

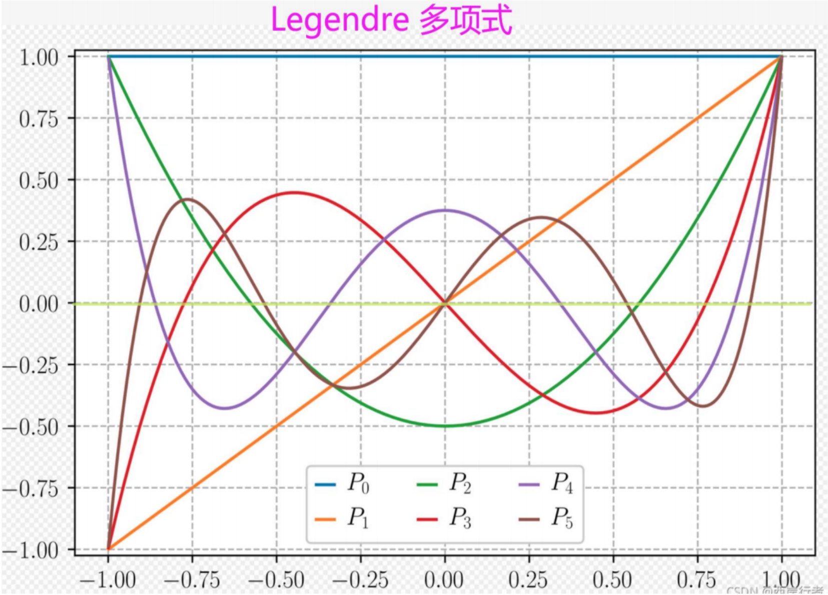
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

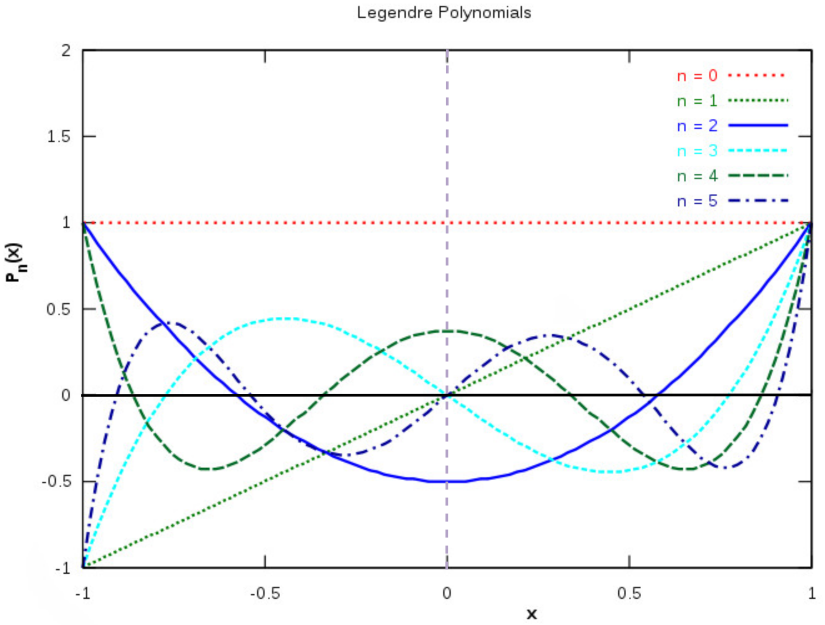
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



Legendre 多项式
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5



Legendre Polynomials
n = 0
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
$P_n(x)$
x

例 9.10

设 $f(x) = \sin(\pi x)$, **利用正交多项式理论，**求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.

例 9.10

设 $f(x)=\sin(\pi x)$, **利用正交多项式理论**, 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.

解 令 $t=2x-1$, 则 $t\in[-1,1]$, 函数 f 可写成关于 t 的函数, 即

$$\tilde{f}(t)=\sin\left[\frac{(t+1)\pi}{2}\right].$$

根据勒让德多项式的定义, 有

$$P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}.$$

例 9.10

设 $f(x)=\sin(\pi x)$, **利用正交多项式理论,** 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.

解 令 $t=2x-1$, 则 $t\in[-1,1]$, 函数 f 可写成关于 t 的函数, 即

$$\tilde{f}(t)=\sin\left[\frac{(t+1)\pi}{2}\right].$$

根据勒让德多项式的定义, 有

$$P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}.$$

$$p_2^*(t)=C_0P_0(t)+C_1P_1(t)+C_2P_2(t)$$

$$(P_0, P_0) = 2, \quad (P_1, P_1) = 2/3, \quad (P_2, P_2) = 2/5,$$

$$(\tilde{f}, P_0) = \int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{(t+1)\pi}{2}\right] \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$(\tilde{f}, P_1) = \int_{-1}^{1} t \sin\left[\frac{(t+1)\pi}{2}\right] \mathrm{d}x = 0,$$

$$(\tilde{f}, P_2) = \int_{-1}^{1} \frac{3t^2 - 1}{2} \sin\left[\frac{(t+1)\pi}{2}\right] \mathrm{d}x = \frac{4(\pi^2 - 12)}{\pi^3}.$$

$$p_2^*(t) = C_0 P_0(t) + C_1 P_1(t) + C_2 P_2(t)$$

按式(5)有

$$\begin{aligned} p_2^*(t) &= \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2} \times P_0(t) + 0 \times \frac{3}{2} \times P_1(t) + \frac{4(\pi^2 - 12)}{\pi^3} \times \frac{5}{2} \times P_2(t) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{5(\pi^2 - 12)(3t^2 - 1)}{\pi^3}. \end{aligned}$$

按式 (5) 有

$$p_2^*(t) = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2} \times P_0(t) + 0 \times \frac{3}{2} \times P_1(t) + \frac{4(\pi^2 - 12)}{\pi^3} \times \frac{5}{2} \times P_2(t)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{5(\pi^2 - 12)(3t^2 - 1)}{\pi^3}.$$

将 $t = 2x - 1$ 代入上式并化简得

$$p_2^*(x) = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} - \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^3}x + \frac{60\pi^2 - 720}{\pi^3}x^2,$$

与例9.9的结果一致.

第一类切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

设 $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, 区间 $[-1,1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{T_k(x)\}_{k=0}^{n}$, 称 $T_k(x)$ 为**第一类切比雪夫多项式**.

$T_k(x)$ 的解析表达式:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{10}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k = 1, 2, \cdots, n, \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{cases} \tag{11}$$

$T_k(x)$ 是首项系数为 2^{k-1} 的 k 次多项式, 且 T_{2k} 只含 x 的偶次幂, T_{2k-1} 只含 x 的奇次幂.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1 \\
T_1 &= x \\
T_2 &= 2x^2 - 1 \\
T_3 &= 4x^3 - 3x \\
T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6 &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7 &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8 &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9 &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x
\end{aligned}
$$

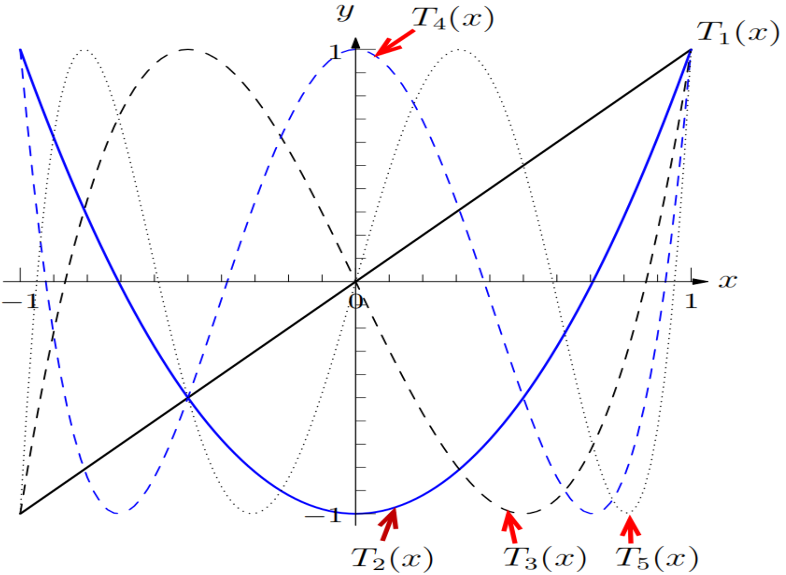


Figure: 切比雪夫多项式

§9.3.3 常用的正交多项式

第二类切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

设 $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$, 区间 $[-1,1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $U_k(x)$ 为**第二类切比雪夫多项式**.

$U_k(x)$ 的解析表达式:

$$U_k(x) = \frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{12}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x), & k = 1, 2, \cdots, n, \\ U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x. \end{cases} \tag{13}$$

拉盖尔 (Laguerre) 多项式

设 $\rho(x) = e^{-x}$, 区间 $[0, +\infty)$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{L_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $L_k(x)$ 为**拉盖尔多项式**.

$L_k(x)$ 的解析表达式

$$L_k(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^k e^{-x}), \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{14}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} L_{k+1}(x) = (2k+1-x)L_k(x) - k^2 L_{k-1}(x), & k = 1, 2, \cdots, n, \\ L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x. \end{cases} \tag{15}$$

埃尔米特 (Hermite) 多项式

设 $\rho(x)=e^{-x^2}$, 区间 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{H_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $H_k(x)$ 为**埃尔米特多项式**.

$H_k(x)$ 的解析表达式

$$H_k(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}),\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{16}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} H_{k+1}(x)=2xH_k(x)-2kH_{k-1}(x), & k=1,2,\cdots,n, \\ L_0(x)=1, \quad L_1(x)=2x. \end{cases} \tag{17}$$

§9.4.1 周期函数的最佳平方逼近

傅立叶 (Fourier) 大胆断言: “任何” 周期函数都可以表示为三角函数级数的形式, 即**傅立叶级数**. 对于非周期信号, 傅立叶指出可用三角函数的加权积分来表示, 即**傅立叶变换**.

傅立叶分析作为最基本的数学工具, 被广泛应用于信号的时频域分析、谱分析、微分方程求解等.

连续情形的傅立叶级数.

考虑区间 $[0, T)$ 上的平方可积函数空间 $L^2[0, T)$, 使用式 (2) 定义的内积及其诱导的范数. 若规定 $f(x) = f(x - T), \forall x \in \mathbb{R}$, 则可将 $L^2[0, T)$ 中的任一函数延拓为实数域 $\mathbb{R}$ 上周期为 T 的函数.

在此意义下, $L^2[0, T)$ 称为**周期为 T 的平方可积函数空间**.

若取 $[0, T)$ 上的逼近函数空间 $M = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{2n}\}$, 其中

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}, \varphi_{2k} = \cos k\omega x, \varphi_{2k-1} = \sin k\omega x, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

容易验证**三角多项式函数系** $\{\varphi_i\}_{i=0}^{2n}$ **构成 M 的一组正交基**.

§9.4.1 周期函数的最佳平方逼近

若取 $[0,T)$ 上的逼近函数空间 $M=\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{2n}\}$, 其中

$$\varphi_0=\frac{1}{2},\varphi_{2k}=\cos k\omega x,\varphi_{2k-1}=\sin k\omega x,\quad k=1,2,\cdots,n,\omega=\frac{2\pi}{T}.$$

容易验证**三角多项式函数系** $\{\varphi_i\}_{i=0}^{2n}$ **构成 M 的一组正交基**.

利用定理9.5和9.6知, 对于**任意的函数** $f(x)\in L^2[0,T)$, **存在唯一的最佳平方逼近元** $f_n(x)\in M$, 且有

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right),$$

其中

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{(f,\varphi_{2k})}{(\varphi_{2k},\varphi_{2k})}=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x,\quad k=0,1,\cdots,n,\\ b_k&=\frac{(f,\varphi_{2k-1})}{(\varphi_{2k-1},\varphi_{2k-1})}=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x,\quad k=1,\quad\cdots,n.\end{aligned}\tag{18}$$

由数学分析中的 Fourier 级数理论知, **最佳平方逼近三角多项式** $f_n(x)$ 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 而 a_k, b_k 为 Fourier 系数. 此外, 利用 Fourier 级数的收敛性定理可得:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

即 $f_n(x)$ 平方收敛到 $f(x)$.

例 9.11

设 $f(x) = |x|$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 ***n* 次最佳平方逼近三角多项式**.

例 9.11

设 $f(x)=|x|$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 n 次最佳平方逼近三角多项式.

解 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 n 次最佳平方逼近三角多项式为

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right),\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=1$$

按式 (18), 展开系数

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1],\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x - x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$. 因此, 有

按式 (18), 展开系数

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1],\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x-x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, n$. 因此, 有

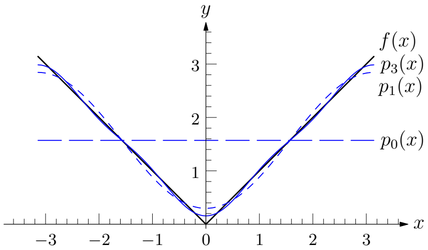
$$
f_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{[(-1)^k-1]}{k^2}\cos kx
$$

当 $n = 0, 1, 3$ 时, 函数图像如图9.3所示.

§9.4.1 周期函数的最佳平方逼近

例 9.11

设 $f(x) = |x|$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 n 次最佳平方逼近三角多项式.



利用 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, Fourier 级数可以写成复数形式

任意 $f(x) \in L^2[0,T)$
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\mathrm{i}k\omega x}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

其中
$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-\mathrm{i}k\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

§9.4.2 离散傅立叶变换

离散情形的傅立叶级数.

设 $f(x) \in L^2[0, T)$, 已知 $f(x)$ 在一系列等距离散点上的值, 即

$$f_k = f(x_k), \quad x_k = \frac{kT}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

明显地, $(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$. 在 $L^2[0, T)$ 上定义**离散的**内积和诱导的**拟范数**

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot \bar{g}_k, \quad \forall f, g \in L^2[0, T),$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad \forall f \in L^2[0, T).$$

利用公式 (5) 及 $\{1, e^{\mathrm{i}\omega x}, e^{\mathrm{i}2\omega x}, \cdots, e^{\mathrm{i}(m-1)\omega x}\}$ 的正交性, 即

$$(e^{\mathrm{i}jx}, e^{\mathrm{i}lx}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}(j-l)\omega x_k} = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ n, & j = l, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的离散数据 $\{(x_k, f_k)\}_{k=0}^{n-1}$ 在空间 $M = \mathrm{span}\{1, e^{\mathrm{i}\omega x}, e^{\mathrm{i}2\omega x}, \cdots, e^{\mathrm{i}(m-1)\omega x}\}$ 的**最佳平方逼近元**为

$$s_m(x) = \sum_{l=0}^{m-1} g_l e^{\mathrm{i}l\omega x}, \quad g_l = \frac{(f, e^{\mathrm{i}l\omega x})}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\mathrm{i}l\omega x_k}.$$

§9.4.2 离散傅立叶变换

当 $m = n$ 时，插值条件 $s_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \cdots, n-1$ 成立，称 $s_n(x)$ 为 $f(x)$ 的$n-1$ 次**插值三角多项式**.

利用插值三角多项式的系数与样本值之间的关系，来定义离散傅立叶变换及其逆变换.

§9.4.2 离散傅立叶变换

定义 9.10

设有向量 $\mathbf{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$, 称向量

$$\mathbf{g}=(g_0,g_1,\cdots,g_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$$

为向量 $\mathbf{f}$ 的**离散傅立叶变换** (Discrete Fourier Transform, DFT), 其中

$$g_l=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f_k e^{-\mathrm{i}2\pi lk/n},\quad l=0,1,\cdots,n-1. \qquad T=2\pi$$

反之, 称向量 $\mathbf{f}$ 为向量 $\mathbf{g}$ 的**离散傅立叶逆变换**, 即

$$f_j=\sum_{k=0}^{n-1}g_k e^{\mathrm{i}2\pi jk/n},\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

离散傅立叶变换可写成

$$
\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \rho^0 & \rho^0 & \rho^0 & \cdots & \rho^0 \\ \rho^0 & \rho^1 & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho^0 & \rho^2 & \rho^4 & \cdots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^0 & \rho^{n-1} & \rho^{2(n-1)} & \cdots & \rho^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}
$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{g} = F_n \mathbf{f},$$

其中 $\rho = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 称 F_n 为**傅立叶变换矩阵**.

F_n 是对称矩阵, 且除了第一行 (列) 外, 矩阵的每一行 (列) 元素之和为零.

F_n 满足 $F_n\overline{F_n^{\mathrm{T}}} = I/n$, 即 $F_n/\sqrt{n}$ 是酉阵.

傅立叶变换矩阵 F_n 的逆为

$$F_n^{-1} = n\overline{F_n} = \begin{pmatrix} \rho^0 & \rho^0 & \rho^0 & \cdots & \rho^0 \\ \rho^0 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \cdots & \rho^{-(n-1)} \\ \rho^0 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \cdots & \rho^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^0 & \rho^{-(n-1)} & \rho^{-2(n-1)} & \cdots & \rho^{-(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

即离散傅立叶逆变换的矩阵表示.

§9.4.2 离散傅立叶变换

在许多工程领域，利用计算机进行 Fourier 分析的主要方法是离散傅立叶变换.

不难看出，计算**离散傅立叶变换需要 n^2 次乘法**，$n(n-1)$ 次加法及 n 次除法，故**时间复杂度**为 $O(n^2)$. 当 N 很大时，运算量会变得相当大，即使用高速计算机，也需要花费大量的时间.

快速傅立叶变换 (Fast Fourier Transform, **FFT**) 算法，使得算法**时间复杂度**降为 $O(n\log n)$，被评为二十世纪的十大算法之一!

快速傅立叶变换 (Fast Fourier Transform, **FFT**) 算法

离散傅立叶变换可写成

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \rho^0 & \rho^0 & \rho^0 & \cdots & \rho^0 \\ \rho^0 & \rho^1 & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho^0 & \rho^2 & \rho^4 & \cdots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^0 & \rho^{n-1} & \rho^{2(n-1)} & \cdots & \rho^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{g} = F_n \mathbf{f},$$

其中 $\rho = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 称 F_n 为**傅立叶变换矩阵**.

§9.4.3 快速傅立叶变换

快速傅立叶变换采用分而治之 (Divide and conquer) 策略.

下面介绍一种常用的逐次分半算法. 若 $n = 2m$ 为偶数, 记 $\omega_n = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 多项式 $p(z) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k$, 则

$$g_l = p(\omega_n^l), \quad l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即计算向量 $\mathbf{f}$ 的离散傅立叶变换等价于求多项式 $p(z)$ 在 n 个点 $\{1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}\}$ 处的值.

§9.4.3 快速傅立叶变换

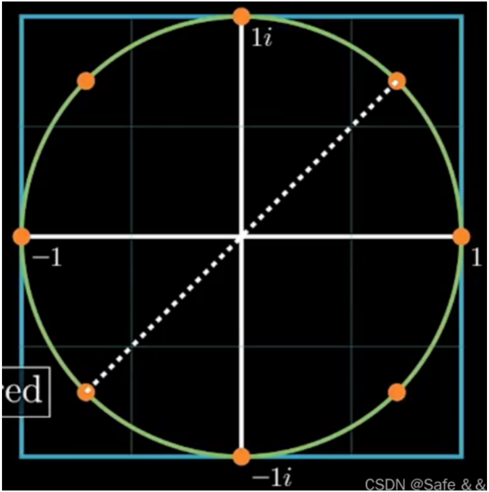
$$g_l = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\mathrm{i}2\pi lk/n}, \quad l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

快速傅立叶变换采用分而治之 (Divide and conquer) 策略.

下面介绍一种常用的逐次分半算法. 若 $\boldsymbol{n = 2m}$ 为偶数, 记 $\omega_n = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 多项式 $p(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k$, 则

$$g_l = p(\omega_n^l), \quad l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即计算向量 $\mathbf{f}$ 的离散傅立叶变换等价于求多项式 $p(z)$ 在 n 个点 $\{1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}\}$ 处的值.


1i
−1
1
−1i
ed
CSDN @Safe & &

§9.4.3 快速傅立叶变换

将 $p(x)$ 的系数按偶次项和奇数项分开，构造多项式

$$p_0(z)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f_{2k}z^k,\quad p_1(z)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f_{2k+1}z^k,$$

则

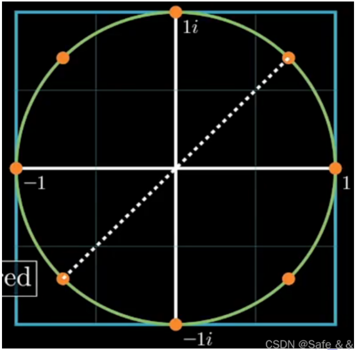
$$p(z)=\frac{p_0(z^2)+z\,p_1(z^2)}{2}.$$

问题转化为求 $p_0(z)$ 和 $p_1(z)$ 在 $\{1,\omega_n^2,\omega_n^4,\cdots,\omega_n^{2(n-1)}\}$ 的值.

利用单位根的性质有 $n = 2m$

$$\omega_n^{2k} = e^{-\mathrm{i}2\pi(2k)/n} = e^{-\mathrm{i}2\pi k/m} = \omega_m^k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

故前面的集合仅有 m 个不同的值, 即 $\{1, \omega_m, \omega_m^2, \cdots, \omega_m^{m-1}\}$.



利用单位根的性质有 $n = 2m$

$$\omega_n^{2k} = e^{-i2\pi(2k)/n} = e^{-i2\pi k/m} = \omega_m^k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

故前面的集合仅有 m 个不同的值, 即 $\{1, \omega_m, \omega_m^2, \cdots, \omega_m^{m-1}\}$.

对于 $k = 0, 1, \cdots, m-1$, 有

$$g_k = p(\omega_n^k) = \frac{p_0(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k p_1(\omega_n^{2k})}{2} = \frac{p_0(\omega_m^k) + \omega_n^k p_1(\omega_m^k)}{2}, \tag{19}$$

$$g_{k+m} = p(\omega_n^{k+m}) = \frac{p_0(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+m} p_1(\omega_n^{2k+n})}{2} = \frac{p_0(\omega_m^k) - \omega_n^k p_1(\omega_m^k)}{2}.$$

$p(z)$ 的求值问题可划分成两个子问题解决, 即 $p_0(z)$ 和 $p_1(z)$ 的求值问题.

§9.4.3 快速傅立叶变换

假设 n 是 2 的幂次方，反复应用上述策略，快速傅立叶算法.

Algorithm 9.1 Fast Fourier Transform Algorithm

function FFT(**f**)
  $n \leftarrow length[\mathbf{f}]$; ▷ n is a power of 2
  if $n = 1$ **then return f**;
  $\omega_n \leftarrow e^{-i2\pi/n}$;
  $\omega \leftarrow 1$;
  $\mathbf{f}^0 \leftarrow (f_0, f_2, \cdots, f_{n-2})$;
  $\mathbf{f}^1 \leftarrow (f_1, f_3, \cdots, f_{n-1})$;
  $\mathbf{g}^0 \leftarrow \mathrm{FFT}(\mathbf{f}^0)$; ▷ Apply FFT to even coefficients
  $\mathbf{g}^1 \leftarrow \mathrm{FFT}(\mathbf{f}^1)$; ▷ Apply FFT to odd coefficients
  for $k \leftarrow 0$ to $n/2 - 1$ **do**
    $g_k \leftarrow (\mathbf{g}_k^0 + \omega \mathbf{g}_k^1)/2$; ▷ Synthesize coefficients using Eq. (9.26)
    $g_{k+n/2} \leftarrow (\mathbf{g}_k^0 - \omega \mathbf{g}_k^1)/2$;
    $\omega \leftarrow \omega\omega_n$;
  end for
  return g;
end function

§9.4.3 快速傅立叶变换

假设 $n = 2^h$, 记 $C[n]$ 是计算具有 n 个分量的向量 $\mathbf{f}$ 的离散傅立叶变换所需的运算次数, 可以证明:

$$C[n] \leqslant 4 \cdot 2^h h = 4n \log_2(n),$$

即快速傅立叶变换算法的**时间复杂度**为 $O(n \log n)$.

$$g_l = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\mathrm{i}2\pi lk/n}, \quad l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

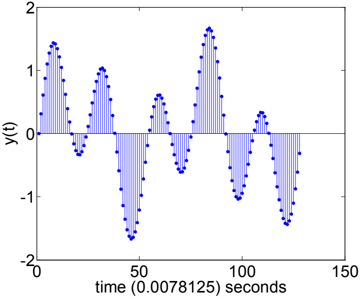
$\omega_n = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 多项式 $p(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k$, 则

$$g_l = p(\omega_n^l), \quad l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

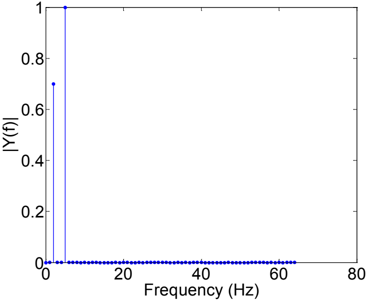
$$p(z) = \frac{p_0(z^2) + z p_1(z^2)}{2}$$

例 9.11

$$f(t) = 0.7\sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t)$$



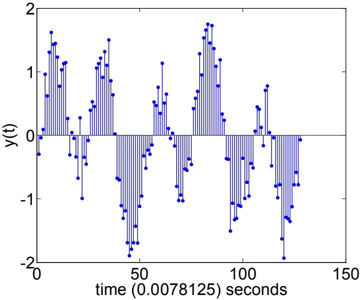
(a) 时间域上的输入信号



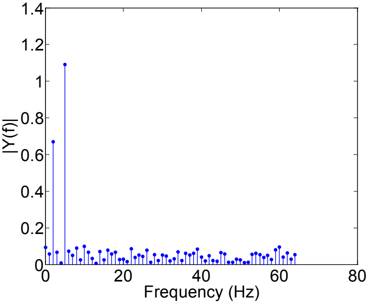
(b) 频率域上的能量分布

例 9.12

$$f(t) = 0.7\sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t) + \text{噪音}$$



(c) 时间域上的输入信号



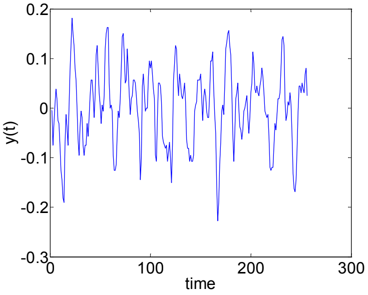
(d) 频率域上的能量分布

§9.4.3 快速傅立叶变换

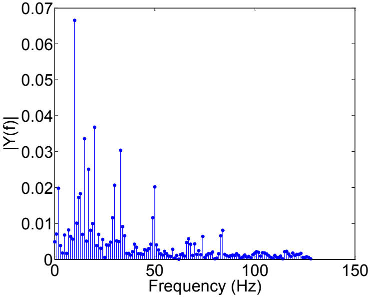
例 9.13

信号的去噪与重建

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{i2\pi jk/n}$$



(e) 时间域上的输入信号



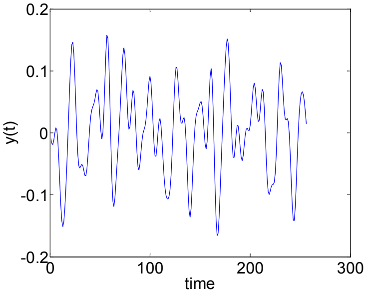
(f) 频率域上的能量分布

§9.4.3 快速傅立叶变换

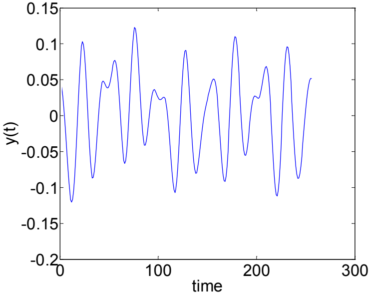
例 9.13

信号的去噪与重建

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$



(g) 重建信号，使用前 25% 的系数



(h) 重建信号，使用前 12.5% 的系数