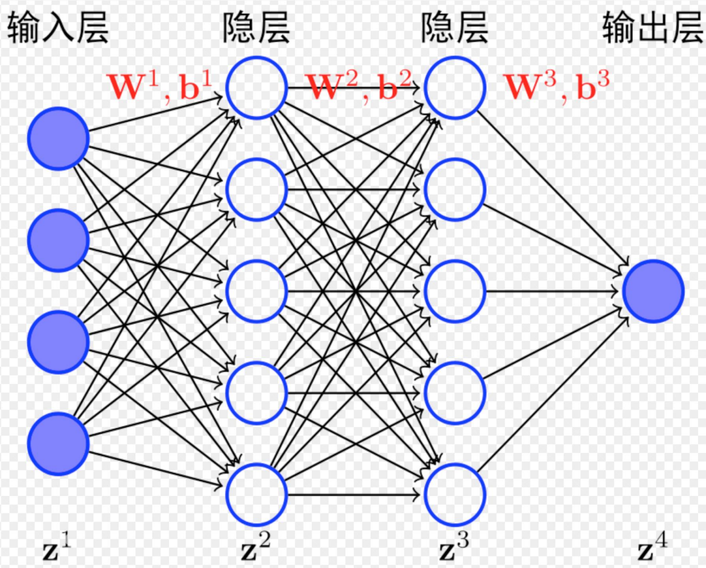
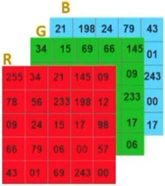
计算方法

第十章最优化方法

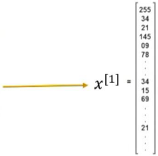

输入层
隐层
隐层
输出层
$\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1$
$\mathbf{W}^2, \mathbf{b}^2$
$\mathbf{W}^3, \mathbf{b}^3$
$\mathbf{z}^1$
$\mathbf{z}^2$
$\mathbf{z}^3$
$\mathbf{z}^4$

卷积神经网络

1.为什么使用卷积神经网络?

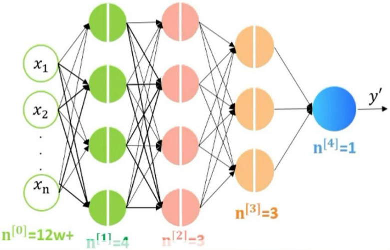


~~尺寸:（5，5，3）~~



202x206x3=124836

W矩阵的维度：$n^{[1]}*n^{[0]}=4*12w$



最优化方法

最优化方法

研究求解数学问题最优解的学科，即**对于给定的实际问题，从众多的解中选取最优的解**. 从数学意义上说，**最优化方法**是**一种求函数极值的方法**，即**在一组条件为等式或不等式的约束下，使选定的目标函数达到极值**，即**最大值**或**最小值**.

最优化方法

最优化方法

研究求解数学问题最优解的学科，即对于给定的实际问题，从众多的解中选取最优的解. 从数学意义上说，**最优化方法**是**一种求函数极值的方法**，即在一组条件为等式或不等式的约束下，使选定的目标函数达到极值，即**最大值**或**最小值**.

“ **根据给定条件和目标，从众多方案中选择最佳方案** ”

最优化方法

最优化方法

研究求解数学问题最优解的学科，即对于给定的实际问题，从众多的解中选取最优的解. 从数学意义上说，**最优化方法**是一种求函数极值的方法，即在一组条件为等式或不等式的约束下，使选定的目标函数达到极值，即**最大值**或**最小值**.

最优化问题

上下班如何规划乘车路线，才能快速又经济地到达公司；旅游中如何选择航班和宾馆，既省钱又能玩得开心.

最优化方法

研究内容

最优化**模型的建立、分析、求解及应用**，譬如最优解的条件或标准，**求解的算法**，以及**收敛性、时间复杂度分析**等. 属于**计算数学**，**管 理 科 学 (运筹学)**，**系统工程**等领域.

应用领域

随着计算机的快速发展和普及，**最优化方法**在**经济规划**、**工程设计**、**生产管理**、**交通运输**、**国防安全**等领域得到了广泛的应用，发挥着越来越重要的作用.

最优化方法

古老的极值问题，例如**阿基米德** (Archimedes) 证明：**给定周长，圆所包围的面积为最大，这是欧洲古代城堡几乎都建成圆形的原因之一**.

最优化方法成为一门独立的学科是在第二次世界大战前后，由于军事上的需要以及科学技术和生产的迅速发展，许多实际的最优化问题已经无法用古典方法来解决，从而促进了近代最优化方法的产生.

最优化方法

具有**代表性的工作**有: 以美国的丹齐格 (Dantzig) 和苏联的康托罗维奇 (Kantorovich) 为代表的**线性规划**; 以美国的库恩 (Kuhn) 和塔克尔 (Tucker) 为代表的**非线性规划**; 以美国的贝尔曼 (Bellman) 为代表的**动态规划**; 以苏联的庞特里亚金 (Pontryagin) 为代表的**极大值原理**等, 这些方法后来都形成体系, 成为很活跃的领域.

近些年来在实际应用的驱动下, 譬如**信号处理**, **机器学习**, **推荐系统**, **无人驾驶**等, **凸优化**, **非光滑优化**, **整数规划**等得到了深入的研究.

§10.1.1 线性规划问题

在生产管理和经营活动中，经常会遇到一类问题：**如何合理利用有限的人力、物力、财力等资源，以取到最佳的经济效益**.

例 10.1

某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品，已知生产每种单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原材料的消耗，如表10.1所示.

产品	产品 I	产品 II	现有资源
设备	4 台时/件	2 台时/件	18 台时
原材料 A	4 kg/件	1 kg/件	16 kg
原材料 B	1 kg/件	3 kg/件	12 kg

该工厂每生产一件 I 产品可获利 2 元，每生产一件 II 产品可获利 5 元，问应该**如何安排计划使该工厂获利最多**?

将其数学模型重写如下:

$$\max z = 2x_1 + 5x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, & \text{(1a)} \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, & \text{(1b)} \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, & \text{(1c)} \\ x_1, x_2 \geqslant 0. & \text{(1d)} \end{cases}$$

§10.1.1 线性规划问题

例 10.2

生产某汽车需要用 I、II、III 三种规格的轴各一根，长度规格分别为 1.5、1、0.7 米，它们需要用一种圆钢来制作，圆钢的长度为 4 米．现在要制造 1000 辆这种类型的汽车，问至少需要多少根圆钢以满足生产需求？

解 圆钢的长度是 4 米, I、II、III 轴的长度分别为 1.5、1、0.7 米, 因此, 在不浪费材料的前提下, 可有以下不同的切法:

切法	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
I	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
II	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0
III	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5

解 圆钢的长度是 4 米, I、II、III 轴的长度分别为 1.5、1、0.7 米, 因此, 在不浪费材料的前提下, 可有以下不同的切法:

切法	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
I	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
II	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0
III	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5

若将这些不同的切法 $\{x_i\}_{i=1}^{10}$ 的数量设为变量, 用 z 表示圆钢的总数, 则 $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$, 问题的数学模型可表示为

目标函数 $\quad \min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$

约束条件
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 1000, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 \geqslant 1000, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_7 + 2x_8 + 4x_9 + 5x_{10} \geqslant 1000, \\ x_1, x_2, \cdots, x_{10} \geqslant 0. \end{cases}$$

§10.1.2 数学模型

最优化问题的**数学模型**由三个要素组成:

(1) **变量**或称**决策变量**, 即问题中要优化的未知量, 用于描述问题中用数量表示的方案、措施等, 其值可由决策者控制和确定;

(2) **目标函数**, 即**决策变量的函数**, 按优化目标在这个函数前加上 max 或 min, 表示对目标函数**求最大值或最小值**;

(3) **约束条件**, 即刻画决策变量取值时受到的各种资源条件的限制, 通常表示为**含决策变量函数的等式或不等式**.

§10.1.2 数学模型

如果在优化问题的数学模型中，**决策变量的取值是连续的**，**目标函数是决策变量的线性函数**，**约束条件是含决策变量的线性等式或不等式**，则称它为**线性规划问题**，其一般的形式为

$$
\max(\min)\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,
$$

$$
\text{s. t.} \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2, \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m, \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0.
\end{cases}
$$

§10.1.2 数学模型

或简写为

$$\max(\min)\, z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, \\ x_i \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. \end{cases}$$

§10.1.2 数学模型

在实际问题中，线性规划模型是建立在以下假设基础之上的:

(1) **比例性**，指每个决策变量 x_j 在约束条件中和在目标函数中数值变化时，按 x_j 对应的系数 a_{ij} 与价值系数 c_j 严格的成比例变化;

(2) **可加性**，指目标函数的总值是各项组成部分值 $c_i x_i$ 之和; 第 i 个约束关系式中各组成部分值之和就是第 i 项资源需求总量. 决策变量是相互独立的，不发生关联，且不允许有交叉;

(3) **可分性**，即模型中的变量可以取小数、分数或某一实数;

(4) **确定性**，即模型中的参数均为确定的常数.

然而，有些实际问题不符合上述条件，例如每件产品售价 3 元，但批量采购的话，可以打七折. 对于这类不符合线性的条件，在一些合理的假设下，有时可看作近似满足线性条件，也可用线性规划来建模.

§10.2.1 图解法

定义 10.1

称线性规划问题**有解**, 是指能找到一组值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ **满足所有约束条件**; 否则, 称该问题*无解*. **任意一个满足约束条件的解** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都称为该线性规划问题的一个**可行解**. **全部可行解构成的集合**称为 ***可行域***. 在可行域中**使目标函数值达到最优的可行解**称为 ***最优解***.

§10.2.1 图解法

当线性规划模型中只含 2 个变量时，问题具有明显的几何意义，可通过在平面上作图的方法求解，称为**图解法**.

图解法的基本步骤如下：在平面上**建立直角坐标系**；**图示约束条件**，判别是否存在可行域，如果存在，则**找出可行域**；**图示目标函数，寻找最优解**.

§10.2.1 图解法

下面通过例10.1来作具体说明. 先将其数学模型重写如下:

$$\max z = 2x_1 + 5x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, & \text{(1a)} \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, & \text{(1b)} \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, & \text{(1c)} \\ x_1, x_2 \geqslant 0. & \text{(1d)} \end{cases}$$

§10.2.1 图解法

(1) 以 x_1 为横坐标轴, x_2 为纵坐标轴, 适当选取坐标长度的单位, 建立平面直角坐标系. 由变量的非负约束条件(1d)知, 满足该条件的解均在第 I 象限内.

(2) 依据约束条件, 找出可行域. 约束条件(1a)表示含直线 $4x_1+2x_2=18$ 上的点及其左下方的半平面, 约束条件(1b)、(1c)的含义类似. 同时满足(1a)-(1d)的点构成该线性规划问题的可行域, 如图1所示, 即凸多边形 $OP_1P_2P_3P_4$.

(3) 图示目标函数. 随着 z 的变化, 方程 $z=2x_1+5x_2$ 表示斜率为 $-2/5$ 的一族平行直线, 见图1.

(4) 确定最优解. 因为最优解是可行域中使目标函数值 z 达到最大值的点, 从图1中可看出, 当代表目标函数的那条直线由原点开始向右上方移动时, z 的值逐渐增大, 一直**移动目标函数的直线, 直到与约束条件确定的凸多边形相切时停止**, 切点所在的位置即为最优解.

§10.2.1 图解法

$$\max z = 2x_1 + 5x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, & \text{(1a)} \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, & \text{(1b)} \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, & \text{(1c)} \\ x_1, x_2 \geqslant 0. & \text{(1d)} \end{cases}$$

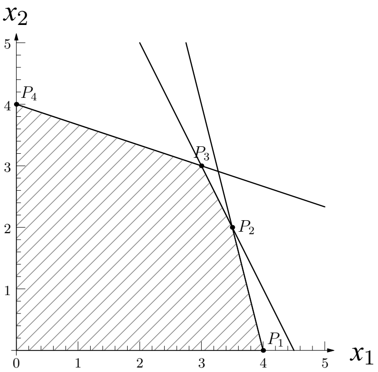


Figure: 图解法

§10.2.1 图解法

$$\max z = 2x_1 + 5x_2,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, & \text{(1a)} \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, & \text{(1b)} \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, & \text{(1c)} \\ x_1, x_2 \geqslant 0. & \text{(1d)} \end{cases}$$

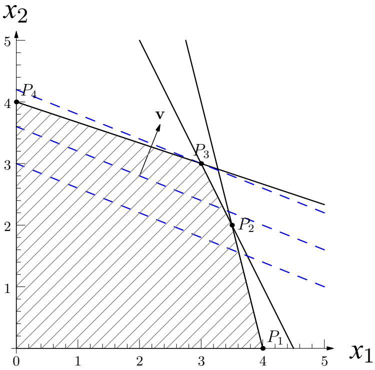


Figure: 图解法

§10.2.1 图解法

不难看出，此问题的最优解是唯一．但是，对于一般的线性规划问题来说，还**可能出现下列的情况**:

(1) 无穷多最优解．若将目标函数换成 $z = x_1 + 3x_2$，则目标函数的直线族与约束条件(1c)平行，此时线段 P_3P_4 上所有的点都是最优解，即有无穷多最优解．

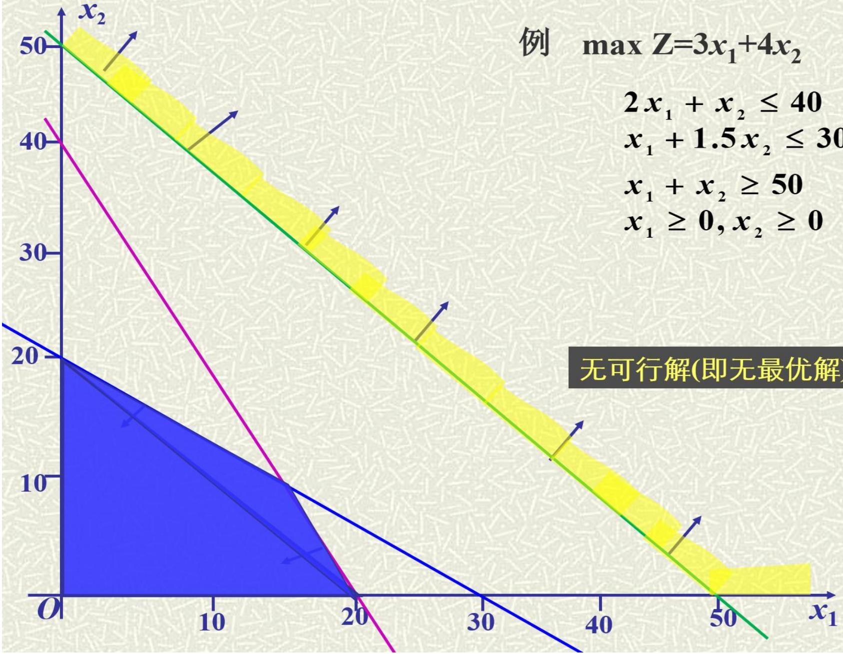
(2) 无界解．若将约束条件(1a)-(1c)换成 $4x_1 \leqslant 18$，则可行域是无穷区域，即变量 x_2 的取值可无限增大，此时目标函数值也可无限增大，即最优解无界．

(3) 无解，或无可行解．若将约束条件(1a)换成 $4x_1 + 2x_2 \geqslant 24$，则**不存在满足所有约束条件的公共区域**，**可行域是空集**，即无解．

当求解结果出现无界解或无解情况时，一般来说是线性规划问题的数学模型有错误，前者缺乏必要的约束条件，后者存在矛盾的约束条件，需重新建模．

例 $\max Z=3x_1+4x_2$

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \le 40 \\
x_1 + 1.5x_2 \le 30 \\
x_1 + x_2 \ge 50 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

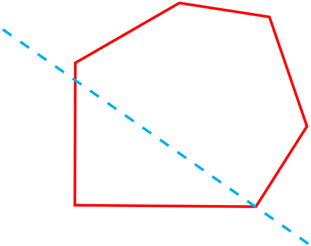


无可行解(即无最优解)

§10.2.1 图解法

图解法仅能用于求解具有两个变量的线性规划问题, 但是它为求解一般线性规划问题提供了一些启示:

(1) 若线性规划问题的可行域存在, 则**可行域是凸集**.
(2) 若线性规划问题的**最优解存在**, 则**最优解或最优解之一** **(有无穷多解时)** **是可行域的某个顶点**.

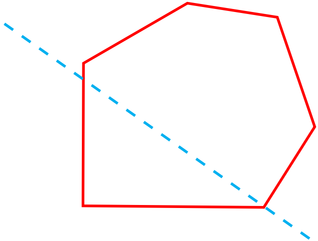


二十世纪十大优秀算法 (SIAM News, 2000)

1. Monte Carlo method (1946)
2. Simplex Method for Linear Programming (1947)
3. **Krylov Subspace Iteration Methods** (1950)
4. **The Decompositional Approach to Matrix Computations** (1951)
5. The Fortran Optimizing Compiler (1957)
6. **QR Algorithm for Computing Eigenvalues** (1959-61)
7. Quicksort Algorithm for Sorting (1962)
8. Fast Fourier Transform (1965)
9. Integer Relation Detection Algorithm (1977)
10. Fast Multipole Method (1987)

The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, B. A. Cipra, SIAM News, 2000.

§10.2.1 图解法



单纯形法的*基本思路*: **先找出可行域的任一顶点**, 计算在该顶点处的目标函数值, 检查周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值大, 如果是否, 则它就是最优解的点或最优解的点之一; 否则, 转到比这个点的目标函数值更大的另一顶点. 重复上述过程, **直至找到使目标函数值达到最大的顶点为止**.

§10.2.2 标准形式

因目标函数和约束条件内容和形式上的差别，**线性规划问题的表示形式是多种多样的**．因此，为便于后续方法的描述，有必要规定线性规划问题的**标准形式**:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, & \text{(3a)} \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. & \text{(3b)} \end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值**，**约束条件全为等式**，**约束条件右端常数项 b_i 全为非负值**，**变量 x_j 均取非负值**.

§10.2.2 标准形式

因目标函数和约束条件内容和形式上的差别，**线性规划问题的表示形式是多种多样的**．因此，为便于后续方法的描述，有必要规定线性规划问题的**标准形式**:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, & (3a) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. & (3b) \end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值，约束条件全为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 均取非负值**.

化标准形

目标函数的转换

如果是求极小值，即 $\min z = \sum c_j x_j$，则可将目标函数乘以(-1)，可化为求极大值问题。

即 $\max z' = -z = -\sum c_j x_j$

也就是：令 $z' = -z$，可得到上式。

变量的变换

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j = x_j' - x_j''$

其中：$x_j', x_j'' \geq 0$

- 约束条件的转换：由不等式转换为等式。

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \longrightarrow \sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为松弛变量

$$\sum a_{ij}x_j \ge b_i \longrightarrow \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为松弛变量

- 变量 $x_j \le 0$ 的变换

可令 $x_j' = -x_j$，显然 $x_j' \ge 0$

§10.2.2 标准形式

对于不符合标准形式的线性规划问题，可通过下列变换进行转化:

(1) 若目标函数为求极小值，即 $\min z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$，可令 $\tilde{z} = -z$，则原问题可化为 $\max \tilde{z} = \left(-\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$，这就与标准形式中的目标函数一致了;

(2) 若约束条件是不等式，有两种情况：一种是约束方程为 "$\leqslant$" 不等式，可在不等式的**左端加入一个非负变量**；另一种是约束方程为 "$\geqslant$" 不等式，可**在不等式的左端减去一个非负变量**，新加入的变量称为**松弛变量**，则可将不等式约束化为等式约束.

(3) 若约束条件的右端项 $b_i < 0$，可将等式两端乘以"-1"，则等式右端项必大于零;

(4) 若约束条件 $x_k \leqslant 0$，可令 $x_{k+1} = -x_k$，则化为约束条件 $x_{k+1} \geqslant 0$;

(5) 若存在取值无约束的变量 x_k，可令 $x_k = x_{k+1} - x_{k+2}$，则化为约束条件 $x_{k+1}, x_{k+2} \geqslant 0$.

不难证明，**任何形式的线性规划问题都可以化为标准形式**.

化标准形

例 10.3 将下列线性规划问题化为标准形式

$$\min\ z = x_1 - 4x_2 + x_3,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{无约束} \end{cases}$$

解 按下列步骤进行变换:

(1) 用 $-x_1$ 代替 x_1;

(2) 用 $x_4 - x_5$ 替换 x_3, 其中 $x_4, x_5 \geqslant 0$;

(3) 在第一个约束不等式 $\geqslant$ 号的左端减去松弛变量 x_6;

(4) 在第二个约束不等式 $\leqslant$ 号的左端加上松弛变量 x_7;

(5) 在第三个约束的两端都乘以 -1;

(6) 令 $\tilde{z} = -z$, 将求 $\min z$ 化为求 $\max \tilde{z}$,

标准形式

$$\max\ \tilde{z} = x_1 + 4x_2 - (x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2(x_4 - x_5) - x_6 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 - (x_4 - x_5) + x_7 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + (x_4 - x_5) = 1, \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{cases}$$

§10.2.2 标准形式

标准形

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, & (3a) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. & (3b) \end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值**，**约束条件全为等式**，**约束条件右端常数项 b_i 全为非负值**，**变量 x_j 均取非负值**.

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.2

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为等式约束条件(3a)的系数矩阵, 其中 $m<n$, $\mathrm{rank}(A)=m$. 若 B 是 A 的一个 $m\times m$ 满秩子矩阵, 则称 B 是线性规划问题的一组基. 不失一般性, 可设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m),$$

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.2

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为等式约束条件(3a)的系数矩阵，其中 $m<n$，$\text{rank}(A)=m$. 若 B 是 A 的一个 $m\times m$ 满秩子矩阵，则称 B 是线性规划问题的一组**基**. 不失一般性，可设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m),$$

其中 B 中的每一个列向量 $\mathbf{p}_j$ **称为基向量**，与基向量 $\mathbf{p}_j$ 对于的变量 x_j **称为基变量**. 线性规划问题中除**基变量以外的变量称为非基变量**.

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.3

在等式约束条件(3a)中，若令所有非基变量

$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，又因 $\det(B) \neq 0$，知由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$. 将这个解加上非基变量均取 0 的值，有

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，称 $\mathbf{x}$ 为线性规划问题的**基解**.

满足所有等式约束且非基变量全取0的

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.3

在等式约束条件(3a)中，若令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，又因 $\det(B)\neq 0$，知由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\mathbf{x}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$. 将这个解加上非基变量取 0 的值，有

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T,$$ 称 $\mathbf{x}$ 为线性规划问题的**基解**.

满足所有等式约束且非基变量全取0的

满足所有等式约束(3a)及非负约束(3b)的解称为**可行解**.

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.3

在等式约束条件(3a)中，若令所有非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，又因 $\det(B) \neq 0$，知由 m 个约束方程可解出 m 个基变量的唯一解 $\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$. 将这个解加上非基变量取 0 的值，有

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},$$ 称 $\mathbf{x}$ 为线性规划问题的**基解**.

注意，**在线性规划问题求解过程中**，**基是可以变化**的，此时**基向量，基变量，基解等也随之变化**.

容易看出，在基解中变量取非零值的个数不大于方程个数 m，故**基解的总数不超过** $\binom{n}{m}$.

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

回 顾 标准形

线性规划问题的**标准形式**

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, & (3a) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. & (3b) \end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值**，**约束条件全为等式**，**约束条件右端常数项 b_i 全为非负值**，**变量 x_j 均取非负值**.

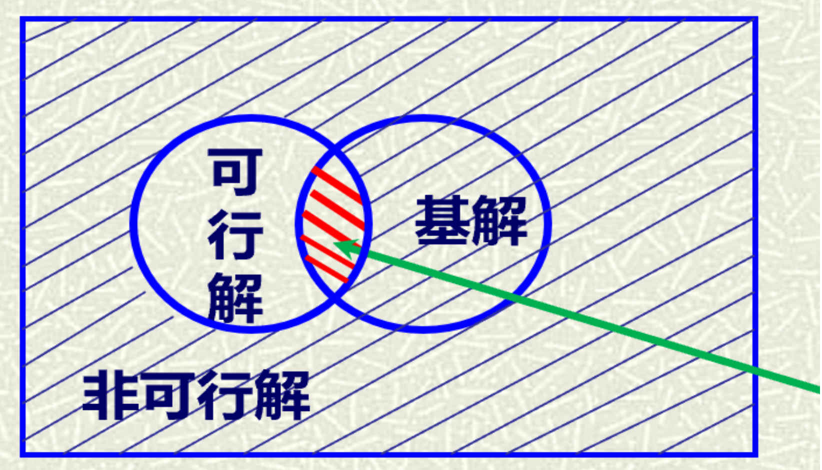
§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.4

满足**非负约束条件**(3b)**的基解**称为**基可行解**.

定义 10.5

与基可行解对应的基称为**可行基**.


可
行
解
基解
非可行解

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.6

设 C 是 n 维欧式空间的一个点集, 若对任意的 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, 均有

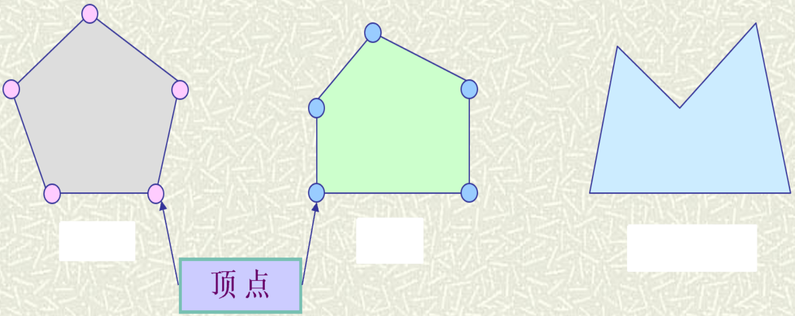
$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in C, \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

即 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 连线上的所有点也都在 C 中, 则称 C 是**凸集**.

从直观上看, 凸集没有凹入部分, 其内部没有空洞. 实心圆, 实心球体, 实心立方体等都是凸集, 而圆环就不是凸集.

任何两个凸集的交集是凸集.

凸集：如果集合C中任意两个点X1、X2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，称C为凸集。



§10.2.3 基本概念及定理

定义 10.7

设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ 是 n 维欧式空间中的点，若存在实数 $0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \leqslant 1$，且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$，使

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k,$$

则称 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ 的**凸组合**.
当 $0 < \lambda_i < 1 \, (i = 1, 2, \cdots, k)$ 时，称为**严格凸组合**.

计算方法

§10.2.3 基本概念及定理

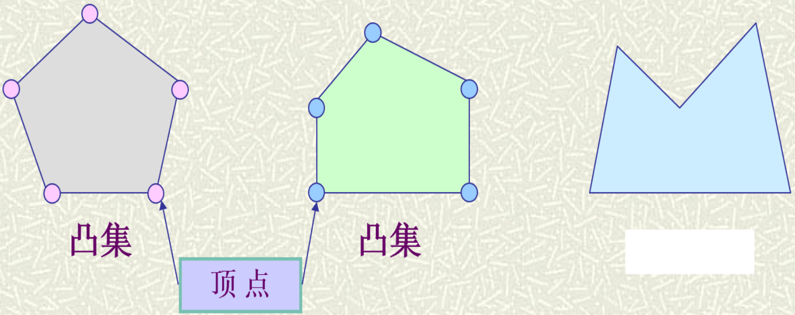
定义 10.8

设 C 是 n 维欧式空间的一个**凸集**, 点 $\mathbf{x} \in C$, 若不存在不同的两点 $\mathbf{x}_1 \in C$ 和 $\mathbf{x}_2 \in C$ 使得

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad 0 < \lambda < 1,$$

成立, 则称 $\mathbf{x}$ 是 C 的一个**顶点**或**极点**.

凸集：如果集合C中任意两个点X1、X2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，称C为凸集。



§10.2.3 基本概念及定理

定理 10.1

若线性规划问题的**可行域**存在，则它**是凸集**.

引理 10.1

线性规划问题的可行解 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为**基可行解**的充要条件是 x 的正分量**所对应的系数列向量是线性无关的**.

§10.2.3 基本概念及定理

定理 10.1

若线性规划问题的可行域存在，则它是凸集.

引理 10.1

线性规划问题的可行解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 $\mathbf{x}$ 的正分量所对应的系数列向量是线性无关的.

定理 10.2

线性规划问题的基可行解对应于可行域的顶点.

定理 10.2

线性规划问题的基可行解对应于可行域的顶点.

§10.2.3 基本概念及定理

x不是基可行解　　　　x不是可行域的顶点

定理 10.3

若线性规划问题的可行域有界,则必存在一个基可行解是最优解.

§10.2.3 基本概念及定理

定理 10.3

若线性规划问题的可行域有界,则必存在一个基可行解是最优解.

如果目标函数在多个顶点达到最大值, 那么在这些顶点的凸组合上也达到最大值, 此时线性规划问题有无穷多最优解.

若可行域无界,则可能无最优解,也可能有最优解.

若有最优解,则也必在某顶点上取到.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

若线性规划问题有最优解,则必可在某顶点上取到. 又因可行域的顶点数是有限的, 若采用**枚举法**找出所有基可行解, 总数不超过 $\binom{n}{m}$, 则通过比较可找到最优解.

当n,m的值较大时,该方法的时间复杂度迅速增加, 不能满足实际应用的需求.

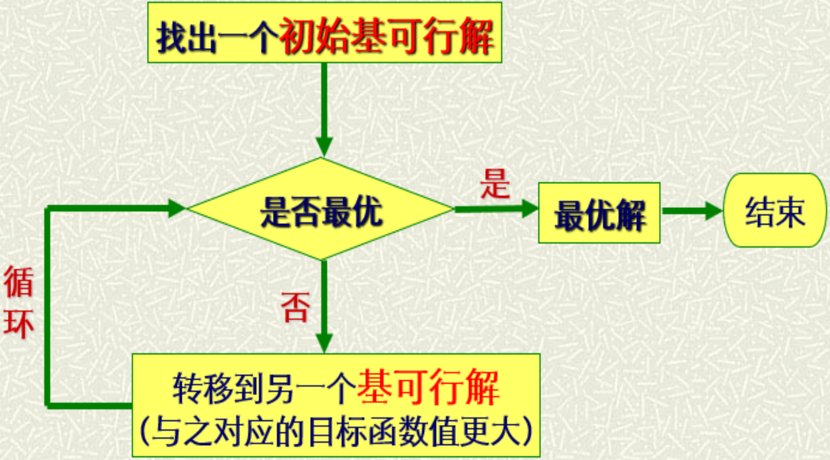
一般地, 在线性规划问题的等式约束条件(3a)中, **方程组中的变量数大于方程的个数**, 即 $n > m$, **方程组有无穷多解**. 结合非负约束条件(3b), 线性规划问题的可行域常构成 $\mathbb{R}^n$ 中的**多面体**, 它由一系列**单纯形**组合而成.

在 n 维欧式空间中, **零维的单纯形是点**, **一维的单纯形是线段**, **二维的单纯形是三角形**, **三维的单纯形是四面体**, k **维的单纯形是有** $k+1$ **个顶点的多面体**.

§10.3.1 迭代原理

单纯形法采用迭代的策略, **基本思路**为: **先找出一个基可行解**, **判断其是否为最优解**, 若为否, 则转换到**相邻的基可行解**, **并使目标函数值不断增大**, **一直找到最优解为止**.

单纯形法的思路



线性规划的标准形式

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{3}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots m, & (3a) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots n. & (3b) \end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值**，约束条件全为等式，**约束条件右端**常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 均取非负值.

§10.3.1 迭代原理

1. 确定初始**基可行解**.

   对标准形式的线性规划问题，在等式约束条件(3a)中，不失一般性，总**存在一个由单位阵构成的基**，即

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   令等式约束条件(3a)中所有非基变量等于零，可找到一个解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$. 又因 $b_i \geqslant 0$，故 $\mathbf{x}$ 满足不等式约束条件(3b)，是一个**基可行解**.

§10.3.1 迭代原理

2. **从一个基可行解转换为相邻的基可行解**.

设初始基可行解中的前 m 个为基变量, 即

$\mathbf{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, 其中

$x_i^0\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$. 等式约束条件(3a) 可写成增广矩阵的形式:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)\\
\begin{array}{cccccccccc}
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow\\
\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_m & \mathbf{p}_{m+1} & \cdots & \mathbf{p}_j & \cdots & \mathbf{p}_n & \mathbf{b}
\end{array}\end{array}$$

§10.3.1 迭代原理

由基可行解的定义，知

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^0 \mathbf{p}_i = \mathbf{b}.$$

又因 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_m$ 构成一组基，故向量 $\mathbf{p}_j$ 可表示为

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{p}_i.$$

对任意的 $\lambda > 0$，从而有

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^0 \mathbf{p}_i + \lambda\Big(\mathbf{p}_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{p}_i\Big) = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (x_i^0 - \lambda a_{ij}) \mathbf{p}_i + \lambda \mathbf{p}_j = \mathbf{b}.$$

§10.3.1 迭代原理

若记

$\mathbf{x}^1 = (x_1^0 - \lambda a_{1j}, x_2^0 - \lambda a_{2j}, \cdots, x_m^0 - \lambda a_{mj}, 0, \cdots, \lambda, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$,
显然 $\mathbf{x}^1$ 也满足等式约束条件(3a). 要使 $\mathbf{x}^1$ 成为一个基可行解, 则 λ 需满足

$$x_i^0 - \lambda a_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

且其中至少有一个不等式取到等号. 显然, 当 $a_{ij} \leqslant 0$ 时, 上述不等式对 $\lambda > 0$ 总成立. 若取

$$\lambda = \min_i \left\{ \frac{x_i^0}{a_{ij}} \,\middle|\, a_{ij} > 0 \right\} = \frac{x_l^0}{a_{lj}},$$

容易验证 $\mathbf{x}^1$ 是一个基可行解.

§10.3.1 迭代原理

将变量 $x_1, \cdots, x_{l-1}, x_j, x_{l+1}, \cdots, x_m$ 对应的向量和 $\mathbf{b}$ 写成增广矩阵的形式:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2j} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{l-1,j} & 0 & \cdots & 0 & b_{l-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l,j} & 0 & \cdots & 0 & b_l \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l+1,j} & 1 & \cdots & 0 & b_{l+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m,j} & 0 & \cdots & 1 & b_m
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccccc}
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_{l-1} & \mathbf{p}_j & \mathbf{p}_{l+1} & \cdots & \mathbf{p}_m & \mathbf{b}
\end{array}
\end{array}
$$

§10.3.1 迭代原理

因 $a_{lj} > 0$, 故 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_{l-1}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{l+1}, \cdots, \mathbf{p}_m$ 构成一组基. 对上述增广矩阵施行初等行变换: 第 l 行乘以 $(1/a_{lj})$, 再分别乘以 $(-a_{ij})$ 加到第 i 行上去, $i = 1, \cdots, l-1, l+1, \cdots, m$, 得变换后的向量 $\mathbf{b} = (b_1 - \lambda a_{1j}, \cdots, b_{l-1} - \lambda a_{l-1,j}, \lambda, b_{l+1} - \lambda a_{l+1,j}, \cdots, b_m - \lambda a_{mj})^{\mathrm{T}}$. 明显地, $\mathbf{x}^1$ 是与 $\mathbf{x}^0$ 相邻的一个基可行解, 且相应基向量组成的矩阵仍是单位阵.

§10.3.1 迭代原理

3. **最优性检验**和**解的判断**.
将基可行解 $\mathbf{x}^0$ 和 $\mathbf{x}^1$ 分别代入目标函数(3)得

$$z^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0,$$

$$z^1 = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i^0 - \lambda a_{ij}) + \lambda c_j = z^0 + \lambda\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right).$$

又因 $\lambda > 0$, 故当 $c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} > 0$ 时, 就有 $z^1 > z^0$. 若记 $\boxed{\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}}$ 则 σ_j 可用作线性规划问题的解进行**最优性检验的指标**.

§10.3.1 迭代原理

具体的判别规则如下:

(a) 当所有的 $\sigma_j \leqslant 0$ 时, **现有基可行解的目标函数值比起相邻各基可行解的目标函数值都大**, 又因**可行域是凸集**, 故该基可行解是**最优解**.

(b) 当所有的 $\sigma_j \leqslant 0$, 且**存在某个非基变量** x_k, 使得 $\sigma_k = 0$, 这意味着可以找到另外一个基可行解使目标函数值取到最大值, 从而它们之间连线上的点也都取到最大值, 故线性规划问题存在**无穷多解**. 反之, **当所有非基变量的 $\sigma_j < 0$ 时**, 线性规划问题具**有唯一的最优解**.

(c) 当存在某个 $\sigma_j > 0$, 且 $\mathbf{p}_j \leqslant \mathbf{0}$, 这意味着对任意 $\lambda > 0$, 均有 $x_i^0 - \lambda a_{ij} \geqslant 0$, 而 λ 的取值可无限增大, z^1 的值也可无限增大, 故线性规划问题**有无界解**.

对求解结果为无可行解的判别将在后面讨论.

单纯形表

为检验**一个基可行解是否最优**, 需要将其目标函数值**与相邻基可行解的目标函数值进行比较**. 为了书写规范和便于计算, 下面引入一种称为**单纯形表**的表格:

单纯形表

为检验一个基可行解是否最优，需要将其目标函数值与相邻基可行解的目标函数值进行比较．为了书写规范和便于计算，下面引入一种称为**单纯形表**的表格：

标准形

$$\max z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{3}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,\cdots m, & \text{(3a)}\\ x_j\geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots n. & \text{(3b)}\end{cases}$$

在标准形式中，**目标函数为求极大值**，**约束条件全为等式**，**约束条件右端常数项 b_i 全为非负值**，**变量 x_j 均取非负值**．

单纯形表

为检验一个基可行解是否最优，需要将其目标函数值与相邻基可行解的目标函数值进行比较. 为了书写规范和便于计算，下面引入一种称为**单纯形表**的表格:

$c_j \to$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
σ_j			0	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$	$\cdots$	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$

单纯形表

其中

- $\mathbf{x_B}$ 列中填入基变量，这里是 $x_1, x_2, \cdots, x_m$；
- $\mathbf{c_B}$ 列中填入目标函数中基变量的相应系数，这里是 $c_1, c_2, \cdots, c_m$；
- $\mathbf{b}$ 列中填入等式约束方程组右端的常数；
- x_j 列中填入等式约束中变量 x_j 对应的系数向量；
- c_j 行中填入目标函数中变量 x_j 的相应系数；
- σ_j 行中填入**非基变量** x_j 的**检验指标** $c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$.

在迭代计算过程中，**每找出一个新的基可行解时，就重新建立一张单纯形表**.

计算实例

例 10.4

用单纯形法解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18, \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

转换化为标准形式:

$$\max z = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

写成增广矩阵形式:

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 18 \\
4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 12
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 & \mathbf{p}_5 & \mathbf{b}
\end{array}
\end{array}$$

基变量

非基变量

初始基可行解

转换化为标准形式:

$$\max z = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x	18	4	2	1	0	0
	x	16	4	1	0	1	0
	x	12	1	3	0	0	1
σ_j							

指标

			c	c	c	c	c
$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	18	4	2	1	0	0
0	x_4	16	4	1	0	1	0
0	x_5	12	1	3	0	0	1
σ_j			2	5			

非基指标最大且正者　基

比值最小且正者　基

$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	18	4	2	1	0	0
0	x_4	16	4	1	0	1	0
	x	12	1	[3]	0	0	1
σ_j			2	5			

c c c c c

$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	10	10/3	0	1	0	-2/3
0	x_4	12	11/3	0	0	1	-1/3
	x	4	1/3	1	0	0	1/3
σ_j			1/3				-5/3

非基指标最大且正者　基

比值最小且正者　基

			c	c	c	c	c
$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	3/10	0	-1/5
0	x_4	1	0	0	-11/10	1	2/5
5	x_2	3	0	1	-1/10	0	2/5
σ_j			0	0	-1/10	0	-8/5

§10.3.2 计算步骤

单纯形法的**计算步骤**:

1. 根据线性规划模型的标准形式**确定初始可行基**和**初始基可行解**, **建立单纯形表**;
2. **计算各非基变量 x_k 的检验指标**

非基指标 $$\sigma_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik}, \quad k = m+1, m+2, \cdots, n.$$

   若 $\sigma_k \leqslant 0$ 对所有 $k = m+1, m+2, \cdots, n$ 成立, 则已得到最优解, 算法终止. 否则, 进入下一步.

3. 在 $\sigma_k > 0\,(m+1 \leqslant k \leqslant n)$ 中, 若有某个 σ_j 对应的 x_j 的系数向量 $\mathbf{p}_j \leqslant \mathbf{0}$, 则该线性规划问题**有无界解**, 算法终止. 否则, 进入下一步.

§10.3.2 计算步骤

4. 根据 $\max\{\sigma_k\} = \sigma_j$, 确定 x_j 为换入变量, 按公式
$$\lambda = \min_i \left\{ \frac{x_i^0}{a_{ij}} \,\middle|\, a_{ij} > 0 \right\} = \frac{x_l^0}{a_{lj}}$$
可确定 x_l 为换出变量;
5. 以 a_{lj} 为**主元素**, 对等式约束条件(3a)的增广矩阵施行初等行变换, 将变量 x_j 对应的列向量
$$\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 行},$$
并将 $\mathbf{x_B}$ 列中的 x_l 换为 x_j, 建立新的单纯形表.
6. 重复上述步骤 2-5, 直至算法终止.

初始基可行解

$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	18	4	2	1	0	0
0	x_4	16	4	1	0	1	0
0	x_5	12	1	3	0	0	1
σ_j			2	5			

§10.3.2 计算步骤

单纯形法计算中的几个问题

- **初始基可行解**的寻找. 在前面, 曾假设在等式约束条件(3a)中存在一个**单位阵**构成的基, 以此求初始基可行解和建立初始单纯形表十分方便. 但是, 有化为标准形式后等式约束条件的系数矩阵中不存在子单位矩阵的例子. 对于这种情形, 可以采用**人工变量法**或**两阶段法**来处理.

§10.3.2 计算步骤

- **解的退化**. 在按最小比值 λ 来确定换出的基变量时, 可能会出现两个或以上相同的最小比值, 从而使下一个表的基可行解中出现一个或多个基变量等于零的退化解. 该现象出现的原因是模型中存在多余的约束, 使得多个基可行解对应于同一顶点. 当退化解出现时, 就可能出现迭代计算的无限循环, 尽管可能性极其微小. 为避免出现计算的循环, 可采用勃兰特 (Bland) 规则: (a) 当存在多个 $\sigma_j > 0$ 时, 始终选取下标最小的变量作为换入变量; (b) 当计算 λ 值出现两个或以上相同的最小值时, 始终选取下标最小的变量作为换出变量.

§10.3.2 计算步骤

- **无可行解的判别**. 当线性规划问题中添加**人工变量**后, 初始单纯形表中的解因含人工变量, 故实质上是非可行的. 当求解结果出现所有 $\sigma_j \leqslant 0$ 时, **若基变量中仍含有非零的人工变量**, 则表明该线性规划问题**无可行解**.

例 10.5 试用大 M 法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 通过增加松弛变量 x_4, x_5 将原线性规划问题转换化为标准形式，并添加人工变量x_6, x_7 可得

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3, \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	-2	1	1	0		
-4	1	2	0	-5		
-2	0	1	0	0		

解 通过增加松弛变量 x_4, x_5 将原线性规划问题转换化为标准形式，并添加人工变量x_6, x_7 可得

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3, \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			2	-1	-1	0	0	-M	-M
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0
-M	x_6	3	-4	1	2	0	-5	1	0
-M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1
σ_j			2-6M	-1+M	-1+3M	0	-5M	0	0

表 10.6: 初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1
$-M$	x_6	1	0	1	0	0	-5	1	-2
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1
σ_j			0	$-1+M$	0	0	$-5M$	0	$1-3M$

表 10.7: 第一次迭代的单纯形表

表10.8:第二次迭代的单纯形表

$c_j \rightarrow$			2	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	12	3	0	0	1	-10	2	-5
-1	x_2	1	0	1	0	0	-5	1	-2
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1
σ_j			0	0	0	0	-5	$1-M$	$-1-M$

例 10.6 试用两阶段法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

例 10.6 试用两阶段法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 通过增加松弛变量 x_4, x_5 将原线性规划问题转换化为标准形式，并添加人工变量x_6, x_7 可得第一阶段的线性规划问题

$$\min z = x_6 + x_7 \Longleftrightarrow \max \tilde{z} = -x_6 - x_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3, \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\max \tilde{z} = -x_6 - x_7$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	-1	-1
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	10	3	0	0	1	0	2	-1
0	x_2	1	0	1	0	0	-5	1	-2
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1
σ_j			0	0	0	0	0	0	0

第一阶段的最优解是 $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 10, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\max z = 2x_1 - x_2 - x_3$$

换目标（即换系数）

$c_j \rightarrow$			2	-1	-1	0	0
$\mathbf{c_B}$	$\mathbf{x_B}$	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	10	3	0	0	1	0
-1	x_2	1	0	1	0	0	-5
-1	x_3	1	-2	0	1	0	0
σ_j			0	0	0	0	-5

表 10.12: 第二阶段的初始单纯形表

§10.3.2 计算步骤

在实际应用中，尽管单纯形法非常有效，但在理论上，其算法时间复杂度仍是指数级别的．一个自然的问题是：能否找到算法时间复杂度更低的算法？在此驱动下，产生了 内点法，其算法时间复杂度是多项式级别的，是求解线性规划问题的另一有效方法．