习题课 1

陈文轩

2025 年 3 月 29 日

作业 1

作业 1 T1

对 $a > 0, n \in \mathbb{N}_+$，$x$ 很靠近 0，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：$f(x) = (a + x)^n - a^n$；

作业 1 T1

对 $a > 0, n \in \mathbb{N}_+$，$x$ 很靠近 0，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：$f(x) = (a + x)^n - a^n$;

$$
\begin{aligned}
f(x) = (a + x)^n - a^n &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k a^{n-k} \\
&= (\cdots((x + C_n^1 a)x + C_n^2 a^2)x \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1})x
\end{aligned}
$$

作业 1 T2

对 $a > 0$，x 很靠近 0，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：$f(x) = \cos(a - x) - \cos a$；

作业 1 T2

对 $a > 0$，x 很靠近 0，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：$f(x) = \cos(a - x) - \cos a$；

注意：$a - x$ 不一定靠近 0，所以不能直接作 Taylor 展开

作业 1 T2

对 $a > 0$，x 很靠近 0，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：$f(x) = \cos(a - x) - \cos a$；

注意：$a - x$ 不一定靠近 0，所以不能直接作 Taylor 展开

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(a - x) - \cos a = \cos a \cos x + \sin a \sin x - \cos a \\
&= \cos a(\cos x - 1) + \sin a \sin x \approx -\frac{1}{2}x^2 \cos a + x \sin a
\end{aligned}
$$

作业 1 T3

对 $x \gg a$，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：
$f(x) = \sqrt{x^2 + a} - x$;

作业 1 T3

对 $x \gg a$，给出 $f(x)$ 的可靠数值计算方法，使其尽量达到更好的精度：
$f(x) = \sqrt{x^2 + a} - x$;

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a} - x = \frac{x^2 + a - x^2}{\sqrt{x^2 + a} + x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x}$$

作业 1 T4

设有精确值 $x^* = 2023.0905$，则其近似值 $x_1 = 2023.090, x_2 = 2023.0900$ 分别有几位有效数字?

作业 1 T4

设有精确值 $x^* = 2023.0905$，则其近似值 $x_1 = 2023.090, x_2 = 2023.0900$ 分别有几位有效数字?

x_1, x_2 的误差均为 5×10^{-4}，x_1 有 7 位有效数字，x_2 有 7 位有效数字。

作业 2

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0] = 2.5, f[x_1] = 4, f[x_2] = 3.5, f[x_3] = 2;$

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商： $f[x_0]=2.5, f[x_1]=4, f[x_2]=3.5, f[x_3]=2;$
$f[x_0,x_1]=1.5, f[x_1,x_2]=-0.5, f[x_2,x_3]=-1;$

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0]=2.5, f[x_1]=4, f[x_2]=3.5, f[x_3]=2;$
$f[x_0,x_1]=1.5, f[x_1,x_2]=-0.5, f[x_2,x_3]=-1;$
$f[x_0,x_1,x_2]=-1, f[x_1,x_2,x_3]=-0.2, f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{8}{35}.$

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0]=2.5, f[x_1]=4, f[x_2]=3.5, f[x_3]=2;$
$f[x_0,x_1]=1.5, f[x_1,x_2]=-0.5, f[x_2,x_3]=-1;$
$f[x_0,x_1,x_2]=-1, f[x_1,x_2,x_3]=-0.2, f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{8}{35}.$
因此，插值多项式

$$P_3(x)=2.5+1.5(x-1)-(x-1)(x-2)+\frac{8}{35}(x-1)(x-2)(x-3),$$

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0] = 2.5, f[x_1] = 4, f[x_2] = 3.5, f[x_3] = 2;$
$f[x_0, x_1] = 1.5, f[x_1, x_2] = -0.5, f[x_2, x_3] = -1;$
$f[x_0, x_1, x_2] = -1, f[x_1, x_2, x_3] = -0.2, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{8}{35}.$
因此，插值多项式

$$P_3(x) = 2.5 + 1.5(x-1) - (x-1)(x-2) + \frac{8}{35}(x-1)(x-2)(x-3),$$

完全展开可以得到 $P_3(x) = \dfrac{8}{35}x^3 - \dfrac{83}{35}x^2 + \dfrac{491}{70}x - \dfrac{83}{35}.$

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0] = 2.5, f[x_1] = 4, f[x_2] = 3.5, f[x_3] = 2;$
$f[x_0, x_1] = 1.5, f[x_1, x_2] = -0.5, f[x_2, x_3] = -1;$
$f[x_0, x_1, x_2] = -1, f[x_1, x_2, x_3] = -0.2, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{8}{35}.$

因此，插值多项式

$$P_3(x) = 2.5 + 1.5(x-1) - (x-1)(x-2) + \frac{8}{35}(x-1)(x-2)(x-3),$$

完全展开可以得到 $P_3(x) = \dfrac{8}{35}x^3 - \dfrac{83}{35}x^2 + \dfrac{491}{70}x - \dfrac{83}{35}.$

误差项 $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4.5), \xi \in [1, 4.5].$

作业 2 T1

利用下面的函数值表，作差商表，写出相应的牛顿插值多项式以及插值误差表达式，并计算 $f(1.5)$ 和 $f(4)$ 的近似值:

x	1.0	2.0	3.0	4.5
$f(x)$	2.5	4.0	3.5	2.0

先计算各阶差商：$f[x_0]=2.5, f[x_1]=4, f[x_2]=3.5, f[x_3]=2;$
$f[x_0,x_1]=1.5, f[x_1,x_2]=-0.5, f[x_2,x_3]=-1;$
$f[x_0,x_1,x_2]=-1, f[x_1,x_2,x_3]=-0.2, f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{8}{35}.$

因此，插值多项式

$$P_3(x)=2.5+1.5(x-1)-(x-1)(x-2)+\frac{8}{35}(x-1)(x-2)(x-3),$$

完全展开可以得到 $P_3(x)=\dfrac{8}{35}x^3-\dfrac{83}{35}x^2+\dfrac{491}{70}x-\dfrac{83}{35}.$

误差项 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4.5), \xi\in[1,4.5].$

$P_3(1.5)=\dfrac{251}{70}, P_3(4)=\dfrac{83}{35}.$

作业 2 T2

利用数据 $f(0) = 2.0, f(1) = 1.5, f(3) = 0.25, f'(3) = 1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

作业 2 T2

利用数据 $f(0) = 2.0, f(1) = 1.5, f(3) = 0.25, f'(3) = 1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$，对应
$P_3'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$;

作业 2 T2

利用数据 $f(0) = 2.0, f(1) = 1.5, f(3) = 0.25, f'(3) = 1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x_1 + a_0$，对应
$P_3'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1;$
则有 $P_3(0) = a_0 = 2, P_3(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1.5$

作业 2 T2

利用数据 $f(0)=2.0, f(1)=1.5, f(3)=0.25, f'(3)=1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0$，对应
$P_3'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$;
则有 $P_3(0)=a_0=2, P_3(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=1.5$
$P_3(3)=27a_3+9a_2+3a_1+a_0=0.25, P_3'(3)=27a_3+6a_2+a_1=1$

作业 2 T2

利用数据 $f(0)=2.0, f(1)=1.5, f(3)=0.25, f'(3)=1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0$，对应
$P_3'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$;
则有 $P_3(0)=a_0=2, P_3(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=1.5$
$P_3(3)=27a_3+9a_2+3a_1+a_0=0.25, P_3'(3)=27a_3+6a_2+a_1=1$
$\Rightarrow a_3=\dfrac{41}{144}, a_2=-\dfrac{85}{72}, a_1=\dfrac{19}{48}, a_0=2$

作业 2 T2

利用数据 $f(0)=2.0, f(1)=1.5, f(3)=0.25, f'(3)=1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0$，对应
$P_3'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$;
则有 $P_3(0)=a_0=2, P_3(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=1.5$
$P_3(3)=27a_3+9a_2+3a_1+a_0=0.25, P_3'(3)=27a_3+6a_2+a_1=1$
$\Rightarrow a_3=\frac{41}{144}, a_2=-\frac{85}{72}, a_1=\frac{19}{48}, a_0=2$
所以插值函数为 $P_3(x)=\frac{41}{144}x_3-\frac{85}{72}x^2+\frac{19}{48}x+2$,

作业 2 T2

利用数据 $f(0)=2.0, f(1)=1.5, f(3)=0.25, f'(3)=1$ 构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算 $f(2)$ 的近似值。

设插值多项式 $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0$，对应
$P_3'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1;$
则有 $P_3(0)=a_0=2, P_3(1)=a_3+a_2+a_1+a_0=1.5$
$P_3(3)=27a_3+9a_2+3a_1+a_0=0.25, P_3'(3)=27a_3+6a_2+a_1=1$
$\Rightarrow a_3=\frac{41}{144}, a_2=-\frac{85}{72}, a_1=\frac{19}{48}, a_0=2$
所以插值函数为 $P_3(x)=\frac{41}{144}x_3-\frac{85}{72}x^2+\frac{19}{48}x+2$,
余项为 $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)(x-3)^2, \xi\in[0,3]; P_3(2)=\frac{25}{72}$

作业 2 T3

设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1, 2, 4]$ 和 $f[1, 2, 3, 4]$

作业 2 T3

设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1,2,4]$ 和 $f[1,2,3,4]$

$f[1] = 2043, f[2] = 2182, f[3] = 2561, f[4] = 3300;$

作业 2 T3

设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1,2,4]$ 和 $f[1,2,3,4]$

$f[1] = 2043, f[2] = 2182, f[3] = 2561, f[4] = 3300;$
$f[1,2] = 139, f[2,3] = 379, f[3,4] = 739, f[2,4] = 559;$

作业 2 T3

设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1,2,4]$ 和 $f[1,2,3,4]$

$f[1] = 2043, f[2] = 2182, f[3] = 2561, f[4] = 3300;$
$f[1,2] = 139, f[2,3] = 379, f[3,4] = 739, f[2,4] = 559;$
$f[1,2,3] = 120, f[2,3,4] = 180, f[1,2,4] = 140;$

作业 2 T3

设 $f(x) = 20x^3 - x + 2024$，求 $f[1,2,4]$ 和 $f[1,2,3,4]$

$f[1] = 2043, f[2] = 2182, f[3] = 2561, f[4] = 3300;$
$f[1,2] = 139, f[2,3] = 379, f[3,4] = 739, f[2,4] = 559;$
$f[1,2,3] = 120, f[2,3,4] = 180,$ $f[1,2,4] = 140;$
$f[1,2,3,4] = 20.$

作业 2 T4

设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^{6}$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^{6}$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。

设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^{6}$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^{6}$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。

记 $f(x) = x^3 + x^2 + 1$，则 $l_i(x)$ 可以看作对 $f(x)$ 插值时的基函数。

设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^6$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^6$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。

记 $f(x) = x^3 + x^2 + 1$，则 $l_i(x)$ 可以看作对 $f(x)$ 插值时的基函数。
由于节点数量为 7，$\deg f(x) = 3 < 6$，

作业 2 T4

设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^6$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^6$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。

记 $f(x) = x^3 + x^2 + 1$，则 $l_i(x)$ 可以看作对 $f(x)$ 插值时的基函数。
由于节点数量为 7，$\deg f(x) = 3 < 6$，

所以 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x) = f(x) = x^3 + x^2 + 1$,

作业 2 T4

设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^6$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^6$ 为节点的 6 次 Lagrange 插值基函数，求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x)$，结果需要化简。

记 $f(x) = x^3 + x^2 + 1$，则 $l_i(x)$ 可以看作对 $f(x)$ 插值时的基函数。
由于节点数量为 7，$\deg f(x) = 3 < 6$，

所以 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i(x) = f(x) = x^3 + x^2 + 1$,

$$\sum_{i=0}^{6}(x_i^3 + x_i^2 + 1)l_i'(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x.$$

作业 2 T5

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n (n > 2)$ 为互异的节点，$l_k(x) (k = 0, 1, \cdots, n)$ 为与其对应的 n 次 Lagrange 插值基函数，证明 $\sum_{k=0}^{n} (x_k - x)^n l_k(x) = 0$。

作业 2 T5

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n (n > 2)$ 为互异的节点，$l_k(x)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 为与其对应的 n 次 Lagrange 插值基函数，证明 $\sum_{k=0}^{n}(x_k - x)^n l_k(x) = 0$。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(x_k - x)^n l_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\binom{n}{m} x_k^{n-m}(-x)^m\right) l_k(x) \\
=&\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-x)^m \sum_{k=0}^{n} x_k^{n-m} l_k(x) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-x)^m x^{n-m} \\
=&(x - x)^n \equiv 0
\end{aligned}
$$

作业 3

作业 3 T1

构造积分 $\overline{I}(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式

$I(f) = a_{-1} f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h)$， $h > 0$；

构造积分 $\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式

$I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0 f(0)+a_1 f(2h)$， $h>0$；

积分对 $p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2$ 无误差，对应方程组

$$\begin{cases} a_{-1}+a_0+a_1=3h \\ -2a_{-1}+4a_1=3h \\ a_{-1}+4a_1=3h \end{cases}$$

作业 3 T1

构造积分 $I(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式
$I(f) = a_{-1}f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h)$，$h > 0$;

积分对 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ 无误差，对应方程组

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 3h \\ -2a_{-1} + 4a_1 = 3h \\ a_{-1} + 4a_1 = 3h \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{-1} = 0, a_0 = 2.25h, a_1 = 0.75h$$

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x \,\mathrm{d}x$。

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$;

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$;
$f(0)=0, f(1)\approx 0.30956, f(2)\approx 0.12306$;

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$;
$f(0) = 0, f(1) \approx 0.30956, f(2) \approx 0.12306$;
Simpson 公式:$I_1 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \approx 0.4538$，误差约为 0.0128;

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$；
$f(0) = 0, f(1) \approx 0.30956, f(2) \approx 0.12306$；
Simpson 公式:$I_1 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \approx 0.4538$，误差约为 0.0128；
梯形公式：$I_2 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \approx 0.12306$，误差约为 0.3436。

作业 3 T3

记 $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

(1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；

(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

作业 3 T3

记 $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

(1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；

(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A = C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x) = 1$,

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。
取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,
$p_2(x)=x^2,p_4(x)=x^4$ 无误差，对 $p_6(x)=x^6$ 可能有误差。

作业 3 T3

记 $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

(1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；

(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A = C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x) = 1$, $p_2(x) = x^2, p_4(x) = x^4$ 无误差，对 $p_6(x) = x^6$ 可能有误差。

对应方程组 $\begin{cases} 2A + B = 4 \\ A\alpha^2 = \dfrac{8}{3} \\ A\alpha^4 = \dfrac{32}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = C = \dfrac{10}{9} \\ B = \dfrac{16}{9} \\ \alpha = \dfrac{2}{5}\sqrt{15} \end{cases}$，代数精度为 5 次。

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.

(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；

(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,
$p_2(x)=x^2, p_4(x)=x^4$ 无误差，对 $p_6(x)=x^6$ 可能有误差。

对应方程组 $\begin{cases}2A+B=4\\ A\alpha^2=\dfrac{8}{3}\\ A\alpha^4=\dfrac{32}{5}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=C=\dfrac{10}{9}\\ B=\dfrac{16}{9}\\ \alpha=\dfrac{2}{5}\sqrt{15}\end{cases}$，代数精度为 5 次。

误差为 $E(f)=\dfrac{E(x^6)}{6!}f^{(6)}(\xi)=\left(\int_{-2}^{2}x^6\,\mathrm{d}x-S(x^6)\right)\dfrac{f^{(6)}(\xi)}{216}=$
$\dfrac{64}{7875}f^{(6)}(\xi),\xi\in[-2,2]$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$
满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$
满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，
则 $\dfrac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \dfrac{h_{i-1} + h_i}{3}M_i + \dfrac{h_i}{6}M_{i+1} = \dfrac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$
满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，
则 $\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2$
$M_i = 0, i = 0, 3$，其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$。解方程组得到：

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0(n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=0,1,2$

满足 $S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$。记 $M_i=S''(x_i)$，

则 $\dfrac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\dfrac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\dfrac{h_i}{6}M_{i+1}=\dfrac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$

$M_i=0, i=0,3$，其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。解方程组得到：

$$S(x)=$$
$$\begin{cases}-4+6.25(x+2)^2-0.25(x+2)^3, & x\in[-2,-1]\\ 2+1.75(x+1)-0.75(x+1)^2+0.09375(x+1)^3, & x\in[-1,1]\\ 2.5-0.9375(x-1)-0.1875(x-1)^2+0.0625(x-1)^3, & x\in[1,2]\end{cases}$$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$

满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，

则 $\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2$

$M_i = 0, i = 0, 3$，其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$。解方程组得到：

$$S(x) = \begin{cases} -4 + 6.25(x+2)^2 - 0.25(x+2)^3, & x \in [-2, -1] \\ 2 + 1.75(x+1) - 0.75(x+1)^2 + 0.09375(x+1)^3, & x \in [-1, 1] \\ 2.5 - 0.9375(x-1) - 0.1875(x-1)^2 + 0.0625(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

故 $S(0) = 3.5625 = \frac{57}{16}$