习题课 2

陈文轩

2025 年 4 月 2 日

作业 3

作业 3 T1

构造积分 $\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式
$I(f) = a_{-1}f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h)$，$h > 0$;

作业 3 T1

构造积分 $\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式

$I(f) = a_{-1}f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h)$，$h > 0$；

积分对 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ 无误差，对应方程组

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 3h \\ -2a_{-1} + 4a_1 = 3h \\ a_{-1} + 4a_1 = 3h \end{cases}$$

作业 3 T1

构造积分 $\bar{I}(f) = \int_{-h}^{2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值积分公式
$I(f) = a_{-1}f(-h) + a_0 f(0) + a_1 f(2h)$，$h > 0$；

积分对 $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ 无误差，对应方程组

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 3h \\ -2a_{-1} + 4a_1 = 3h \\ a_{-1} + 4a_1 = 3h \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{-1} = 0, a_0 = 2.25h, a_1 = 0.75h$$

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$。

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^2 \approx 0.46663$；

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^2 \approx 0.46663$；
$f(0) = 0, f(1) \approx 0.30956, f(2) \approx 0.12306$；

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$；
$f(0)=0, f(1)\approx 0.30956, f(2)\approx 0.12306$；
Simpson 公式:$I_1 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \approx 0.4538$，误差约为 0.0128；

作业 3 T2

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位)：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。

准确值：$\int_0^2 e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^2 \approx 0.46663$；
$f(0)=0, f(1)\approx 0.30956, f(2)\approx 0.12306$；
Simpson 公式:$I_1 = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\approx 0.4538$，误差约为 0.0128；
梯形公式：$I_2 = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\approx 0.12306$，误差约为 0.3436。

作业 3 T3

记 $I(f)=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$，

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,
$p_2(x)=x^2, p_4(x)=x^4$ 无误差，对 $p_6(x)=x^6$ 可能有误差。

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$, $p_2(x)=x^2, p_4(x)=x^4$ 无误差，对 $p_6(x)=x^6$ 可能有误差。

对应方程组 $\begin{cases} 2A+B=4 \\ A\alpha^2=\dfrac{8}{3} \\ A\alpha^4=\dfrac{32}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} A=C=\dfrac{10}{9} \\ B=\dfrac{16}{9} \\ \alpha=\dfrac{2}{5}\sqrt{15} \end{cases}$，代数精度为 5 次。

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中 $I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
(1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度，并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程)；
(2) 设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

取 $A=C$，积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$, $p_2(x)=x^2, p_4(x)=x^4$ 无误差，对 $p_6(x)=x^6$ 可能有误差。

对应方程组 $\begin{cases} 2A+B=4 \\ A\alpha^2=\dfrac{8}{3} \\ A\alpha^4=\dfrac{32}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=C=\dfrac{10}{9} \\ B=\dfrac{16}{9} \\ \alpha=\dfrac{2}{5}\sqrt{15} \end{cases}$，代数精度为 5 次。

误差为 $E(f)=\dfrac{E(x^6)}{6!}f^{(6)}(\xi)=\left(\int_{-2}^{2} x^6\,\mathrm{d}x-S(x^6)\right)\dfrac{f^{(6)}(\xi)}{216}=$ $\dfrac{64}{7875}f^{(6)}(\xi),\xi\in[-2,2]$

作业 3 T3

记 $I(f)=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

作业 3 T3

记 $I(f)=\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，其中
$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$.
设 $f(x)$ 足够光滑 (可微)，求该数值积分公式的误差。

$$
\begin{aligned}
E(f)=I(f)-S(f)&=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b W(x)\omega_n^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-2}^{2}(x-\alpha)^2x^2(x+\alpha)^2\,\mathrm{d}x=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-2}^{2}(x^2-\frac{12}{5})^2x^2\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-2}^{2}(x^6-\frac{24}{5}x^4+\frac{144}{25}x^2)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\cdot\frac{1024}{175}=\frac{64}{7875}f^{(6)}(\xi),\xi\in[-2,2]
\end{aligned}
$$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$$

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0(n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$
满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，则

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$
满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$。记 $M_i = S''(x_i)$，则

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2$$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0(n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=0,1,2$
满足 $S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$。记 $M_i=S''(x_i)$，则

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$$

$M_i=0, i=0,3$，其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。解方程组得到：

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0(n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=0,1,2$
满足 $S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$。记 $M_i=S''(x_i)$，则

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$$

$M_i=0, i=0,3$，其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。解方程组得到：

$$S(x)=\begin{cases}-4+6.25(x+2)^2-0.25(x+2)^3, & x\in[-2,-1]\\ 2+1.75(x+1)-0.75(x+1)^2+0.09375(x+1)^3, & x\in[-1,1]\\ 2.5-0.9375(x-1)-0.1875(x-1)^2+0.0625(x-1)^3, & x\in[1,2]\end{cases}$$

作业 3 T4

求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0(n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 $S(0)$ 的值。注意：n 为小区间个数。

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	2.50	1.50

$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=0,1,2$
满足 $S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$。记 $M_i=S''(x_i)$，则

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$$

$M_i=0, i=0,3$，其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。解方程组得到：

$$S(x)=\begin{cases}-4+6.25(x+2)^2-0.25(x+2)^3, & x\in[-2,-1]\\ 2+1.75(x+1)-0.75(x+1)^2+0.09375(x+1)^3, & x\in[-1,1]\\ 2.5-0.9375(x-1)-0.1875(x-1)^2+0.0625(x-1)^3, & x\in[1,2]\end{cases}$$

故 $S(0)=3.5625=\dfrac{57}{16}$

作业 4

作业 4 T1

给定函数 $f(x)$ 离散值如下：

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	2.5	1.0	2.0	3.5

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 $f'(0.02)$ 和 $f'(0.04)$；

作业 4 T1

给定函数 $f(x)$ 离散值如下:

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	2.5	1.0	2.0	3.5

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 $f'(0.02)$ 和 $f'(0.04)$;

向前差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02))}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

作业 4 T1

给定函数 $f(x)$ 离散值如下：

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	2.5	1.0	2.0	3.5

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 $f'(0.02)$ 和 $f'(0.04)$；

向前差分：

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02))}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

向后差分：

$$f'(0.02) = \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02} = -75, f'(0.04) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50;$$

作业 4 T1

给定函数 $f(x)$ 离散值如下：

x	0.00	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	2.5	1.0	2.0	3.5

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 $f'(0.02)$ 和 $f'(0.04)$；

向前差分：

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02))}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

向后差分：

$$f'(0.02) = \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02} = -75, f'(0.04) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50;$$

中心差分：

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.00)}{0.04} = -12.5, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.02)}{0.04} = 62.5。$$

作业 4 T2

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 及其积分误差;

作业 4 T2

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 及其积分误差；

准确值：0.4666。

作业 4 T2

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 及其积分误差；

准确值：0.4666。

先换元 $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-t-1}\sin(t+1)\,\mathrm{d}t$，记 $g(t)=e^{-t-1}\sin(t+1)$，

作业 4 T2

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 及其积分误差；

准确值：0.4666。

先换元 $\int_{-1}^{1} e^{-t-1}\sin(t+1)\,\mathrm{d}t$，记 $g(t)=e^{-t-1}\sin(t+1)$，

$$I(g)=\frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\approx 0.4665,$$

作业 4 T3

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；

作业 4 T3

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1)\,\mathrm{d}t$，此时通过 $G-S$ 正交化得到正交多项式为：

作业 4 T3

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1)\,\mathrm{d}t$，此时通过 $G-S$ 正交化得到正交多项式为：
$p_2(t)=t^2-\frac{3}{5}$，节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\alpha_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$，由于对称性，

作业 4 T3

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1)\,\mathrm{d}t$，此时通过 $G-S$ 正交化得到正交多项式为：
$p_2(t)=t^2-\dfrac{3}{5}$，节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}, \alpha_2=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$，由于对称性，
权重相等，代入 $f(t)=1$ 时无误差，得到 $W_1=W_2=\dfrac{1}{3}$，

作业 4 T3

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式，这里 $(x-1)^2$ 为权重函数；

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1)\,\mathrm{d}t$，此时通过 $G-S$ 正交化得到正交多项式为：
$p_2(t)=t^2-\frac{3}{5}$，节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}, \alpha_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$，由于对称性，
权重相等，代入 $f(t)=1$ 时无误差，得到 $W_1=W_2=\frac{1}{3}$，
故 $I(f)=\frac{1}{3}f\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{3}f\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$。

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \dfrac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x) + O(h^5)$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4)$, $f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5)$$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4)$, $f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))$。

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x) + \frac{2}{3}h^4 f''''(x) + O(h^5)$$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \dfrac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$，有：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f''''(x) + O(h^5)$$
$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f''''(x) + O(h^5)$$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))$。

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4)$, $f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))$。

$$
\begin{aligned}
&Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h) \\
=&(A+B+C+D+E)f(x) + (-2A - B + D + 2E)hf'(x) \\
&+ (2A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + 2E)h^2 f''(x) + (-\frac{4}{3}A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}D + \frac{4}{3}E)h^3 f'''(x) \\
&+ (\frac{2}{3}A - \frac{1}{24}B + \frac{1}{24}D + \frac{2}{3}E)h^4 f''''(x) \\
:=&hf'(x) + O(h^5)
\end{aligned}
$$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))$。

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=0 \\ -2A-B+D+2E=1 \\ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E=0 \\ -\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E=0 \\ \frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \\ E=\frac{1}{12} \end{cases}$$

作业 4 T4

设函数 $f(x)$ 充分光滑，试推导如下数值微分公式，使其截断误差为 $O(h^4)$, $f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h)+Bf(x-h)+Cf(x)+Df(x+h)+Ef(x+2h))$。

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=0 \\ -2A-B+D+2E=1 \\ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E=0 \\ -\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E=0 \\ \frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \\ E=\frac{1}{12} \end{cases}$$

因此数值微分公式为

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + O(h^4)\text{。}$$

课堂作业

课堂作业 1

推导二阶导数的微分误差

课堂作业 1

推导二阶导数的微分误差

$$f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

课堂作业 1

推导二阶导数的微分误差

$$f(x) - L_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{aligned}
&f''(x) - L_2''(x) \\
=&2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)((x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2)) \\
&+\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&+2\cdot\frac{f'''(\xi)}{3!}((x - x_0) + (x - x_1) + (x - x_2))
\end{aligned}$$

推导二阶导数的微分误差

$$
\begin{aligned}
f(x) - L_2(x) = & \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& f''(x) - L_2''(x) \\
=& 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)((x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)) \\
& + \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& + 2\cdot\frac{f'''(\xi)}{3!}((x-x_0)+(x-x_1)+(x-x_2)) \\
f''(x_0) - L_2''(x_0) = & 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)2h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(-6h) = O(h)
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$y'(x) = f(x, y)$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$y'(x) = f(x, y)$$
$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y'(x) = f_x + f f_y$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y)\\
&y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + ff_y\\
&y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)\\
&\qquad\quad = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y) \\
&y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + ff_y \\
&y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\
&\qquad\quad = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f,
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y)\\
&y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + f f_y\\
&y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + f f_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)\\
&\qquad\quad = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f f_y^2\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + f f_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y)\\
&y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + ff_y\\
&y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)\\
&\qquad\quad = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) = (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y)
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y)\\
&y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + f f_y\\
&y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + f f_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)\\
&\qquad\quad = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f f_y^2\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + f f_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) = (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2f f_{yy}(f_x + f f_y)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_x f_y) = f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f)
\end{aligned}
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x,y)\\
y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + ff_y\\
y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)\\
&= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) = (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_xf_y) = f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ff_y^2) = (f_x + ff_y)f_y^2 + 2ff_y(f_{xy} + f_{yy}f)
$$

课堂作业 2

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x,y) \\
y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y'(x) = f_x + ff_y \\
y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\
&= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) = (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_xf_y) = f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f)
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ff_y^2) = (f_x + ff_y)f_y^2 + 2ff_y(f_{xy} + f_{yy}f)
$$

$$
\begin{aligned}
y''''(x) = {} & ff_y^3 + 4f^2f_yf_{yy} + f^3f_{yyy} + f_y^2f_x + 3ff_xf_{yy} + 5ff_yf_{xy} + 3f_xf_{xy} \\
& +3f^2f_{xyy} + f_yf_{xx} + 3ff_{xxy} + f_{xxx}
\end{aligned}
$$

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

令 $f(x, y) = \lambda y$，则有 $y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1})$。令 $z = \lambda h$，则

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

令 $f(x, y) = \lambda y$，则有 $y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1})$。令 $z = \lambda h$，则 $\xi = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2+z}{2-z}$。由于 $|\xi| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) < 0^{(*)} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$，

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

令 $f(x, y) = \lambda y$，则有 $y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1})$。令 $z = \lambda h$，则 $\xi = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2+z}{2-z}$。由于 $|\xi| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) < 0^{(*)} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$，故梯形格式是 A-稳定的。

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

令 $f(x, y) = \lambda y$，则有 $y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1})$。令 $z = \lambda h$，则
$\xi = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2+z}{2-z}$。由于 $|\xi| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) < 0^{(*)} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$，
故梯形格式是 A-稳定的。

(*) 对 $z = a + bi, |\xi|^2 = \frac{(2+a)^2 + b^2}{(2-a)^2 + b^2}$，$|\xi|^2 < 1$ 时应有

课堂作业 3

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ 的绝对稳定性，$h > 0$。

令 $f(x, y) = \lambda y$，则有 $y_{n+1} = y_n + \frac{h\lambda}{2}(y_n + y_{n+1})$。令 $z = \lambda h$，则
$\xi = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2+z}{2-z}$。由于 $|\xi| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) < 0^{(*)} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$，
故梯形格式是 A-稳定的。

(*) 对 $z = a + bi, |\xi|^2 = \frac{(2+a)^2 + b^2}{(2-a)^2 + b^2}$，$|\xi|^2 < 1$ 时应有

$$(2+a)^2 + b^2 < (2-a)^2 + b^2 \Rightarrow 4a < -4a \Rightarrow a < 0，\text{即 } \mathrm{Re}(z) < 0。$$

课堂作业 4

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑实值函数，$r \in \mathbb{R}$ 为 $f(x)$ 的一个二重根，试推导牛顿迭代法在根 r 附近的收敛阶。