



线性代数习题课讲义

作者：陈文轩

组织：KFRC

时间：August 1, 2026

版本：1.0.0.2134



目录

第一章 矩阵之前	1
1.1 补充：线性方程组	1
1.1.1 线性方程组的求解	1
1.1.2 唯一解，无解，无穷解问题	2
1.1.3 插值问题	2
1.2 数与数域	3
1.2.1 复数与单位根	3
1.2.2 数环、数域	5
1.3 杂项	6
1.3.1 求和符号练习	6
1.3.2 组合恒等式	7
第二章 行列式	9
2.1 更多、更多的行列式	9
2.1.1 行列式的定义 *	9
2.1.2 行列式计算练习	10
2.1.2.1 定义法/降阶法/化为上三角	10
2.1.2.2 加边	12
2.1.2.3 逐行/列加减	16
2.1.2.4 拆项与递推	20
2.1.2.5 乘法分解	22
2.1.3 函数与行列式 *	25
2.1.3.1 多项式与行列式	25
2.1.3.2 行列式的导数与积分	26
2.1.3.3 行列式与 Taylor 公式	27
2.1.4 综合练习 *	28
第三章 秩与线性空间	31
3.1 第六次作业解答	31
3.2 秩	33
3.2.1 秩不等式	33
3.2.2 初等变换与秩	34
3.3 线性空间	36
3.3.1 线性空间的定义	36
3.3.2 线性相关与线性无关	36
3.3.3 秩与极大线性无关组	37
第四章 线性变换与矩阵的相似	39
4.1 第十次作业解答	39

4.2 矩阵的相似	42
4.3 一些其他结论 *	44
4.3.1 Caylay-Hamilton 定理	44
4.3.2 Gershgorin 圆盘定理	44
4.3.3 同时对角化问题	45
第五章 Jordan 标准型 *	47
5.1 多项式矩阵的相抵	47
5.2 Jordan 标准型的概念与求法	52
5.3 Jordan 标准型的应用	55
第六章 期末复习	57
6.1 线性变换与矩阵的相似	57
6.2 正交变换与内积空间	58
6.3 二次型与对称矩阵的相合	61

第一章 矩阵之前

1.1 补充：线性方程组

1.1.1 线性方程组的求解

在求解线性方程组的时候，需要牢记根本方法只有一个：初等行变换，即使用 Gauss 消元法把矩阵化为阶梯型。但是，在此之后我们还可以进行进一步的操作，把矩阵化为更简单的形式（以齐次方程组为例，只考虑系数矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ）：先对每行乘某个数使得首个非零元素为 1，然后通过初等行变换使得这个 1 所在列的其他元素为 0：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{c_{kj_k}} r_k} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \tilde{c}_{1j_2} & \cdots & \tilde{c}_{1j_r} & \cdots & \tilde{c}_{1n} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \tilde{c}_{2j_r} & \cdots & \tilde{c}_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \tilde{c}_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[-i=k-1, \dots, 1; k=r, \dots, 1]{-\tilde{c}_{ij_k} \rightarrow r_i} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{c}_{12} & \cdots & 0 & \tilde{c}_{1,j_2+1} & \cdots & 0 & \tilde{c}_{1,j_r+1} & \cdots & \tilde{c}_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{c}_{2,j_2+1} & \cdots & 0 & \tilde{c}_{2,j_r+1} & \cdots & \tilde{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{c}_{r,j_r+1} & \cdots & \tilde{c}_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以发现这个矩阵具有以下好处：

- 省去了最后抄回原方程组代入的步骤；
- 这样操作得到的矩阵会是唯一的，避免了操作方式不同导致得到不同的答案；
- 解可以简便地写出来，甚至可以说已经解出来了：除了只有一个 1 的列（注意这个 1 要是它所在的那一行的第一个非零元），其余列可直接按序命为自由变量，直接写出方程的解，并且可以很清楚地看出自由变量个数为 $n - r$ 。

除此之外，正如解方程时可以把 x_i 和 x_j 在方程组中出现位置交换，用行变换法解方程时也是可以交换列的（也可以认为是从其他方向造阶梯），面对具体问题时不用拘泥于一般阶梯的固定形式，但是要记清楚交换后变量与交换前变量的对应关系。以交换 x_1, x_2 为例，这可以使用矩阵乘法解释：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

最后留给大家一个问题：一个非齐次线性方程组的解和它的系数矩阵对应的齐次线性方程组的解有什么关系？

1.1.2 唯一解, 无解, 无穷解问题

例题 1.1 已知线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$
 有唯一解, 则 a 应满足什么条件?

解

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & a & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & a+4 & 0 & 21 \\ 11 & 5 & 0 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & a+\frac{9}{11} & 0 & * \\ 11 & 5 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

因此有唯一解的条件是 $a \neq -\frac{9}{11}$ 。

例题 1.2 已知线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有无穷多解, 则 λ 应满足什么条件?

解

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

因此有无穷多解的条件是
$$\begin{cases} 2-\lambda-\lambda^2=0 \\ 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3=0 \end{cases}, \text{ 即 } \lambda=1.$$

1.1.3 插值问题

例题 1.3(Lagrange 插值) 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 经过 $(1, 2), (-1, 3), (3, 0), (0, 2)$.

解

$$\text{由题意有: } \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此 $a = -\frac{5}{24}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{7}{24}, d = 2$, $f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2$.

例题 1.4(Hermite 插值) 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(0) = 2, f'(0) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 1$ 。

解 易得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 。

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 2 \\ a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 2$$

例题 1.5 求二次多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(0) = 2, f(1) = 1, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。

解 易得 $f'(x) = 2ax + b$ 。

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{显然无解。}$$

例题 1.6 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(0) = 2, f(1) = 1, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。

解 易得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 。

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 1 \\ \frac{3}{4}a + b + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

因此解为 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -t + 11 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$, 对应 $f(x) = -12x^3 + (-t + 11)x^2 + tx + 2, \forall t \in \mathbb{R}$ 。

1.2 数与数域

1.2.1 复数与单位根

定理 1.1 (Euler)

对于任意实数 θ , 有 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。特别地, 当 $\theta = \pi$ 时, 有 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。



例题 1.7 计算 $\sum_{j=0}^n \cos j\theta$ 和 $\sum_{j=0}^n \sin j\theta$ 。

解 对 $\theta = 2k\pi$, 有 $\cos^j \theta = 1, \sin^j \theta = 0$, 故 $\sum_{j=0}^n \cos j\theta = n + 1, \sum_{j=1}^n \sin j\theta = 0$ 。

对 $\theta \neq 2k\pi$, 令 $T = \sum_{j=0}^n e^{ij\theta} = \sum_{j=0}^n \cos j\theta + i \sum_{j=0}^n \sin j\theta$, 有 $e^{i\theta}T = T + e^{i(n+1)\theta} - 1$, 故 $T = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ 。

分别计算实部虚部, 有 $\sum_{i=0}^n \cos i\theta = \frac{1 - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos \theta)}$, $\sum_{i=0}^n \sin i\theta = \frac{\sin(n+1)\theta - \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$.

定义 1.2

n 次单位根是指

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

这 n 个复数, 记 $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 则他们可以写为 $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ 。

之所以叫单位根, 是因为其满足

命题 1.3 (单位根的性质)

n 次单位根是方程 $x^n = 1$ 的全部根。

根据因式定理, 可以推出

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega_n^k)$$

对比各项系数可以得到一些恒等式。事实上最常用的为:

命题 1.4 (单位根恒等式)

1.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^k)^m = \begin{cases} n & n \mid m \\ 0 & n \nmid m \end{cases}$$

2.

$$\omega_n^a = \omega_n^{a \pm n}$$

3.

$$\overline{\omega_n^a} = \omega_n^{-a}$$

4.

$$\omega_{mn}^{ma} = \omega_n^a$$

证明 只证明 (1).

对 $n \mid m$, 有 $\omega_n^m = 1$, 故 $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^k)^m = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

对 $n \nmid m$, 有 $\omega_n^m \neq 1$, 故 $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^k)^m = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \frac{1 - \omega_n^{nm}}{1 - \omega_n^m} = 0$.

第二个恒等式就是最重要的循环性质。出于循环, 它可以将一些东西按照模 n 的余数分类。

例题 1.8 计算 $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$, $\binom{n}{m}$ 为组合数 C_n^m , $\lfloor x \rfloor$ 为向下取整, 即不大于 x 的最大整数。

解 考虑三次单位根 $\omega_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 由二项式定理有

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots \quad (1.1)$$

$$(1+\omega_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_3^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \omega_3 + \binom{n}{2} \omega_3^2 + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \omega_3 + \dots \quad (1.2)$$

$$(1 + \omega_3^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega_3^{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \omega_3^2 + \binom{n}{2} \omega_3 + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \omega_3^2 + \cdots \quad (1.3)$$

将 (1.1), (1.2) 和 (1.3) 相加, 注意到 $1 + \omega_3 + \omega_3^2 = 0$, 有

$$(1+1)^n + (1+\omega_3)^n + (1+\omega_3^2)^n = 3 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$$

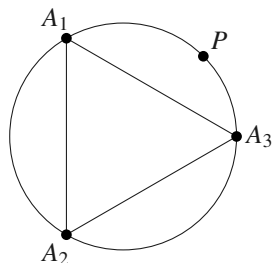
即有

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3} (2^n + (1+\omega_3)^n + (1+\omega_3^2)^n)$$

 **练习 1.1** 计算 $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1}$ 。

例题 1.9 单位圆内接正 n 边形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ 中, P 为单位圆上一点, 证明: $\sum_{k=1}^n |PA_k|^2 = 2n$ 。

证明



放在复平面上, 设 $A_1 = \omega_n$, 则 $A_k = \omega_n^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. 设 $P = z$ 。

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |PA_k|^2 = \sum_{k=1}^n |z - \omega_n^k|^2 = \sum_{k=1}^n (z - \omega_n^k)(\bar{z} - \overline{\omega_n^k}) = \sum_{k=1}^n (1 - \omega_n^k \bar{z} - z \overline{\omega_n^k} + 1) = 2n$$

最后一个等号用到 $\sum_{k=1}^n \omega_n^k = 0$ 。

1.2.2 数环、数域

定义 1.5 (数环、数域)

若复数域 $\mathbb{C}$ 的某个包含 1 的子集 K 满足以下条件:

1. $a, b \in K \Rightarrow a + b \in K$;
2. $a, b \in K \Rightarrow a - b \in K$;
3. $a, b \in K \Rightarrow ab \in K$;

则称 K 为数环。

若还满足 $a \in K, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in K$, 则称 K 为数域。

不难验证:

命题 1.6 (数环、数域-例子)

有理数集 $\mathbb{Q}$ 、实数集 $\mathbb{R}$ 、复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域。整数集 $\mathbb{Z}$ 是数环但不是数域。

 **笔记** 当然, 还有形态更复杂的数环和数域, 例如所有 $a + bi$ 在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 时构成数环, $a, b \in \mathbb{Q}$ 构成数域。

对于究竟怎样的集合是数环/数域，有一个简单的结论：

命题 1.7 (最小的数环、数域)

任何数环包含 $\mathbb{Z}$ ，任何数域包含 $\mathbb{Q}$ 。

1.3 杂项

1.3.1 求和符号练习

线性代数中求和符号是一个重要的工具，有时候可以用来简化问题，有时候可以用来构造问题。在中学时，我们知道 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，除此之外，还有多重求和及集合求和。以下给出定义：

定义 1.8 (多重求和及集合求和)

(1)(多重求和) $\sum_{a_1, a_2, \dots, a_m=1}^n x_{a_1 a_2 \dots a_m} \triangleq \sum_{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}=1}^n x_{a_1 a_2 \dots a_m} \sum_{a_m=1}^n = \cdots = \sum_{a_1=1}^n \sum_{a_2=1}^n \cdots \sum_{a_m=1}^n x_{a_1 a_2 \dots a_m}$

(2)(集合求和) $\sum_{e \in \Lambda} x_e$ 用于表示对集合 Λ 中所有元素 e 的 x_e 值求和。集合 Λ 是索引集合，可以是有限的或无限的。索引集合包含所有我们要求和的索引 e 。对于集合 Λ 中的每个元素 e ， x_e 表示与 e 相关联的数值。 $\sum$ 表示对所有 x_e 进行累加，其中 e 遍历集合 Λ 的所有元素。例如 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{e \in \{1, 2, \dots, n\}} a_e$ 。

集合 Λ 也可以被替换为某一条件，例如 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ ， $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij}$

下面是一些求和符号的练习。

例题 1.10 证明： $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right)$

证明 显然矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{bmatrix}$ 的元素按行求和等于按列求和，故得证。

例题 1.11 计算 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2$

解

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + j^2 + 2ij) = n \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = 2n \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3} + 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6} \end{aligned}$$

例题 1.12 (Chebyshev) 若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ，则 $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k$ 。

证明 只需证明 $n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ 。令 $S = \sum_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ 。

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = \sum_{i, j=1}^n (a_j - a_i)(b_j - b_i) \\ &= \sum_{i, j=1}^n (a_j b_j + a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i) = 2n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \sum_{i, j=1}^n a_i b_j = 2 \left(n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \right) \end{aligned}$$

例题 1.13 记 $H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$, (1) 求 $\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}$ (用 H_k 表示), (2) 证明 $\sum_{j=1}^{n-1} H_j = nH_n - n$ 。

解

$$(1) \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k-j} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} = \sum_{k=2}^n H_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k$$

$$(2) \sum_{j=1}^{n-1} H_j = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=l}^{n-1} \frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{n-l}{l} = \sum_{l=1}^n \frac{n-l}{l} = \sum_{l=1}^n \left(\frac{n}{l} - 1 \right) = nH_n - n$$

例题 1.14(Abel) 记 $B_n = \sum_{i=1}^n b_i$, 则 $S = \sum_{i=1}^n a_i b_i = B_n a_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i)$ 。

证明

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^n a_i B_i - \sum_{i=1}^n a_i B_{i-1} = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i \\ &= a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i - a_1 B_0 = B_n a_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

1.3.2 组合恒等式

引理 1.9

1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

2.

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

3.

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$



定理 1.10 (二项式定理)

对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 及 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 。



证明 归纳。利用引理 1.9(3), 有

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot (1+x)^{n-1} = (1+x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) x^k + 1 + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

推论 1.11

利用上述定理和引理, 可以得到:

1.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

2.

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ 为偶数}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ 为奇数}}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

3.

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}. \text{ 特别地, } \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

4.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

5.

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

6.

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$



证明 (1)(2) 对 $(1+x)^n$ 使用二项式定理, 分别取 $x=1$ 和 $x=-1$ 即可。

(3) 注意到 $(1+x)^{m+n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^m$, 分别使用二项式定理, 展开后比较 x^k 系数。

(4) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ 两侧对 x 求导, 并取 $x=1$ 即可。

(5)

$$\binom{k}{m} = \text{const} \left(\frac{(1+x)^k}{x^m} \right), \text{ 其中 } \text{const}(f(x)) \text{ 表示 } f(x) \text{ 的常数项}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \text{const} \left(\sum_{k=m}^n \frac{(1+x)^k}{x^m} \right) = \text{const} \left(\frac{1}{x^m} \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^m}{x} \right) = \text{const} \left(\frac{(1+x)^{n+1}}{x^{m+1}} \right) = \binom{n+1}{m+1}.$$

(6) 利用引理 1.9(3) 归纳即可。

例题 1.15 设 $n \leq m$, 证明: $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k$ 。

证明

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} &= [x^m](1+x)^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1+x)^k = [x^m](1+x)^n (2+x)^m \\ &= [x^m](1+x)^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k x^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k \end{aligned}$$

其中 $[x^m]f(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的 m 次项系数。

第二章 行列式

2.1 更多、更多的行列式

2.1.1 行列式的定义 *

行列式具有多种定义，以下只列出常见的三种，请读者自行验证它们的等价性。

逆序数定义又称为行列式的完全展开定义。具体表述为：

定义 2.1 (逆序数定义)

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶方阵，定义行列式

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} 2(\chi_{A_n}(\sigma)) - \frac{1}{2} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

其中 χ 是示性函数， S_n 是 n 阶置换群， A_n 是 n 阶交错群。

 **笔记** $2(\chi_{A_n}(\sigma)) - \frac{1}{2}$ 本质上是检验置换 σ 的奇偶性。对 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$, $2(\chi_{A_n}(\sigma)) - \frac{1}{2} \equiv (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 。

归纳法定义又称为按行展开法定义。该定义直接给出了行列式的计算式（展开式）。

定义 2.2 (归纳法定义)

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶方阵，定义行列式 $\det A$ 是按下列法则确定的一个数：

1. 当 $n = 1$ 时， $\det a_{11} = a_{11}$ ；
2. 当 $n \geq 2$ 时， $\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$ ，其中 A_{1j} 是 A 中元 a_{1j} 的代数余子式。

由这一定义可以得到：

定理 2.3 (Laplace 展开定理)

设 A 是 n 阶方阵， $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，对任意正整数 $r < n$ ，任意取定 r 个指标 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ ，则 $\det A$ 的值等于它的第 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行（或列）元组成的所有 r 阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和。即

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} (-1)^{\sum_{k=1}^r (i_k + j_k)} A \begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} (-1)^{\sum_{k=1}^r (i_k + j_k)} A \begin{pmatrix} j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \\ i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 $i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n$ 是由 $1, 2, \dots, n$ 去掉 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到， $j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n$ 是由 $1, 2, \dots, n$ 去掉 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到。

证明 此定理的证明已超出线性代数 B1 的范围，但是可以参考《线性代数（李炯生 查建国 王新茂）》教材的 2.3 节。

例题 2.1 设 $\det A$ 是 n 阶行列式，正整数 $r < n$ 。若 $\det A$ 的所有 r 阶子式都等于零，证明： $\det A = 0$ 。

证明 由 Laplace 展开定理, $\det A$ 的 r 阶子式等于零, 有 $\det A$ 的展开式中求和的每一项都是 0, 故 $\det A = 0$ 。
行列式的公理化定义将行列式归结为满足 3 条性质的线性映射, 而不是直接给出行列式的具体形式。

定义 2.4 (公理化定义)

n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上的规范反对称 n 重线性函数称为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶行列式函数, 简称 n 阶行列式。

换言之, 行列式函数 $\det: \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ 是满足以下三条性质的函数:

1. 规范性: $\det(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$, 其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组标准正交基;
2. 反对称性: $\forall 1 \leq i < j \leq n, \det(\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots) = -\det(\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots)$;
3. 线性性: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \det(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \mu \det(\beta_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 。

2.1.2 行列式计算练习

矩阵/行列式打洞的神秘技巧并不是线性代数的核心, 但为了考试, 请大家务必掌握。

2.1.2.1 定义法/降阶法/化为上三角

例题 2.2 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 。

解

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_1 \rightarrow r_2]{\substack{-2r_1 \rightarrow r_3 \\ -2r_1 \rightarrow r_4}} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 \rightarrow r_4]{\substack{-3r_2 \rightarrow r_3 \\ 3r_2 \rightarrow r_4}} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -9 & -42 \\ 0 & 0 & 1 & 46 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -9 & -42 \\ 1 & 46 \end{bmatrix} = -372 \end{aligned}$$

例题 2.3 计算 $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ 。

解

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行展开}} (-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行展开}} -(-1)^{1+3} \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \\ 13 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行展开}} -(-1)^{1+2} \cdot 15 \det \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 13 & 10 \end{bmatrix} = 15 \cdot 90 = 1350$$

例题 2.4 计算

$$\det \begin{bmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

解

$$\det \begin{bmatrix} x & y & & & \\ & x & y & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列展开}} x \cdot \det \begin{bmatrix} x & y & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} y \cdot \det \begin{bmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{bmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

 **笔记** 有一定规律 (元素大量重复) 矩阵化为上三角的重要结构: $(1, 1, \dots, 1)$

例题 2.5 计算

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$$

解

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-ar_1 \rightarrow r_2 \\ -a^2 r_1 \rightarrow r_3 \\ -a^4 r_1 \rightarrow r_4}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & a+d \\ (a^2+b^2)(a+b) & (a^2+c^2)(a+c) & (a^2+d^2)(a+d) \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & (a^2+c^2)(a+c) - (a^2+b^2)(a+b) & (a^2+d^2)(a+d) - (a^2+b^2)(a+b) \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac) & (d-b)(a^2+b^2+d^2+ab+bd+ad) \end{bmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

 **笔记** 如果没有 $(1, 1, \dots, 1)$, 一般先尝试逐行/逐列求和。

例题 2.6 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

解 $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_4]{c_2 \leftrightarrow c_3} 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -3$

例题 2.7 计算 $\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$

解

$$\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x + (n-1)a & x + (n-1)a & \cdots & x + (n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{bmatrix} = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

2.1.2.2 加边

首先回忆这个典型：

例题 2.8 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & & & \\ c & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d \end{bmatrix}_{n \times n}$

解 若 $d = 0$ ，显然有 $\Delta = 0$ 。

$$d \neq 0 \text{ 时, } \det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & & & \\ c & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=2, \dots, n]{-\frac{c}{d}c_k \rightarrow c_1} \det \begin{bmatrix} a - \frac{bc}{d}(n-1) & b & b & \cdots & b \\ 0 & d & & & \\ 0 & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d \end{bmatrix} = d^{n-1} \left(a - \frac{bc}{d}(n-1) \right)$$

这启发了对前面一道例题的另外一种解法。

例题 2.9 计算 $\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$

$$\text{解 } \det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & & & \\ -1 & & x-a & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & x-a \end{bmatrix} = (x-a)^n \left(1 + \frac{a}{x-a}n\right)$$

显然, 两种方法的结果是一致的。

 **笔记** 如果出现大量重复元素, 但是找不到 $(1, 1, \dots, 1)$ 时, 可以尝试加边。

先介绍一个结论:

命题 2.5

设准上三角形方阵 $A = (A_{ij})_{k \times k}$ 的每个对角块 A_{kk} 都是方阵, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^k \det A_{jj}$$

证明 首先考虑 $k=2$ 的情况, 设

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

考虑 $\det A$ 的完全展开式中的非零项, 若 $\prod_{i=1}^n a_{ij_i} \neq 0$, 则必然有 $(j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n)$ 是 $(r+1, r+2, \dots, n)$ 的一个排列, 进而 $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ 是 $(1, 2, \dots, r)$ 的一个排列, 故 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n) = \tau(j_1, j_2, \dots, j_r) + \tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n)$ 。因此,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq r \\ r+1 \leq j_{r+1}, \dots, j_n \leq n}} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_r) + \tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i} \\ &= \left(\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_r \leq r} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_r)} \prod_{i=1}^r a_{ij_i} \right) \left(\sum_{r+1 \leq j_{r+1}, \dots, j_n \leq n} (-1)^{\tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n)} \prod_{i=r+1}^n a_{ij_i} \right) \\ &= \det A_{11} \det A_{22} \end{aligned}$$

当 $k \geq 3$ 时 A 可以分块成 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & B \end{bmatrix}$, 从而 $\det A = \det A_{11} \det B$ 。同理 B 可以继续分块, 故有 $\det A = \prod_{j=1}^k \det A_{jj}$ 。

例题 2.10 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix}$

解

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \\
& = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \\
& \stackrel{\text{前者 } -c_i \rightarrow c_{i-1}}{=} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2-1 & x_1(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_1-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-1 & x_n(x_1-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_1-1) \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \\
& = - \prod_{i=1}^n (x_i-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} + 2 \prod_{i=1}^n x_i \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \\
& = (2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i-1)) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

最后一步使用到 Vandermonde 行列式的性质，会在后续提及。

除了加 $(1, 1, \dots, 1)$ 之外，还有可能需要添加其他类型的边，这需要根据行列式的特殊性质来判断。

例题 2.11

计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$

解

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第四行展开}} (-1)(-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & n-4 & \\ & & & & & & n-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{命题2.5}} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} (n-3)! = 6(n-3)!$$

例题 2.12 证明: $\det \begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj}.$

证明

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ 0 & a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第一行展开}} \det A + \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j+1} (-1) \det \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第一列展开}} \det A + \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j+3} \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} M_{kj} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j+3+1+k} \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} A_{kj} \\ &= \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj} \end{aligned}$$

例题 2.13 计算 $\det \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix}$

解 $n=1, 2$ 时自行计算。 $n \geq 3$ 时

$$\det \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 0 & a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{第一列展开}}{\text{第一项为0}} \sum_{k=1}^n (-1)^k \det \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & \cdots & a_{k-1} \\ a_{k+1} & \cdots & a_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} = 0$$

例题 2.14 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix}$

解

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & & & \\ -x_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -x_n & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

2.1.2.3 逐行/列加减

对相邻行与行/列与列之间关联度高(如相差一定倍数)时,可以采用逐行/列加减的方法。该方法也适用于行之间差距不大的情形。

例题 2.15 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & x & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{bmatrix}$

解 $\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & x & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=2, \dots, n+1]{-r_1 \rightarrow r_k} \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a_n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n (x-a_k)$

例题 2.16 计算 $\det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$

解

$$\det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[k=1,2,3]{-c_k \rightarrow c_{k+1}} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$= 0$

例题 2.17 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

解 $\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=1, \dots, n-1]{-ar_{k+1} \rightarrow r_k} \det \begin{bmatrix} 1-a^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1-a^n \end{bmatrix} = (1-a^n)^{n-1}$

 **笔记** 这题中的矩阵被称为轮换矩阵，我们会在后面讨论一般情形下的行列式。

例题 2.18 计算 $f(x) = \det \begin{bmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{bmatrix}$

解

$$\det \begin{bmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & x+a_{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=n-1, \dots, 1]{xc_{k+1} \rightarrow c_k} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k & * & * & \cdots & * & x+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一列展开}} (x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k)(-1)^{n+1} \det(-I_{n-1}) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

 **笔记** 实际上，这个例子并不平凡。题中所给出的矩阵与一个特殊的矩阵相关，这个矩阵是多项式 $f(x)$ 的友矩阵。以下给出定义：

定义 2.6 (友矩阵)

设 $f(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 次首一多项式, 则称 $A = -$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

为 $f(x)$ 的友矩阵。此时显然有 $\det(xI_n - A) = f(x)$, 即 A 的特征多项式为 $f(x)$ 。

 **笔记** 友矩阵可用于求数列通项, 同时也与最小多项式, 给定域上的相似标准型有关。

例题 2.19 计算 $\Delta = \det$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ & 2 & -1 & & & \\ & & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

解 令 $f(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-2} 2x^k$, 则 $\Delta = f(2) = 2^{n+1} - 2$ 。

例题 2.20 计算 Vandermonde 行列式:

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

解

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \xrightarrow[\forall k=n, \dots, 2]{-a_n c_{k-1} \rightarrow c_k} \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 - a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ 1 & a_2 - a_n & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_n) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一列展开}} (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_n) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k) \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

又有 $\Delta_1 = 1, \Delta_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$, 故归纳有 $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ 。

以下是一些 Vandermonde 行列式的应用。

例题 2.21 计算 $\det$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+x_1 & 1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & 1+x_{n+1} \\ x_1+x_1^2 & x_2+x_2^2 & x_3+x_3^2 & \cdots & x_{n+1}+x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^n & x_2^{n-1}+x_2^n & x_3^{n-1}+x_3^n & \cdots & x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

解

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+x_1 & 1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & 1+x_{n+1} \\ x_1+x_1^2 & x_2+x_2^2 & x_3+x_3^2 & \cdots & x_{n+1}+x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^n & x_2^{n-1}+x_2^n & x_3^{n-1}+x_3^n & \cdots & x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}^n \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=1, \dots, n]{-r_k \rightarrow r_{k+1}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

例题 2.22 计算

$$\det \begin{bmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

解

$$\det \begin{bmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k^n \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1} a_k^n \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i b_j - a_j b_i)$$

例题 2.23 (Lagrange 插值) 设 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 各不相同, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$, 证明: 存在唯一的 $n-1$ 次多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $f(a_i) = b_i, \forall i$.

证明 设 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ 满足条件, 则

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 a_n + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

由 Vandermonde 行列式的性质知系数矩阵可逆, 故解存在唯一。

例题 2.24 证明: $\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n = 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有零解。

证明 设 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是一组非零解, $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ 是 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中互异非零的值, $(l_1, l_2, \dots, l_k)$ 是对应出现次数, 则 $\sum_{j=1}^k l_j > 0 \Rightarrow l_j$ 不全为 0。此时原方程组即

$$\begin{cases} l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots + l_k y_k = 0 \\ l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + \cdots + l_k y_k^2 = 0 \\ \vdots \\ l_1 y_1^n + l_2 y_2^n + \cdots + l_k y_k^n = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{取前 } k \text{ 个}} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^k & y_2^k & \cdots & y_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0, \text{ 矛盾。}$$

例题 2.25 证明: 对 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n-1} k!$ 整除 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ 。

证明 令 $f_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, 则 $\frac{f_k(x)}{k!} = \binom{x}{k}$ 。在 $m < n$ 时视 $\binom{m}{n} = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta_n &= \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{适当的列变换}} \det \begin{bmatrix} 1 & f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) \\ 1 & f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_{n-1}(a_n) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\Delta_n}{\prod_{k=1}^{n-1} k!} &= \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{f_1(a_1)}{1!} & \frac{f_2(a_1)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_1)}{(n-1)!} \\ 1 & \frac{f_1(a_2)}{1!} & \frac{f_2(a_2)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_2)}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{f_1(a_n)}{1!} & \frac{f_2(a_n)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_n)}{(n-1)!} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \cdots & \binom{a_1}{n-1} \\ 1 & \binom{a_2}{1} & \binom{a_2}{2} & \cdots & \binom{a_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \cdots & \binom{a_n}{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}, \text{ 得证。} \end{aligned}$$

2.1.2.4 拆项与递推

对于一些特殊的行列式, 可以将其某一行/列拆成两项, 从而简化计算或得到递推。

例题 2.26 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$

证明 记 $e = (1, 1, 1)^T$, $\lambda = (x, y, z)^T$, 则

$$\Delta = \det(\lambda + ae, \lambda + be, \lambda + ce) = \det(\lambda, \lambda + be, \lambda + ce) + \det(ae, \lambda + be, \lambda + ce) = \det(\lambda, be, ce) + \det(ae, \lambda, \lambda) = 0.$$

例题 2.27 证明: $\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$

证明

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例题 2.28 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$

解

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n} + \det \begin{bmatrix} ca-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a-b \end{bmatrix}_{n \times n} + (a-c)\Delta_{n-1} = c(a-b)^{n-1} + (a-c)\Delta_{n-1}$$

对 $b=c$, 由于 $\Delta_1=a$, 计算得 $\Delta_n = nb(a-b)^{n-1} + (a-b)^n$ 。

对 $b \neq c$, 同理有 $\Delta_n = (a-c)^{n-1} + (a-b)\Delta_{n-1}$, 联立并消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$ 。

 **练习 2.1** (1) 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ (2) 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} d & b & b & \cdots & b & b \\ c & x & a & \cdots & a & a \\ c & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & a & a & \cdots & x & a \\ c & a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}_{n \times n}$

例题 2.29 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a+b & a & & & \\ & b & a+b & a & \\ & & b & a+b & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & a \\ & & & & b & a+b \end{bmatrix}_{n \times n}$

解

$$\Delta_n \xrightarrow{\text{第一行展开}} (a+b)\Delta_{n-1} - a \det \begin{bmatrix} b & a & & & \\ & a+b & a & & \\ & & b & a+b & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & a \\ & & & & b & a+b \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \xrightarrow{\text{第一列展开}} (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$$

$\Rightarrow \Delta_n - b\Delta_{n-1} = a(\Delta_{n-1} - b\Delta_{n-2})$ 。又 $\Delta_1 = a+b, \Delta_2 = a^2 + b^2 + ab \Rightarrow \Delta_n = a^n + b\Delta_{n-1}$ 。

若 $a=b$, 直接计算有 $\Delta_n = (n+1)a^n$ 。

若 $a \neq b$, 同理有 $\Delta_n = b^n + a\Delta_{n-1}$ 。联立消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$ 。

 **笔记** $a \neq b$ 时最终答案形式上不要求 $a \neq b$, 这是否意味着不必要进行分类讨论?

 **练习 2.2** 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{bmatrix}_{n \times n}$

事实上, 这类行列式被称为三对角行列式。我们有如下结论:

命题 2.7

$$\text{设 } \Delta_n = \det \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{C} \text{ 是 } \lambda^2 - a\lambda + bc = 0 \text{ 的根, 则有 } \Delta_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}.$$

证明 留作练习。

2.1.2.5 乘法分解

首先介绍几个引理:

引理 2.8

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det A = \det A^T$ 。

引理 2.9

$$\begin{aligned} (1) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B). \\ (2) \text{ 若 } D \text{ 可逆, 则 } \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C). \end{aligned}$$

证明 自行打洞即可。

引理 2.10

- (1) 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\det(A - B^T B) = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$
 (2) 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times m}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$ 。

证明 (1) $\det \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & I_m \end{bmatrix} \xrightarrow{-c_2 B \rightarrow c_1} \det \begin{bmatrix} A - B^T B & B^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \det(A - B^T B)$

又由引理 2.9(1), 有 $\det \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & I_m \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$, 即有 $\det(A - B^T B) = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$ 。

$$(2) \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & \lambda A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^n \det \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{引理 2.9(1)}} \lambda^n \det(\lambda I_m - BA),$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_n & \lambda A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^m \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{引理 2.9(2)}} \lambda^m \det(\lambda I_n - AB)$$

例题 2.30 设 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$, 计算 $\det A$ 。

解 A 行与行相互正交, 列与列相互正交, 因此可以考虑 AA^T 。 $\det(AA^T) = \det((a^2+b^2+c^2+d^2)I_4) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$, 又 $\det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$, 故 $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 。验证符号后可得 $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 。

例题 2.31 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & b_n & \\ & & c_n & d_n & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_1 & & & & d_1 \end{bmatrix}$

解

$$\begin{aligned} \text{记 } A &= \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ & & c_n & \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} & & b_1 \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} & & c_n \\ & \ddots & \\ c_1 & & \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1 \end{bmatrix}, \text{ 则若 } A \text{ 可逆,} \\ \Delta_n &= \det A \det(D - CA^{-1}B) = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \det \left(\begin{bmatrix} d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & c_n \\ & \ddots & \\ c_1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & b_1 \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n a_k \cdot \det \left(\begin{bmatrix} d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b_n c_n}{a_n} & & \\ & \ddots & \\ \frac{b_1 c_1}{a_1} & & \end{bmatrix} \right) = \prod_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k) \end{aligned}$$

若 A 不可逆, 则 $f(t) = \det(tI_n + A)$ 关于 t 的 n 次多项式, 由代数学基本定理, $f(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 有 n 个根, 设为 $x_1, \dots, x_n$ 。记 $\delta = \min_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x_k \neq 0}} |x_k| > 0$, 则 $\forall t \in \dot{U}(0, \delta), f(t) \neq 0$ 。故在 $\dot{U}(0, \delta)$ 内取一列 $\{t_m\} \rightarrow 0$, 则对 $\forall m \in \mathbb{N}^*$, 有

$\det \begin{bmatrix} A + tI_n & B \\ C & D \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n ((a_k + t)d_k - b_k c_k)$ 。由行列式及伴随对矩阵元素的连续性, 可令 $m \rightarrow \infty$, 得到与上面一致的答案。

 **笔记** 本题对不可逆的 A 的处理方法称为扰动法, 在比较多的题型中均有使用场景。

 **练习 2.3** 使用递推法完成例题 2.31。

例题 2.32* 计算 $\det \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{bmatrix}$ 。

解

$$\det \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \det \left(\begin{bmatrix} 10 & 3 & x \\ 3 & 10 & x \\ x & x & 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{99} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 99 \det \left(\begin{bmatrix} 10 & 3 & x \\ 3 & 10 & x \\ x & x & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{11} & \frac{8}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{8}{11} & \frac{94}{99} & \frac{29}{33} \\ \frac{6}{11} & \frac{29}{33} & \frac{10}{11} \end{bmatrix} \right) = 99 \det \begin{bmatrix} \frac{102}{11} & \frac{25}{11} & x - \frac{6}{11} \\ \frac{25}{11} & \frac{896}{99} & x - \frac{29}{33} \\ x - \frac{6}{11} & x - \frac{29}{33} & \frac{100}{11} \end{bmatrix} = -1364x^2 + 1950x + 70122$$

例题 2.33 计算 $\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 8 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3 & 4n & \cdots & n^2 - 1 \end{bmatrix}$

解

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 8 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3 & 4n & \cdots & n^2 - 1 \end{bmatrix} &= \det \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} - I_n \right) = (-1)^n \det \left(I_n - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \right) \\ &= (-1)^n \det \left(I_n - \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \right) = (-1)^n \left(1 - \sum_{k=1}^n k^2 \right) = (-1)^n \left(1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \end{aligned}$$

例题 2.34(2021B2Mid)* $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = i + j + \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 为 Kronecker 符号。求 $\det A$ 。

解

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left(I_n + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{bmatrix} \right) = \det \left(I_n + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(I_2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n k & \sum_{k=1}^n k^2 \\ \sum_{k=1}^n 1 & 1 + \sum_{k=1}^n k \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}n^4 + \frac{13}{12}n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

 笔记 这题还可以使用加边方法完成, 但是需要加两次。读者可以自行尝试。

 练习 2.4* 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & 1+x_2+y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1}+y_n \\ x_n+y_1 & \cdots & x_n+y_{n-1} & x_n+y_n \end{bmatrix}$

例题 2.35* 计算 $\det \begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix}$

解

$$\det \begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} \binom{n}{0}a_0^n & \binom{n}{1}a_0^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0}a_1^n & \binom{n}{1}a_1^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0}a_n^n & \binom{n}{1}a_n^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{bmatrix} \right)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

2.1.3 函数与行列式*

2.1.3.1 多项式与行列式

首先回到之前的一个例题：

例题 2.36 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$

解 考虑 $f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{最后一列展开}} A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$ ，所求即为 $-A_3$ 。

由代数学基本定理， $f(x)$ 所有零点为 a, b, c, d 。由韦达定理， $-\frac{A_3}{A_4} = a + b + c + d$ 。

$$\text{又 } A_4 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a),$$

$$\text{故 } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix} = -A_3 = (a+b+c+d)A_4 = (d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c+d).$$

重新考虑 Vandermonde 行列式，可以得到：

例题 2.37 计算 $\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ 。

解 考虑 $f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ 为 $n-1$ 次多项式, 则 $a_2, a_3, \dots, a_n$ 为 $f(x)$ 的 $n-1$ 个零点。

$$\Rightarrow f(x) = C \prod_{k=2}^n (x - a_k). \text{ 又 } f(0) = (-1)^{n-1} \prod_{k=2}^n a_k, \quad f(a_1) = \Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$f(0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{k=2}^n a_k \cdot \Delta_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n).$$

$$\Rightarrow C = (-1)^{n-1} \Delta_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n), \quad \Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \Delta_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) \prod_{k=2}^n (a_k - a_1).$$

$$\text{递推得 } \Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

2.1.3.2 行列式的导数与积分

命题 2.11

设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, $a_{ij}(t)$ 连续可导, 则 $\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{k=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ 。

特别地, 若 $A(t)$ 可逆, 则 $\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \cdot \operatorname{tr} \left(A^{-1}(t) \cdot \frac{dA(t)}{dt} \right)$, 其中 $\frac{dA(t)}{dt}$ 表示对 $A(t)$ 元素逐个求导后得到的矩阵。

证明 $A(t) = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} \prod_{k=1}^n a_{kj_k}(t)$

$$\begin{aligned} A'(t) &= \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} \sum_{l=1}^n \left(a'_{lj_l}(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n a_{kj_k}(t) \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a'_{lj_l}(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n a_{kj_k}(t) \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \det \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{l1}(t) & \cdots & a'_{ln}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例题 2.38 n 是偶数, 计算 $\det$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\text{解 } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{bmatrix} = n! \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{bmatrix} = (n-1)! \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ \frac{n^2}{2} & \frac{n^3}{3} & \cdots & \frac{n^{n+1}}{n+1} & \frac{n^{n+2}}{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } f(x) = (n-1)! \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{n+1}}{n+1} & \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{bmatrix}, \text{ 则 } f(n) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{bmatrix}, f(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{由命题 2.11, } f'(x) &= (n-1)! \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ x & x^2 & \cdots & x^n & x^{n+1} \end{bmatrix} = (n-1)! x \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} & n^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{bmatrix} \\ &= (n-1)! x \cdot \prod_{i \leq j \leq n} (j-i) \cdot \prod_{k=1}^n (x-k) \triangleq C \cdot \prod_{k=0}^n (x-k), \text{ 其中 } C = (n-1)! \prod_{i \leq j \leq n} (j-i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(n) &= \int_0^n f'(x) dx + f(0) = C \int_0^n x(x-1) \cdots (x-n) dx \\ &\stackrel{y=n-x}{=} \frac{C}{2} \left(\int_0^n x(x-1) \cdots (x-n) dx - \int_n^0 (-y)(1-y) \cdots (n-y) dy \right) \\ &= \frac{C}{2} \left(\int_0^n x(x-1) \cdots (x-n) dx + (-1)^{n+3} \int_0^n y(y-1) \cdots (y-n) dy \right) \stackrel{2|n}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n & n^{n+1} \\ \frac{n}{2} & \frac{n^2}{3} & \cdots & \frac{n^n}{n+1} & \frac{n^{n+1}}{n+2} \end{bmatrix} = 0.$$

2.1.3.3 行列式与 Taylor 公式

还是回到之前的例题:

$$\text{例题 2.39 计算 } D_n(x) = \det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$$

解 在 a 处进行 Taylor 展开, 其中 $(x-\xi)(a-\xi) < 0$:

$$D_n(x) = D_n(a) + D'_n(a)(x-a) + \frac{D''_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{D_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{D_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{D_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$D'_n(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} + \cdots + \det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = nD_{n-1}(x)$$

$\Rightarrow D_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)D_{n-k}(x)$, 又 $D_2(a) = D_3(a) = \cdots = D_n(a) = 0$, 有 $D'_n(a) = \cdots = D_n^{(n-2)}(a) = 0$
 而 $D_n^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2 \cdot D_1(x) = n!x$, $D_n^{(n)}(x) = n!D_0(x) = n!$, 由 $D_n(x)$ 是 n 次多项式, $D_n^{(n+1)}(x) = 0$.
 $\Rightarrow D_n(x) = \frac{D_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{D_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = na(x-a)^{n-1} + (x-a)^n$.

例题 2.40 设 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导, $\forall x \in I, |f(x)| < M_0, |f^{(n)}(x)| < M_n$. 证明: $\exists M_1, \cdots, M_{n-1}$, 使得 $\forall x \in I, k = 1, \cdots, n-1, |f^{(k)}(x)| < M_k$.

证明 取非 0 互异 $a_1, \cdots, a_{n-1} \in I$, 在 x 处作 Taylor 展开: $f(x+a_i) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k + \frac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}a_i^n$.

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k \right| = |f(x+a_i) - f(x) - \frac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}a_i^n| \leq 2M_0 + \frac{A}{n!}M_n, \text{ 其中 } A = \max_{1 \leq i \leq n-1} |a_i|^n.$$

令 $A_i(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k$, 则 $|A_i(x)| \leq 2M_0 + \frac{A}{n!}M_n$, 且有

$$\begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_1^2}{2!} & \cdots & \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ a_2 & \frac{a_2^2}{2!} & \cdots & \frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \frac{a_n^2}{2!} & \cdots & \frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_n(x) \end{bmatrix}, \forall x \in I. \text{ 记 } D_n = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_1^2}{2!} & \cdots & \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ a_2 & \frac{a_2^2}{2!} & \cdots & \frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \frac{a_n^2}{2!} & \cdots & \frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix},$$

$$\text{由 } \det D_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k!} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \neq 0, \text{ 方程组有唯一解 } \begin{bmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} = D_n^{-1} \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_n(x) \end{bmatrix},$$

不妨设为 $f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} A_j(x)$, 则 $|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_{jk}| |A_j(x)| \leq \left(2M_0 + \frac{A}{n!}M_n\right) \sum_{j=1}^n |\lambda_{jk}| \triangleq M_k$.

2.1.4 综合练习 *

例题 2.41(轮换矩阵的行列式) 设 $\text{circ}(a_1, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$, 计算 $\det \text{circ}(a_1, \cdots, a_n)$.

解 令 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}x^k$, 记 $\omega_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}}$, 则 $\omega_j \cdot \omega_k = \omega_{j+k}$. 记 $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{bmatrix}$,

则 $\det \Omega = \prod_{i \leq j < k \leq n} (\omega_k - \omega_j) \neq 0$. 记 $\Lambda = (\lambda_{ij})_{n \times n} = \text{circ}(a_1, \cdots, a_n)\Omega$, 则 $\det \Lambda = \det \text{circ}(a_1, \cdots, a_n) \cdot \det \Omega$.

考虑 $\lambda_{11} = 1a_1 + \omega_1 a_2 + \cdots + \omega_1^{n-1} a_n = f(\omega_1)$, $\lambda_{21} = 1a_n + \omega_1 a_1 + \cdots + \omega_1^{n-1} a_{n-1} = \omega_1 f(\omega_1)$, 同理可得

$$\Lambda = \begin{bmatrix} f(\omega_1) & f(\omega_2) & \cdots & f(\omega_n) \\ \omega_1 f(\omega_1) & \omega_2 f(\omega_2) & \cdots & \omega_n f(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} f(\omega_1) & \omega_2^{n-1} f(\omega_2) & \cdots & \omega_n^{n-1} f(\omega_n) \end{bmatrix} \Rightarrow \det \Lambda = \prod_{l=1}^n f(\omega_l) \cdot \prod_{i \leq j < k \leq n} (\omega_k - \omega_j)$$

$$\Rightarrow \det \text{circ}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\det \Lambda}{\det \Omega} = \prod_{k=1}^n f(\omega_k).$$

练习 2.5 计算 $\text{circ}(a_1, \dots, a_n)^{-1}$

例题 2.42(Cauchy 行列式) 设复数列 $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n$ 满足 $x_i \neq y_j, \forall i, j$, 计算

$$\det C_n(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\forall k=1, \dots, n-1]{-r_n \rightarrow r_k} \det \begin{bmatrix} \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\forall k=1, \dots, n-1]{-c_n \rightarrow c_k} \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_1 - y_{n-1})(x_1 - y_n)} \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_2 - y_{n-1})(x_2 - y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_{n-1} - y_1)(x_{n-1} - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_{n-1} - y_2)(x_{n-1} - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_{n-1} - y_{n-1})(x_{n-1} - y_n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n - x_j)(y_j - y_n)}{(x_n - y_j)(x_j - y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \frac{1}{x_{n-1} - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} \end{bmatrix} \\
&\stackrel{\text{递推}}{=} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i - y_j)}
\end{aligned}$$

 **笔记** $x_n = n-1, y_n = -n$ 时, $C_n(x, y)$ 称为 Hilbert 矩阵。Hilbert 矩阵正定且高度病态 (对任意一个元素的微小扰动都会导致行列式和逆的巨大变化)。

第三章 秩与线性空间

3.1 第六次作业解答

作业 3.1 (Ch4 T42)

设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^2 = I$, 求方阵 $\text{diag}(I+A, I-A)$ 的相抵标准形。

解 即求 $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A)$ 。一方面, $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) \geq \text{rank}(I+A+I-A) = n$,

另一方面, 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) \leq \text{rank}((I+A)(I-A)) + n = n$, 故 $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) = n$ 。

故相抵标准形为 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。

作业 3.2 (Ch4 T43)

设 A 是 n 阶方阵, 证明: $\text{rank} A^* = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n-2 \end{cases}$

证明 若 $\text{rank}(A) = n$, 则 A 可逆, 又由 $A^*A = \det A I_n$ 有 A^* 可逆, 故 $\text{rank}(A^*) = n$ 。

若 $\text{rank}(A) = n-1$, 则 A 有非零 $n-1$ 阶子式, 故 $\text{rank}(A^*) \geq 1$ 。又由 Sylvester 不等式,

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A^*) \leq \text{rank}(AA^*) + n = n \Rightarrow \text{rank}(A^*) \leq 1$, 故 $\text{rank}(A^*) = 1$ 。

若 $\text{rank}(A) \leq n-2$, 则 A 没有非零 $n-1$ 阶子式, 故 $A^* = O$, $(\text{rank})(A^*) = 0$ 。

作业 3.3 (Ch4 T45)

证明下列关于秩的不等式:

$$(1) \max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B), \text{rank}(A+B)\} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

$$(3) \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

证明

(1) 由于 $A = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}$, $A+B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$, 乘法不增大矩阵的秩, 有 $\text{rank}(A) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, $\text{rank}(B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, 故 $\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B), \text{rank}(A+B)\} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 。

(2) $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} \geq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 。

(3) 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{F}^{m \times q}$, $\text{rank}(A) = r$, $\text{rank}(B) = s$, 则 $\exists 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m; 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$; $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq p; 1 \leq l_1 < \dots < l_s \leq q$, 使得 $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$, $B \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_s \\ l_1 & \dots & l_s \end{pmatrix} \neq 0$ 。

记前面两个行列式对应的方阵是 $A_1, B_1, M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } M \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & m+k_1 & \cdots & m+k_s \\ j_1 & \cdots & j_r & n+l_1 & \cdots & n+l_s \end{pmatrix} &= \det \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{bmatrix} = \det A_1 \det B_1 \neq 0. \\ \Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \text{ 有 } r+s \text{ 阶非零子式, 故 } \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} &\geq r+s = \text{rank}(A) + \text{rank}(B). \end{aligned}$$

作业 3.4 (补充题)

若 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 是列满秩的, 证明: A 是某个 m 阶可逆方阵的前 n 列。

证明 显然有 $m \geq n$, 此时 $\exists P \in GL_m(\mathbb{F}), Q \in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. $A = P \begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} Q \\ O \end{bmatrix}$,

这是可逆矩阵 $P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{m-n} \end{bmatrix}$ 的前 n 列。

作业 3.5 (Ch5 T2)

设 $a_1 = (0, 1, -2), a_2 = (2, 1, 3), a_3 = (4, 5, 0)$ 是三维几何空间中的三个向量。能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合? 这三个向量是否共面?

解 注意到 $3a_1 + 2a_2 = a_3$, 故 a_3 可由 a_1, a_2 线性表出, 故 a_1, a_2, a_3 共面。

作业 3.6 (Ch5 T3)

在 $\mathbb{F}^4$ 中, 判断向量 b 能否写成 a_1, a_2, a_3 的线性组合, 若能, 请写出一种表示方式:

(1) $a_1 = (-1, 3, 0, -5), a_2 = (2, 0, 7, -3), a_3 = (-4, 1, -2, 6), b = (8, 3, -1, -25)$.

(2) $a_1 = (3, -5, 2, -4)^T, a_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, a_3 = (3, 11, -5, 10)^T, b = (2, -30, 13, -26)^T$.

解 (1) 能。 $b = 2a_1 - a_2 - 3a_3$ 。

(2) 能。 $b = 2a_1 - 5a_2$ (答案不唯一)。

作业 3.7 (Ch5 T4)

设 $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 1, 1, 1)$ 。证明: $\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合, 且表示唯一。

证明 设 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵行列式非零, 故方程组的解唯一, 即表示唯一。

作业 3.8 (Ch5 T10)

判断下列向量组是否线性相关:

(1) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$

(3) $a_1 = (-2, 1, 0, 3), a_2 = (1, -3, 2, 4), a_3 = (3, 0, 2, -1), a_4 = (2, -2, 4, 6)$

解 (1) $\det(a_1^T, a_2^T, a_3^T) \neq 0$, 故线性无关。

(2) $\det(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T) = 0$, 故线性相关。

3.2 秩

在开始之前，先回顾一些秩的定义和性质。

定义 3.9

对于 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ，存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ，使得 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。此时，称 r 为 A 的秩。

我们还有一个等价的定义：

定义 3.10

设 A 至少有一个 r 阶非零子式，且所有 $r+1$ 阶子式均为零，则称 r 为 A 的秩。

秩满足以下性质：

命题 3.11

1. $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$.
2. $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.
3. 若 P 为可逆矩阵，则 $\text{rank}(PA) = \text{rank}(AP) = \text{rank}(A)$.
4. $\text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$
5. $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

3.2.1 秩不等式

定理 3.12 (Frobenius)

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$$

证明

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) &\leq \text{rank} \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix} = \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \end{aligned}$$

特别的，取 $B = I_n$ ，就可以得到：

推论 3.13 (Sylvester)

$$\text{rank}(AC) + n \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

例题 3.1 (2014-2015 期中) 证明：若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 且 $AB = O$ ，则 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

证明 由 Sylvester 不等式， $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(AB) + n = n$

例题 3.2 (2012-2013 期中) 证明：对于任意 n 阶方阵 A 均有，等号成立当且仅当 $A^2 = I_n$

证明 首先有 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq \text{rank}((I_n - A) + (I_n + A)) = n$ 。考虑等号成立条件:

($\Leftarrow$) 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \leq \text{rank}((I_n - A)(I_n + A)) + n = n$ 。

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} I_n - A & O \\ O & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & I_n - A \\ O & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & 2I_n \\ & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & 2I_n \\ \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & 2I_n \\ \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \end{bmatrix}$$

此时由 $\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - A & O \\ O & I_n + A \end{bmatrix} = n$ 即有 $I_n - A^2 = O$, 即 $A^2 = I_n$ 。

练习 3.1 (2013-2014 期中) 证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(2I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = 2A$

例题 3.3 (2019-2020 期中) 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $A^2 = O$, 证明: $\text{rank}(A) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 并对每个 n 给出一个 n 阶方阵 A 使得 $A^2 = O$ 且 $\text{rank}(A) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

证明 不等式是显然的, 只给出构造。记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 取 $A = \text{diag}(J, \dots, J)$ 或 $A = \text{diag}(J, \dots, J, 0)$ 即可。

例题 3.4 A 是 n 阶方阵, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+1})$, 证明: $\forall m > N, \text{rank}(A^m) = \text{rank}(A^N)$

证明 只证明 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+1}) = \text{rank}(A^{N+2})$, 剩余递推即可。

一方面, 由 Frobenius 不等式, $\text{rank}(A^N A) + \text{rank}(A A^N) \leq \text{rank}(A A^N A) + \text{rank}(A^N) \Rightarrow \text{rank}(A^N) \leq \text{rank}(A^{N+2})$

另一方面, $\text{rank}(A^{N+2}) = \text{rank}(A^N A^2) \leq \text{rank}(A^N)$, 因此 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+2})$ 。

3.2.2 初等变换与秩

例题 3.5 (2011-2012 期中) 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 则 $I_m - BA, I_m - AB, \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ 的秩有什么关系?

解 $\begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & O \\ B & I_n - BA \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{bmatrix}$

故 $n + \text{rank}(I_m - AB) = m + \text{rank}(I_n - BA) = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$

例题 3.6 求下列矩阵的秩:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 1 - a_1 b_1 & -a_1 b_2 & \cdots & -a_1 b_n \\ -a_2 b_1 & 1 - a_2 b_2 & \cdots & -a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n b_1 & -a_n b_2 & \cdots & 1 - a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$(3) C = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

解 (1) 记 $A = \begin{bmatrix} I_m & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\text{rank}(A) = m + \text{rank}(1 - \beta^T \alpha)$ 。若 $\beta^T \alpha = 1$, 则 $\text{rank}(A) = m + 1$, 否则 $\text{rank}(A) = m$ 。

$$(2) B = I_n - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = I_n - \alpha \beta^T, \text{ 此时 } 1 + \text{rank}(B) = m + \text{rank}(1 - \beta^T \alpha)。$$

$$(3) C = (a-b)I_n + \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \text{ 若 } a=b=0, \text{ 则 } \text{rank}(C)=0; \text{ 若 } a=b \neq 0, \text{ 则 } \text{rank}(C)=1.$$

$$\text{对 } a \neq b, C = (a-b) \left(I_n - \begin{bmatrix} -\frac{b}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} \\ \vdots \\ -\frac{b}{a-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right), \text{ 若 } b = -\frac{n}{n-1}, \text{ 则 } \text{rank}(C) = n-1, \text{ 否则 } \text{rank}(C) = n.$$

例题 3.7 (2014-2015 期中)(满秩分解) 证明: 若 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\text{rank}(A) = r$ 等价于存在列满秩矩阵 $B \in \mathbb{F}^{m \times r}$ 与行满秩矩阵 $C \in \mathbb{F}^{r \times n}$ 使得 $A = BC$ 。

证明 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q$ 。

取 $B = P \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q$ 即可。

例题 3.8 (2016-2017 期中) A 是 n 阶方阵, $\text{rank}(A) = 1, c = \text{tr}(A)$, 证明: $A^2 = cA$, 并求 $\det(I + A)$

解 对 A 作满秩分解 $A = \beta \alpha^T$, 其中 α, β 是列向量, 则 $A^2 = \beta \alpha^T \beta \alpha^T = \beta (\alpha^T \beta) \alpha^T = cA$ 。

其中 $c = \text{tr}(A) = \text{tr}(\beta \alpha^T) = \text{tr}(\alpha^T \beta) = \alpha^T \beta$. $\det(I + A) = \det(I + \beta \alpha^T) = \det(1 + \alpha^T \beta) = 1 + c$ 。

例题 3.9 (2015-2016 期中) 判断: 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 则 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$

证明 错误。 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ 满足 $AB \neq O, BA = O$ 。

例题 3.10 设 A, B 为 n 阶方阵, $A^2 = A, B^2 = B, I - A - B$ 可逆, 证明 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

证明 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) = \text{rank}(I - A - B) - n + \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A - A^2 - BA) = \text{rank}(BA)$

而 $\text{rank}(BA) \leq \text{rank}(B)$, 得到 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$ 。同理 $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$, 故 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。

如果注意力足够好, 则有更简单的做法:

证明 注意到 $(I - A - B)B = -AB = A(I - A - B)$, 由左乘或右乘可逆矩阵不改变秩, 有 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$

例题 3.11 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^2 = A$, 证明: $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$

证明 记 $r = \text{rank}(A)$, 则 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), s.t. A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$, 此时 $A^2 = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A$ 。

消去可逆矩阵, $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。对 QP 作分块 $\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, 代入前式, 得到

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \Rightarrow R_{11} = I_r, \text{ 此时}$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \left(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ O & O \end{bmatrix} = r = \text{rank}(A)。$$

3.3 线性空间

3.3.1 线性空间的定义

定义 3.14 (线性空间)

V 是非空集合, 若 V 上定义了两个运算: 加法和数乘, 满足: ① 加法交换律, ② 加法结合律, ③ 加法有单位元, ④ 加法有逆元, ⑤ 数乘左分配律, ⑥ 数乘右分配律, ⑦ 数乘结合律, ⑧ 数乘有单位元, 则称 V 是一个线性空间。

 **笔记** 课本 §5.1–§5.5 讨论的数组空间 $\mathbb{F}^n$ 实际上是上述定义中的一个特例, 即 $\mathbb{F}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n\}$ 。

定义 3.15 (子空间)

V 是线性空间, $V_1 \subset V$, 若 V_1 对线性运算封闭, 则称 V_1 是 V 的子空间。

例题 3.12 $V = \mathbb{F}^{n \times n}$, 判断: $V_1 = \{A \in V \mid \text{tr}(A) = 0\}$, $V_2 = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ 是否是 V 的子空间?

解 V_1 是 V 的子空间, V_2 不是 V 的子空间。

3.3.2 线性相关与线性无关

定义 3.16 (线性相关)

V 是线性空间, $v_1, \dots, v_n \in V$, 则以下条件等价:

1. $v_1, \dots, v_n$ 线性相关。
2. $\exists v_i$ 可被其他元素线性表出, 即 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ s.t. $v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$ 。
3. 存在不全为 0 的系数将 $v_1, \dots, v_n$ 线性组合为 0, 即 $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 不全为 0, 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ 。

 **笔记** (1) 此处的 3. 常用于证明某一向量组线性相关或线性无关。

(2) 此定义并不要求 $V = \mathbb{F}^n$, 对一般线性空间 (甚至是无穷维线性空间) 如 $C[0, 1]$ 也可以这么定义。

在 $V = \mathbb{F}^n$ 的数组空间中有以下结论:

命题 3.17

1. 设 $V_1 \subset V_2 \subset V$, $V_1 = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$, $V_2 = \{a_1, \dots, a_n\}$, 则若 V_1 线性相关, 则 V_2 线性相关; 若 V_2 线性无关, 则 V_1 线性无关。
2. 设 $a_1, \dots, a_m \in V$, a_j , 则 $m > n$ 时 $a_1, \dots, a_m$ 线性相关, $m = n$ 时 $a_1, \dots, a_m$ 线性相关当且仅当 $\det(a_1, \dots, a_m) = 0$ 。
3. 设 $a_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})^T \in \mathbb{F}^r$, $b_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, \dots, a_{i_n})^T \in \mathbb{F}^n$, $n > r$, 则称 b_i 的前 r 个分量的投影为 a_i , 记作 $a_i = \pi_r(b_i)$ 。此时若 $a_i, \dots, a_m$ 线性无关, 则 $b_i, \dots, b_m$ 线性无关; 若 $b_1, \dots, b_m$ 线性相关, 则 $a_1, \dots, a_m$ 线性相关。

 **笔记** 注意区别第一条与第三条。

例题 3.13 若向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关, $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ 线性相关, 证明: b 可以表示成 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的线性组合, 且表示唯一。

证明 由 $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ 线性相关有存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu$ 不全为 0, 使得 $\sum \lambda_i a_i + \mu b = 0$, 且 $\mu \neq 0$, 否则与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关矛盾。故此时即有 $b = -\sum \frac{\lambda_i}{\mu} a_i$ 。

若存在 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 与 $\eta_1, \dots, \eta_n$, 使得 $\sum \xi_i a_i = \sum \eta_i a_i = b$, 则 $\sum (\xi_i - \eta_i) a_i = 0$, 由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关, 有 $\xi_i = \eta_i$, 故表示唯一。

例题 3.14 设 $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, f_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, f_n(x) = e^{\lambda_n x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 两两不同。证明: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关。

证明 若 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关, 则存在 $a_1, \dots, a_n$ 不全为 0 使得 $g(x) = \sum a_i e^{\lambda_i x} = 0$ 。此时 $g^{(k)}(x) = \sum a_i \lambda_i^k e^{\lambda_i x} = 0$ 。取 $x = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ 并把方程组写成矩阵形式, 即有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵行列式为 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, 此时方程组只有零解, 故 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关。

3.3.3 秩与极大线性无关组

定义 3.18

V 是线性空间, $v_1, \dots, v_n \in V$, 若 $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ 线性无关, 且 $\forall k \notin \{i_1, \dots, i_r\}$, 有 $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v_k$ 线性相关, 则称 $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ 是 V 的一个极大线性无关组, r 为这个向量组的秩。

笔记 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 但是极大线性无关组的元素个数是唯一的, 称为这个向量组的秩。关于极大线性无关组与秩, 有以下结论:

命题 3.19

1. 向量组 $\{a_1, \dots, a_m\} \sim \{b_1, \dots, b_n\} \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\}$ 可以相互线性表出
 $\Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$
2. 若向量组 $\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\}$ 等价且均线性无关, 则 $m = n$ 。
3. 若 $\{a_1, \dots, a_r\}$ 是 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 的极大线性无关组, 则 $r \leq n$, $\langle a_1, \dots, a_r \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ 。
4. 若 $\{b_1, \dots, b_s\}$ 可由 $\{a_1, \dots, a_r\}$ 线性表出, 则 $\text{rank}(b_1, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, \dots, a_r)$ 。
5. $b = \sum \lambda_i a_i$ 时 $\text{rank}(a_1, \dots, a_n, b) = \text{rank}(a_1, \dots, a_n)$ 。
6. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 $\text{rank}(A) = A$ 的行秩 = A 的列秩。

对于数组空间内一组给定的向量, 可以使用以下的方法计算其极大线性无关组:

算法 3.20

对 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}^n$, 将 a_i 作为列向量排成矩阵 $A = (a_1, \dots, a_m)$, 对 A 进行初等行变换 (不可作列变换, 否

则会改变顺序), 得到行阶梯形矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ & 1 & * & * & \cdots & * \\ & & & 1 & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

则 B 的每一行首个非零元所在列对应的向量即为 $a_1, \dots, a_m$ 的极大线性无关组。



例题 3.15 对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ 是列向量, $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $A^k x = 0, A^{k-1} x \neq 0$, 证明: $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。

证明 若 $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性相关, 则 $\exists m \in \mathbb{N}$ 使得 $A^m x, A^{m+1}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性相关,

$A^{m+1}x, A^{m+2}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。此时 $\exists \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{k-1}$ 不全为 0, 使得 $\sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^j x = 0$ 。

此时 $0 = A \sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^j x = \sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^{j+1} x = \sum_{j=m+1}^{k-1} \lambda_j A^j x$ 。由 $A^{m+1}x, A^{m+2}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关,

有 $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{k-1} = 0$, 代入回前式, 有 $\lambda_m = 0$, 与 $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{k-1}$ 不全为 0 矛盾。

故 $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。

第四章 线性变换与矩阵的相似

4.1 第十次作业解答

作业 4.1 (Ch6 T13)

求下列矩阵的全部特征值和全部特征向量：

$$(2)A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解 (2) $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$

$\Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$, 即特征值为 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 。

对 $\lambda_1 = e^{i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = e^{i\theta}, x_1 = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0, \lambda_2 = e^{-i\theta}, x_2 = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

(3) $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1)\lambda - 0 + (-1)(0 - 0) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 即特征值为 1(二重), -1。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(\lambda_1 I - B)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时为 0。

对 $\lambda_3 = -1$, 解方程组 $(\lambda_3 I - B)x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时为 0, $\lambda_3 = -1, x_3 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

(5) $p_C(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^3 - 3(\lambda - 2) + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 即特征值为 1(二重), 4。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(\lambda_1 I - C)x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix},$

t_1, t_2 不同时为 0。

对 $\lambda_3 = 4$, 解方程组 $(\lambda_3 I - C)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix}$, t_1, t_2 不同时为 0, $\lambda_3 = 4, x_3 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ 。

作业 4.2 (Ch6 T14)

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)^T$ 将单位圆 C 映射为椭圆 C' , 求椭圆 C' 的长短半轴方向与长度, 以及椭圆的面积。

解 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$, 对应特征向量为 $x_1 = t_1 \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^T, x_2 = t_2 \left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^T, t_1, t_2 \neq 0$
故长轴长度为 $2|\lambda_1| = 4 + 2\sqrt{5}$, 方向为 x_1 方向; 短轴长度为 $2|\lambda_2| = 2\sqrt{5} - 4$, 方向为 x_2 方向;

椭圆面积为 $\pi r^2 \cdot |\det A| = \pi$ 。

 **笔记** 行列式缩放的是有向面积, 因此面积缩放倍率是 $|\det A|$ 而不是 $\det A$ 。

作业 4.3 (Ch6 T16)

设 A 为方阵, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: 如果 λ_0 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值; 且如果 x 是属于 λ_0 的特征向量, 则 x 也是矩阵 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

证明 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 对 A 的特征值 λ_0 , 其特征向量为 x , 则有 $Ax = \lambda_0 x \Rightarrow A^m x = A^{m-1} \lambda_0 x = \cdots = \lambda_0^m x$ 。

此时 $f(A)x = \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i\right)x = \sum_{i=0}^n a_i A^i x = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i x = \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i\right)x = f(\lambda_0)x$

即 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

作业 4.4 (Ch6 T17)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $3A + 2I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 故 $3A + 2I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 5, \tilde{\lambda}_3 = 8$, $\det(3A + 2I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 200$ 。

作业 4.5 (Ch6 T18)

(1) 若 $A^2 = I$, 证明: A 的特征值只能是 ± 1 ;

(2) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T = -A$, 证明 A 的特征值为零或纯虚数。

证明 (1) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $0 = (A^2 - I)x = A^2 x - x = (\lambda^2 - 1)x = 0$, 由 $x \neq 0$ 即有 $\lambda = \pm 1$ 。

(2) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 取共轭转置, $\bar{\lambda}x^H = x^H A^T = -x^H A$

$\Rightarrow \bar{\lambda}x^H x = -x^H A^T x = -x^H \lambda x \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})x^H x = 0$ 。又由 $x \neq 0$ 有 $x^H x = |x|^2 \neq 0$,

故 $\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$, 即 λ 是零或纯虚数。

作业 4.6 (Ch6 T33)

设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$, 由此 $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$ 。

证明

存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PTP^{-1}$, 其中 T 是上三角矩阵, 且 T 的对角线元素为 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

由于 $f(\lambda)$ 是多项式, 可以直接作用于矩阵 A , 直接计算可以得到 $f(A) = f(PTP^{-1}) = Pf(T)P^{-1}$ 。

由于 T 是上三角矩阵, 多项式 $f(T)$ 也将是上三角矩阵。具体地, $f(T)$ 的对角线元素为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$,

$$\text{即 } f(T) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

由于 $f(A) = Pf(T)P^{-1}$, 且 $f(T)$ 是上三角矩阵, 其对角线元素为 $f(\lambda_i)$, 可以得出 $f(A)$ 的特征值也是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 。

方阵的行列式等于其特征值的乘积。因此, $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$ 。

作业 4.7 (Ch6 T34)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 2, \tilde{\lambda}_3 = 7$, $\det(A^3 - 2A + 3I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 28$ 。

作业 4.8 (Ch6 T44)

设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间, 线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 满足 $\mathcal{A}(1) = x^2 + x + 3, \mathcal{A}(x) = 2x + 1, \mathcal{A}(x^2) = 2x^2 + 3$, 求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量。

解 取 V 的一组基 $\{1, x, x^2\}$, 则 $\mathcal{A}$ 在这组基下矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \text{ 即特征值为 } 2, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{对 } \lambda_1 = 2, \text{ 解方程组 } (\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 故特征向量为 } t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$$

$$\text{对 } \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \text{ 解方程组 } (\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} & -1 & -3 \\ -1 & \frac{1 + \sqrt{17}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{故特征向量为 } t \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$$

$$\text{对 } \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \text{ 解方程组 } (\lambda_3 I - A)x = \begin{bmatrix} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} & -1 & -3 \\ -1 & \frac{1 - \sqrt{17}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故特征向量为 $t \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = 2, x_1 = t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, x_2 = t \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2},$

$x_3 = t \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

4.2 矩阵的相似

与相抵类似, $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A 的相抵标准形是 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 为了给出相似的标准型和最简单的代表元, 需要使用到以下特征值的知识。

定义 4.9 (矩阵的特征值和特征向量)

对 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 若 $\exists 0 \neq x \in \mathbb{F}^n, \lambda \in \mathbb{F}, s.t. Ax = \lambda x$, 则称 λ 是 A 的特征值, x 是属于特征值 λ 的对应特征向量。

 **笔记** 由于矩阵可以看作在特定基下的线性变换, 此时 Ax 是向量 x 在线性变换 $\mathcal{A}$ 下的像, 此时 $Ax = \lambda x$ 是指线性变换 $\mathcal{A}$ 对 x 的作用是将 x 拉伸 λ 倍。

定义 4.10 (线性变换的特征值和特征向量)

对 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, 若 $\exists 0 \neq \alpha \in V, \lambda \in \mathbb{F}, s.t. \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha$, 则称 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, α 是属于特征值 λ 的对应特征向量。

定理 4.11 (线性变换的特征值与其在一组基下特征值的关系)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V), \dim V = n, \mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A, A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则 $\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha \Leftrightarrow Ax = \lambda x$, 其中 x 为 α 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的坐标。

 **笔记** 该定理给出了一般线性变换与矩阵的特征值与特征向量的关系, 从而以下只讨论矩阵的特征值。

算法 4.12 (特征值与特征向量的计算)

对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 可以通过以下步骤计算其特征值与特征向量:

1. 计算特征多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \sum_{i=1}^s \lambda_i = n$, 这是关于 λ 的一个 n 次多项式, 从而有 n 个根;
2. 令 $p_A(\lambda) = 0$, 得到特征值 $\lambda_1(n_1 \text{ 重}), \lambda_2(n_2 \text{ 重}) \cdots \lambda_s(n_s \text{ 重})$, 这些是 A 的特征值;
3. 对每一个 $\lambda_i (1 \leq i \leq s)$, 求出线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的非零解, 即为 λ_i 的特征向量;

 **笔记**

1. $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的解空间 V_i 称为特征值 λ_i 对应的特征子空间。
2. λ_i 作为 $p_A(\lambda) = 0$ 的根的重数称为 λ_i 的代数重数; $\dim V_i := m_i$ 称为 λ_i 的几何重数

3. 可以证明 $m_i \leq n_i$, 即几何重数小于等于代数重数。

命题 4.13 (特征值的性质)

- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, $f(\lambda)$ 是多项式, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 的对应特征向量;
- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ 是 A^T 的特征值, 但 x 不一定是对应特征向量;
- 若 λ 是 A 的特征值, 且 $A^T A = I$, 则 $|\lambda| = 1$;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = A^T$, 则 λ 是实数, 且存在 P 满足 $P^T P = I$, 使得 $P^{-1} A P$ 是对角矩阵;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = -A^T$, 则 λ 是纯虚数或零。

定理 4.14

特征值和特征向量是相似不变量, 即若 A, B 相似, 则 A, B 有相同的特征值。

定理 4.15

若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 则 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ 。

现在考虑相似标准形的一种简单情形, 即可相似于对角矩阵。一般情形, 即相似于 Jordan 标准形会在后面提及。

从定义出发, A 可对角化 $\Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{C}), \Lambda$ 是对角矩阵, 使得 $A = T \Lambda T^{-1}$ 。设 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), T = (x_1, \dots, x_n)$, 则相似等价于 $AT = \Lambda T = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ 。故只需要找到一组线性无关的特征向量排成 T 即可。如此我们也找到了求出相似对角化的过渡矩阵的方法。

引理 4.16

对 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, A 属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理 4.17

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量。

因此可以得到一些可对角化的条件:

命题 4.18

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 可对角化;
- 若方阵 A 的所有特征值的代数重数等于几何重数, 则 A 可对角化;

例题 4.1 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 证明: AB 与 BA 的非零特征值相同。

证明

$$\begin{aligned} \lambda^n \det(\lambda I_m - AB) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & O \\ A & \lambda I_m - AB \end{bmatrix} = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n & -B \\ O & \lambda I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n & -B \\ O & \lambda I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda I_n - BA & O \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA) \end{aligned}$$

故 $\lambda^n p_{AB}(\lambda) = \lambda^m p_{BA}(\lambda)$, 即 AB 与 BA 的非零特征值相同

例题 4.2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^n 。

解 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$, 故 A 有单重特征值 2 和二重特征值 4。

$(2I - A)x = 0$ 有非零解 $(1, 0, -1)^T$, $(4I - A)x = 0$ 有线性无关非零解 $(1, 0, 0)^T$ 和 $(0, 1, -1)^T$,

记 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 有 $A = T\Lambda T^{-1}$,

故 $A^n = T\Lambda^n T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^n & 4^n - 2^n & 4^n - 2^n \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 2^n - 4^n & 2^n \end{bmatrix}$ 。

4.3 一些其他结论 *

4.3.1 Caylay-Hamilton 定理

定理 4.19 (Caylay-Hamilton 定理)

对 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $p_A(A) = 0$, 其中 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ 。

证明 设 $\lambda I - A$ 的伴随方阵是 B , 则 B 中元素都是次数至多为 $n-1$ 的多项式, 记 $b_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ij}^{(k)} \lambda^k$, 记 $B_k = (b_{ij}^{(k)})_{n \times n}$,

则 $B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \lambda^k$, 故 $p_A(\lambda)I_n = (\lambda I - A)B = \lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + \lambda(B_0 - AB_1) - AB_0$,

设 $p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$, 比较系数有 $B_{n-1} = I_n, B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1}I_n, \cdots, B_0 - AB_1 = a_1I_n, -AB_0 = a_0I_n$,

以上等式乘 $A^n, A^{n-1}, \cdots, A, I_n$ 后相加, 得到 $p_A(A) = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k = 0$ 。

推论 4.20

对 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, A^n 可以用 $A^{n-1}, \cdots, A^2, A, I$ 线性表示, 即 $I, A, A^2, \cdots$ 张成空间的维数至多为 n 。

4.3.2 Gershgorin 圆盘定理

矩阵的特征值的估计是一个重要的问题, Gershgorin 定理给出了特征值的一个上界。为了方便叙述, 我们先给出以下定义:

定义 4.21

对方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$,

- 若 $\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, 则称 A 是严格行对角占优方阵;
- 若 $\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, 则称 A 是行对角占优方阵;
- 若 $\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$, 则称 A 是严格列对角占优方阵;
- 若 $\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$, 则称 A 是列对角占优方阵。

定理 4.22 (Levy-Desplanques)

若 A 是行或列严格对角占优矩阵, 则 $\det A \neq 0$.



证明 只证明行严格对角占优矩阵的情形, 对列严格对角占优矩阵, 考虑其转置。

对 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $\det A = 0$, 则 $Ax = 0$ 有非零解 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, 设 $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_k| > 0$, 则 $\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$, 即 $a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j$, 两边取模, $|a_{kk}||x_k| = |\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, $\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$, 与 A 行严格对角占优矛盾, 故 $\det A \neq 0$.

定理 4.23 (Gershgorin 圆盘定理)

n 阶复方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的特征值落在复平面上 n 个圆盘 $|z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 的并集内, 其中 $1 \leq i \leq n$.



证明 设 λ 是 A 的特征值, 则 $\det(\lambda I - A) = 0$, 故由 Levy-Desplanques 定理有 $\lambda I - A$ 不是行严格对角占优矩阵。

故 $\exists 1 \leq i \leq n$, 使得 $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, 即特征值落在圆盘内。

4.3.3 同时对角化问题**定理 4.24**

A, B 为 n 阶方阵, 且 A, B 均可对角化, 则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 均为对角矩阵当且仅当 $AB = BA$.



证明 $(\Rightarrow)$

由于对角矩阵乘法可交换, 故 $P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$, 即 $P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$. 由 P 可逆有 $AB = BA$.

$(\Leftarrow)$

由 A 可对角化有 $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix}$, 其中 λ_i 互不相同, $\sum_{i=1}^s n_s = n$.

由 $AB = BA$ 有 $Q^{-1}AQ Q^{-1}BQ = Q^{-1}BQ Q^{-1}AQ$. 对 $Q^{-1}BQ$ 分块为 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix}$$

计算得到对 $i \neq j$ 均有 $B_{ij} = 0$, 即 $Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & B_{ss} \end{bmatrix}$ 为准对角矩阵。

由 B 可对角化有 $Q^{-1}BQ$ 可对角化, 故 B_{ii} 可对角化, 即 $\exists N_i$ 可逆 s.t. $N_i^{-1}B_{ii}N_i = \Sigma_i$ 为对角矩阵。

$$\begin{bmatrix} N_1^{-1} & & & \\ & N_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} A Q \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 N_1^{-1} N_1 & & & \\ & \lambda_2 N_2^{-1} N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s N_s^{-1} N_s \end{bmatrix} \text{ 是对角矩阵,}$$

$$\text{而 } \begin{bmatrix} N_1^{-1} & & & \\ & N_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} B Q \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & \\ & \Sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Sigma_s \end{bmatrix} \text{ 也是对角矩阵。}$$

$$\text{记 } N = \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix}, \text{ 取 } P = QN \text{ 即为所求。}$$

例题 4.3(2020~2021 期末) 对 A, B 为 n 阶实对称方阵, 且 $AB = BA$, 证明: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 均为对角矩阵。

解 这是定理的直接推论。注意到实对称矩阵均可对角化即可。

 **笔记** 在介绍完矩阵的相合后, 还会有一些同时相合对角化的问题, 应该会放在后面讨论。

第五章 Jordan 标准型 *

5.1 多项式矩阵的相抵

定义 5.1 (多项式矩阵)

设 $\mathbb{F}$ 是数域, λ 是未定元, 数域 $\mathbb{F}$ 上所有关于未定元 λ 的多项式集合记为 $\mathbb{F}[\lambda]$ 。取 $m \times n$ 个多项式 $a_{ij}(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, 则

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 多项式矩阵, 简称 λ 矩阵或多项式矩阵。数域 $\mathbb{F}$ 上所有 $m \times n$ 多项式矩阵的集合记为 $(\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$ 。

多项式矩阵的加法, 纯量与多项式矩阵的乘法, 多项式矩阵的乘法以及多项式矩阵的行列式, 转置, 迹的定义和通常数域 $\mathbb{F}$ 上方阵相同, 但应注意多项式矩阵的行列式, 迹是关于未定元 λ 的多项式。

定义 5.2 (多项式矩阵的秩)

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$, $A(\lambda)$ 的秩是 $A(\lambda)$ 中非零子式的最高阶数, 仍记为 $\text{rank } A(\lambda)$ 。若 n 阶方阵 $A(\lambda)$ 的秩等于 n , 则称 $A(\lambda)$ 是满秩的。显然 $A(\lambda)$ 满秩 $\Leftrightarrow \det A(\lambda) \neq 0$ 。

定义 5.3 (多项式矩阵的逆矩阵)

对于 n 阶方阵 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 若存在 n 阶方阵 $B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 使得 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I_n$, 则称 $A(\lambda)$ 是可逆的, $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆矩阵, 记为 $A(\lambda)^{-1}$ 。

定理 5.4

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 则 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow \det A(\lambda) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 。

证明

$\Rightarrow$: 设 $A(\lambda)$ 可逆, 则存在 $B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 使 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = I_n$ 。由 $\det A(\lambda) \det B(\lambda) = \det I_n = 1$, $\det A(\lambda), \det B(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda], \deg(1) = 0$, 有 $\deg(A(\lambda)) = \deg(B(\lambda)) = 0$, 故 $\det A(\lambda) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 。

$\Leftarrow$: 设 $\det A(\lambda) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 设 $a = \det A(\lambda)$, 考虑 $A^*(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵, 由 $A^*(\lambda)$ 中元素是 $A(\lambda)$ 的 $n-1$ 阶子式, 故 $A^*(\lambda), \frac{1}{a}A^*(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 而 $A(\lambda) \left(\frac{1}{a}A^*(\lambda) \right) = I_n = \left(\frac{1}{a}A^*(\lambda) \right) A(\lambda)$, 故 $A(\lambda)$ 可逆,

$$A(\lambda)^{-1} = \frac{1}{a}A^*(\lambda)。$$

 **笔记** 若 $A(\lambda)$ 可逆, 则 $A(\lambda)$ 满秩, 但是反之不成立。这与通常方阵不同。

定义 5.5 (多项式矩阵的初等变换, 初等 λ 矩阵)

多项式矩阵的初等 λ 变换分为以下三类:

1. 对调矩阵的两行或两列;
2. 把某一行或某一列乘以非零多项式加到另一行或另一列;

3. 以非零常数乘矩阵的某一行或某一列。

依次称为对多项式矩阵的第一、第二和第三种初等变换。

记 $P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$, $T_{ij}(f(\lambda)) = I_n + f(\lambda)E_{ij}$, $D_i(a) = I_n + (a-1)E_{ii}$, 则 $S_{ij}, T_{ij}(f(\lambda)), D_i(a)$ 被称为第一、第二、第三类初等 λ 矩阵。



分别用第一、第二、第三种初等 λ 矩阵左乘 $A(\lambda)$, 相当于对 $A(\lambda)$ 做第一、第二、第三种初等行变换。分别用第一、第二、第三种初等 λ 矩阵右乘 $A(\lambda)$, 相当于对 $A(\lambda)$ 做第一、第二、第三种初等列变换。

初等 λ 变换不改变多项式矩阵的秩。

定理 5.6

设 $m \times n$ 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r , 则 $A(\lambda)$ 可以经过有限次初等 λ 变换化为 $B(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 的形式, 其中 $D(\lambda) = \text{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda))$ 是 r 阶对角多项式方阵, $d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ 是首一多项式且 $d_j(\lambda) | d_{j+1}(\lambda), \forall j = 1, \dots, r-1$ 。

等价的, 存在 $s, t \in \mathbb{N}$, m 阶初等 λ 方阵 $P_1(\lambda), \dots, P_s(\lambda)$ 和 n 阶初等 λ 方阵 $Q_1(\lambda), \dots, Q_t(\lambda)$ 使得

$$P_s(\lambda) \cdots P_1(\lambda) A(\lambda) Q_1(\lambda) \cdots Q_t(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$



证明 对零矩阵 $A(\lambda)$, 定理显然成立。因此可设 $A = (a_{ij}(\lambda))_{n \times n} \neq 0$ 。于是存在某个元素 $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ 。对调矩阵第 1 行与第 i 行, 第 1 列与第 j 列, 则有 $a_{11}(\lambda) \neq 0$ 。因此可不妨假设 $a_{11}(\lambda) \neq 0$ 。

首先证明: 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 可以经有限次初等 λ 变换化为多项式矩阵 $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{n \times n}$, 其中 $c_{11}(\lambda) \neq 0$, 且 $c_{11}(\lambda) | c_{ij}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。为此对次数 $\deg a_{11}(\lambda)$ 归纳。

当 $\deg a_{11}(\lambda) = 0$ 时, $a_{11}(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 中非零常数, 显然 $a_{11}(\lambda) | a_{ij}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。因此结论对 $\deg a_{11}(\lambda) = 0$ 成立。假设结论对 $\deg a_{11}(\lambda) \leq t-1$ 成立, 现在考虑 $\deg a_{11}(\lambda) = t$ 的情况。假设 $\exists a_{ij}(\lambda)$ 使得 $a_{11}(\lambda) \nmid a_{ij}(\lambda)$ 。

1. $i = 1$, 即 $a_{11}(\lambda) \nmid a_{1j}(\lambda)$ 。由带余除法, $\exists q(\lambda), r(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 使得 $a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)a_{11}(\lambda) + r(\lambda), \deg r(\lambda) < t$ 。

把第 1 列的 $-q(\lambda)$ 倍加到第 j 列, 再对调第 1 列与第 j 列, 这个矩阵 $(1, 1)$ 位置上的元素就是 $r(\lambda)$, 且 $\deg r(\lambda) < t$, 使用归纳假设, 有结论成立。

2. $j = 1$, 将上一情形的列改为行即可。

3. $a_{11}(\lambda)$ 整除每一个 a_{1j} 与 a_{i1} , 且 $a_{ij}(\lambda) \nmid a_{kl}(\lambda), k \neq 1, l \neq 1$ 。此时设 $a_{1j}(\lambda) = q_j(\lambda)a_{11}(\lambda), a_{i1}(\lambda) = p_i(\lambda)a_{11}(\lambda), p_i(\lambda), q_j(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 把第 1 行的 $-p_i(\lambda)$ 倍加到第 i 行, 再把第 1 列的 $-q_j(\lambda)$ 倍加到第 j 列, 得到多项式矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22}(\lambda) & \tilde{a}_{23}(\lambda) & \cdots & \tilde{a}_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2}(\lambda) & \tilde{a}_{m3}(\lambda) & \cdots & \tilde{a}_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

此时如果 $a_{11}(\lambda)$ 整除每个 $\tilde{a}_{ij}(\lambda)$, 则结论成立。否则, 设 $a_{11}(\lambda) \nmid \tilde{a}_{kl}(\lambda)$, 把这个多项式矩阵的第 m 行加到第 1 行, 则化为情形 1, 所以结论成立。

由上述讨论可知, 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 可以经有限次初等 λ 变换化为多项式矩阵 $C(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{n \times n}$, 其中 $c_{11}(\lambda) \neq 0$, 且 $c_{11}(\lambda) | c_{ij}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。设 $c_{i1}(\lambda) = f_i(\lambda)c_{11}(\lambda), c_{1j}(\lambda) = g_j(\lambda)c_{11}(\lambda)$, 把第 1 行的

$-f_i(\lambda)$ 倍加到第 i 行, 再把第 1 列的 $-g_j(\lambda)$ 倍加到第 j 列, 得到多项式矩阵:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & b_{23}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & b_{m3}(\lambda) & \cdots & b_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

此时仍有 $c_{11} \mid b_{ij}(\lambda)$ 。记 $A_1(\lambda) = (b_{kl}(\lambda))_{(m-1) \times (n-1)}, 2 \leq k \leq m, 2 \leq l \leq n$ 。对多项式矩阵 $A_1(\lambda)$ 重复上述过程, 则多项式矩阵 $A_1(\lambda)$ 可经有限次初等 λ 变换化为

$$\begin{bmatrix} c_{22}(\lambda) & 0 \\ 0 & A_2(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $c_{22}(\lambda)$ 整除 $A_2(\lambda)$ 的每个元素。于是原来的矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & A_2(\lambda) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

由于对 $A_1(\lambda)$ 施加初等 λ 不改变其元素被 $c_{11}(\lambda)$ 整除的性质, 故 $c_{11}(\lambda)$ 整除 $c_{22}(\lambda)$ 及 $A_2(\lambda)$ 的所有元素。且 $c_{22}(\lambda)$ 整除 $A_2(\lambda)$ 的所有元素。

重复上述过程, 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 可经有限次初等 λ 变换化为以下形式:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk}(\lambda) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中非零多项式 $c_{11}(\lambda), c_{22}(\lambda), \dots, c_{kk}(\lambda)$ 满足 $c_{ii}(\lambda) \mid c_{i+1, i+1}(\lambda), \forall 1 \leq i \leq k-1$ 。由于初等 λ 变换不改变多项式矩阵的秩, 故 $k = \text{rank}(A(\lambda)) = r$ 。设 c_{ii} 的首项系数为 b_i , 则把以上矩阵的第 i 行乘 b_i^{-1} , 就可以把多项式矩阵 $A(\lambda)$ 化为 $B(\lambda)$, 因此定理得证。

定理 5.7

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 则 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow A(\lambda)$ 可表示为有限个初等 λ 矩阵的乘积。



证明 由定理 5.6 易得。

定义 5.8 (多项式矩阵的相抵)

设 $A(\lambda), B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$, 若 $A(\lambda)$ 可经有限次初等变换化为 $B(\lambda)$, 即 $\exists P(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times m}, Q(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$ 可逆, 使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵。



容易验证, 多项式矩阵的相抵关系是等价关系。于是, 根据多项式矩阵的相抵关系可以把数域 $\mathbb{F}$ 上所有 $m \times n$ 多项式矩阵分类: 彼此相抵的多项式矩阵属于同一类, 不相抵的多项式矩阵属于不同的类。和一般数域上的相抵一样, 两个基本问题是: 多项式矩阵在相抵下的标准型是什么? 多项式矩阵在相抵下的全系不变量是什么?

首先, 由 $A(\lambda) = I_2, B(\lambda) = \text{diag}(1, \lambda)$ 不相抵可以得出多项式矩阵的秩不足以构成多项式矩阵的全系不变量, 所以必须寻找多项式矩阵在相抵下的其他不变量。

定义 5.9

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$, 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 中所有 k 阶非零子式的最大公因子称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子, 记为 $D_k(\lambda)$ 。若 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式均为 0, 则约定 $D_k(\lambda) = 0$ 。

容易验证, 若 $\text{rank } A(\lambda) = r$, 记 $\min\{m, n\} = s$, 则 $D_{r+1}(\lambda) = \cdots = D_s(\lambda) = 0$, 对于 $1 \leq k \leq r$, $D_k(\lambda)$ 是非零多项式, 且 $D_k(\lambda) | D_{k+1}(\lambda), \forall k = 1, \cdots, r-1$ 。

我们先介绍一个引理。

引理 5.10 (Binet-Cauchy 公式)

对 $A \in \mathbb{F}^{p \times q}, B \in \mathbb{F}^{q \times p}$, 有

$$\det(AB) = \begin{cases} 0, & q < p \\ \det A \cdot \det B, & q = p \\ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq q} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, & q > p \end{cases}$$

证明 只考虑 $p \leq q$ 的情形。

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \begin{bmatrix} \sum_{i_1=1}^q a_{1i_1} b_{i_1 1} & \cdots & \sum_{i_p=1}^q a_{1i_p} b_{i_p 1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_1=1}^q a_{pi_1} b_{i_1 1} & \cdots & \sum_{i_p=1}^q a_{pi_p} b_{i_p 1} \end{bmatrix} = \sum_{i_1=1}^q \cdots \sum_{i_p=1}^q \det \begin{bmatrix} a_{1i_1} b_{i_1 1} & \cdots & a_{1i_p} b_{i_p 1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} b_{i_1 1} & \cdots & a_{pi_p} b_{i_p 1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^q \cdots \sum_{i_p=1}^q \det \begin{bmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{bmatrix} \prod_{j=1}^p b_{i_j j} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq q} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_p} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_p)} \det \begin{bmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{bmatrix} \prod_{k=1}^p b_{k j_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq q} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中 (*) 处取等是因为若存在某个 $i_k = i_l$, 则对应项中行列式部分为 0, 故可以把所有为 0 的项去除然后进行排序, 根据行列式的性质即得。

命题 5.11

对 $A \in \mathbb{F}^{p \times q}, B \in \mathbb{F}^{q \times p}$, 记 $C = AB$, 则对 C 的 r 阶子式有

$$C \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & q < p \\ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq q} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}, & q \geq p \end{cases}$$

证明 对 $A_1 = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 q} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r q} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{1 j_1} & b_{1 j_2} & \cdots & b_{1 j_r} \\ b_{2 j_1} & b_{2 j_2} & \cdots & b_{2 j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{q j_1} & b_{q j_2} & \cdots & b_{q j_r} \end{bmatrix}$ 使用引理 5.10 即可。

定理 5.12

设 $A(\lambda), B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$, 则 $A(\lambda), B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同。换言之, 多项式矩阵的行列式因子是其在相抵下的全系不变量。



证明 以下设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子分别为 $D_k(\lambda), \tilde{D}_k(\lambda)$ 。

(必要性) 设多项式矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵, 则存在可逆多项式矩阵 $P(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times m}, Q(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$, 使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$ 。由命题 5.11 有:

$$\begin{aligned} B(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq m} P(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{pmatrix} \left((A(\lambda)Q(\lambda)) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq m} \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq n} P(\lambda) \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{pmatrix} A(\lambda) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k \end{pmatrix} Q(\lambda) \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

若 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda) = 0$, 则 $A(\lambda)$ 的每个 k 阶子式为 0, 故 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式为 0, 即 $B(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $\tilde{D}_k(\lambda) = 0$ 。反之亦然。

若 $D_k(\lambda) \neq 0$, 则 $D_k(\lambda)$ 整除每个 $A(\lambda)$ 的 k 阶子式, 故 $D_k(\lambda)$ 整除每个 $B(\lambda)$ 的 k 阶子式, 即 $D_k(\lambda)$ 整除 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式, 故 $\tilde{D}_k(\lambda) | D_k(\lambda)$ 。同理可证 $D_k(\lambda) | \tilde{D}_k(\lambda)$, 又作为最大公因子, $D_k(\lambda), \tilde{D}_k(\lambda)$ 均为首一多项式, 故 $D_k(\lambda) = \tilde{D}_k(\lambda)$ 。

这说明 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同。

(充分性) 若 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同, 并设 $\text{rank } A(\lambda) = r$, 则由定理 5.6, $A(\lambda)$ 相抵于如下多项式矩阵:

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)) & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

多项式矩阵 $C(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子同样为 $D_k(\lambda)$, 易得 $D_1(\lambda) = d_1(\lambda), \cdots, D_r(\lambda) = \prod_{j=1}^r d_j(\lambda), D_r(\lambda) = \cdots =$

$$D_{\min\{m,n\}}(\lambda) = 0 \Rightarrow d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \text{ 由 } D_k(\lambda) \text{ 唯一确定 } (D_0(\lambda) = 1)。$$

由于 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同, 有 $B(\lambda), C(\lambda)$ 相抵, 由传递性, $A(\lambda), B(\lambda)$ 相抵。

由充分性证明的启发, 可以引进:

定义 5.13 (不变因子)

设多项式矩阵 $A(\lambda) \in (\mathbb{F})^{m \times n}$ 的秩为 r , k 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$, 约定 $D_0(\lambda) = 1$, 定义 $d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

**定理 5.14**

设多项式矩阵 $A(\lambda) \in (\mathbb{F})^{m \times n}$ 的秩为 r , 阶不变因子为 $d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$, 则 $A(\lambda)$ 相抵于 Smith 标准型

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)) & O \\ O & O \end{bmatrix}, \text{ 且 } A(\lambda) \text{ 的不变因子是其在相抵下的全系不变量。}$$



证明 由定理5.12的证明易得。

定理5.12和定理5.14解决了多项式矩阵在相抵下的标准型和全系不变量的问题,下面将给出 $\mathbb{C}$ 上多项式矩阵在相抵下的另一种全系不变量。

定义 5.15 (初等因子, 初等因子组)

多项式矩阵 $A(\lambda) \in (\mathbb{F})^{m \times n}$ 的秩为 r , 阶不变因子为 $d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$, 由 $\mathbb{C}$ 是代数闭域, 故 $d_k(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积。由此可设

$$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{12}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{e_{1t}}$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{22}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{e_{2t}}$$

.....

$$d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r1}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{e_{rt}}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 是两两不同的复数, $e_{ij} \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, t$, 由 $d_k(\lambda) | d_{k+1}(\lambda)$, 有 $0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \cdots \leq e_{rj}, j = 1, 2, \dots, t$ 。当 $e_{kl} > 0$ 时, 因子 $(\lambda - \lambda_k)^{e_{kl}}$ 被称为矩阵 $A(\lambda)$ 属于 λ_k 的初等因子, $A(\lambda)$ 的初等因子的全体称为 $A(\lambda)$ 的初等因子组。

定理 5.16

复数域上的多项式矩阵的秩和初等因子组是其在相抵下的全系不变量。

证明 由定义可得不变因子可以唯一确定初等因子组和秩。

反之, 设秩为 r 的 $A(\lambda)$ 的初等因子组为 $\{(\lambda - \lambda_p)^{e_{pq}}\}_{1 \leq p \leq t}$, 将其下标按 p 分组并按 e_{pq} 递增排列, 并在最前面补充足够的 1 使得每组均有 r 个元素, 得到增广因子组 $\{(\lambda - \lambda_p)^{e_{pl}}\}_{1 \leq p \leq t, 1 \leq l \leq r}$, 由 $d_k(\lambda) | d_{k+1}(\lambda)$, 有 $d_k(\lambda) = \prod_{p=1}^t (\lambda - \lambda_p)^{e_{pk}}, 1 \leq k \leq r$ (思考原因)。如此初等因子组可以唯一确定不变因子。

由上, 初等因子组与秩、不变因子是等价的, 故秩和初等因子组是多项式矩阵在相抵下的全系不变量。

 **笔记** 该定理中秩的条件是不可以删去的。

5.2 Jordan 标准型的概念与求法

下面的定理给出方阵的相似与多项式矩阵相抵之间的重要联系。

定理 5.17

n 阶复方阵 A, B 相似 $\Leftrightarrow$ 多项式矩阵 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵。

证明

若方阵 A, B 相似, 则存在可逆方阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$ 。此时, P 作为可逆多项式矩阵有 $\lambda I_n - B = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$, 故 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵。

反之, 若 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵, 则存在可逆多项式矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使得 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \lambda I_n - B$ 。设 $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^k \lambda^j Q_j, Q(\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^m \lambda^j R_j$, 设 $W = Q(B) = \sum_{j=0}^m Q_j B^j$ 。由 $Q(\lambda)^{-1}Q(\lambda) = I_n$, 有 $\sum_{j=0}^m R_j Q(\lambda) \lambda^j = I_n \Rightarrow \sum_{j=0}^m R_j W B^j = I_n$ 。又 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \lambda I_n - B$, 有 $P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - B) = (\lambda I_n - A)Q(\lambda) = Q(\lambda)\lambda - AQ(\lambda)$ 。用 B 代替 λ , 有 $Q(B)B = AQ(B)$, 即 $WB = AW$ 。由此得到 $WB^l = A^l W, \forall l \in \mathbb{N}$ 。于是有 $I_n = \sum_{j=0}^m R_j W B^j = \sum_{j=0}^m R_j A^j W = (\sum_{j=0}^m R_j A^j)W$ 。这表明 W 是可逆矩阵且 $B = W^{-1}AW$ 。

 **笔记** 对 n 阶复方阵 A , $\lambda I_n - A$ 被称为 A 的特征方阵。显然特征方阵是满秩的。

由定理 5.16 和定理 5.17, 可以得到:

定理 5.18

n 阶复方阵 A 与 B 相似的充要条件是它们的特征方阵 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 的初等因子组相同。也就是说, 复方阵的特征方阵的初等因子组是复方阵在相似下的全系不变量。

在介绍复方阵的 Jordan 标准型的概念之前, 还需要一个引理。

引理 5.19

准对角多项式矩阵 $A(\lambda) = \text{diag}(A_1(\lambda), A_2(\lambda))$ 的初等因子组由对角块 $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ 的初等因子组合并而成。

证明 设 $d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ 和 $d_{r+1}(\lambda), \dots, d_{r+s}(\lambda)$ 分别是多项式矩阵 $A_1(\lambda)$ 和 $A_2(\lambda)$ 的不变因子, 则存在可逆多项式方阵 $P_1(\lambda), P_2(\lambda), Q_1(\lambda), Q_2(\lambda)$, 使得:

$$P_1(\lambda)A_1(\lambda)Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \text{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2(\lambda)A_2(\lambda)Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \text{diag}(d_{r+1}(\lambda), \dots, d_{r+s}(\lambda)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记 $P(\lambda) = \text{diag}(P_1(\lambda), P_2(\lambda)), Q(\lambda) = \text{diag}(Q_1(\lambda), Q_2(\lambda))$, 则 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 可逆,

且 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \text{diag}(D_1, 0, D_2, 0)$ 。其中 $D_1 = \text{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_r(\lambda)), D_2 = \text{diag}(d_{r+1}(\lambda), \dots, d_{r+s}(\lambda))$ 。记 $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$, 则 $A(\lambda), B(\lambda)$ 相抵, 因此它们的初等因子组相同。

接下来求多项式矩阵 $B(\lambda)$ 的初等因子组。设

$$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{11}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{12}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{e_{1k}}, \dots, d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{r2}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{e_{rk}}$$

$$d_{r+1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r+1,1}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{r+1,2}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{e_{r+1,k}}, \dots, d_{r+s}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r+s,1}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{r+s,2}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{e_{r+s,k}}$$

其中 $e_{ij} \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ 互不相同。由于不变因子依次一个整除另一个, 有 $0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \dots \leq e_{rj}, 0 \leq e_{r+1,j} \leq e_{r+2,j} \leq \dots \leq e_{r+s,j}, j = 1, 2, \dots, k$ 。

显然, 多项式矩阵 $A_1(\lambda)$ 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_j)^{e_{ij}} (1 \leq i \leq r)$, 而多项式矩阵 $A_2(\lambda)$ 的初等因子组为 $(\lambda - \lambda_j)^{e_{r+i,j}} (1 \leq i \leq s)$ 。

对于每个 j , 将指数 $e_{1j}, \dots, e_{rj}, e_{r+1,j}, \dots, e_{r+s,j}$ 重排为 $\widetilde{e}_{1j}, \widetilde{e}_{2j}, \dots, \widetilde{e}_{r+s,j}$, 使得 $0 \leq \widetilde{e}_{1j} \leq \widetilde{e}_{2j} \leq \dots \leq \widetilde{e}_{r+s,j}$ 。容易看出, 多项式矩阵 $B(\lambda)$ 的 $r+s$ 阶行列式因子 $D_{r+s}(\lambda)$ 为:

$$D_{r+s}(\lambda) = d_1(\lambda) \dots d_r(\lambda) d_{r+1}(\lambda) \dots d_{r+s}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\widetilde{e}_{11} + \dots + \widetilde{e}_{r+s,1}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\widetilde{e}_{1k} + \dots + \widetilde{e}_{r+s,k}}$$

$$B(\lambda) \text{ 的所有 } r+s-1 \text{ 阶子式为 } \frac{D_{r+s}(\lambda)}{d_i(\lambda)}, i = 1, 2, \dots, r+s \text{ 且}$$

$$\frac{D_{r+s}(\lambda)}{d_i(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)^{\widetilde{e}_{11} + \dots + \widetilde{e}_{r+s,1} - \widetilde{e}_{i1}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\widetilde{e}_{1k} + \dots + \widetilde{e}_{r+s,k} - \widetilde{e}_{ik}}$$

由于 $\widetilde{e}_{r+s,j} \geq e_{ij}$, 因此 $\widetilde{e}_{1j} + \dots + \widetilde{e}_{r+s,j} - \widetilde{e}_{ij} \geq \widetilde{e}_{1j} + \dots + \widetilde{e}_{r+s-1,j}$, 取等当且仅当 $\widetilde{e}_{r+s,j} = e_{ij}$ 。

所以多项式 $\frac{D_{r+s}(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \dots, \frac{D_{r+s}(\lambda)}{d_{r+s}(\lambda)}$ 的最大公因子, 即 $B(\lambda)$ 的 $r+s-1$ 阶行列式因子 $D_{r+s-1}(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的第 $r+s$ 个不变因子分别为:

$$D_{r+s-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\widetilde{e}_{11} + \dots + \widetilde{e}_{r+s-1,1}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\widetilde{e}_{1k} + \dots + \widetilde{e}_{r+s-1,k}}, \widetilde{d}_{r+s}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\widetilde{e}_{r+s,1}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\widetilde{e}_{r+s,k}}$$

同理可得 $B(\lambda)$ 的第 l 个不变因子 $\widetilde{d}_l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\widetilde{e}_{l1}} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\widetilde{e}_{lk}}$

因此 $B(\lambda)$ 的初等因子组为 $\{(\lambda - \lambda_j)^{\widetilde{e}_{lj}} \mid \widetilde{e}_{lj} > 0, 1 \leq l \leq r+s, 1 \leq j \leq k\}$ 。

由于 $\widetilde{e}_{1j}, \widetilde{e}_{2j}, \dots, \widetilde{e}_{r+s,j}$ 是 $e_{1j}, \dots, e_{rj}, e_{r+1,j}, \dots, e_{r+s,j}$ 的重排, 故多项式矩阵 $B(\lambda)$ 的初等因子组由 $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ 的初等因子组合并而成。

以下给出复方阵的 Jordan 标准型的概念。

定义 5.20 (Jordan 块, Jordan 标准型)

记 $N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$, 则形如 $\lambda I_m + N_m$ 的矩阵被称为一个 m 阶 Jordan 块, 记作 $J_m(\lambda)$ 。Jordan 标准型是由对角线由若干个 Jordan 块组成的准对角矩阵。

定理 5.21

设 n 阶复方阵 A 的特征方阵 $\lambda I_n - A$ 的初等因子组为

$$\begin{aligned} &(\lambda - \lambda_1)^{m_{11}}, (\lambda - \lambda_1)^{m_{12}}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{m_{1k_1}}, \\ &(\lambda - \lambda_2)^{m_{21}}, (\lambda - \lambda_2)^{m_{22}}, \dots, (\lambda - \lambda_2)^{m_{2k_2}}, \\ &\dots\dots\dots \\ &(\lambda - \lambda_t)^{m_{t1}}, (\lambda - \lambda_t)^{m_{t2}}, \dots, (\lambda - \lambda_t)^{m_{tk_t}}, \end{aligned}$$

其中 $m_{j1} \geq m_{j2} \geq \dots \geq m_{jk_j} > 0, j = 1, 2, \dots, t$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 两两不同。则复方阵 A 相似于如下的 Jordan 标准型:

$$J = \text{diag}(J_{m_{11}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{1k_1}}(\lambda_1), J_{m_{21}}(\lambda_2), \dots, J_{m_{tk_t}}(\lambda_t))$$

证明

对 $k \in \mathbb{N}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, 记 $M = \lambda I_k - J_k(\lambda_0) =$

$$\begin{bmatrix} \lambda - \lambda_0 & -1 & & \\ & \lambda - \lambda_0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda - \lambda_0 & -1 \\ & & & & \lambda - \lambda_0 \end{bmatrix},$$

由 $M \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 2 & 3 & \dots & k \end{pmatrix} = (-1)^{k-1}$, 故行列式因子 $D_1(\lambda) = \dots = D_{k-1}(\lambda) = 1, D_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$, 对应不变因子 $d_1(\lambda) = \dots = d_{k-1}(\lambda) = 1, d_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$, 因此 M 的初等因子组为 $\{(\lambda - \lambda_0)^k\}$ 。由引理 5.19, $\lambda I_n - J, \lambda I_n - A$ 的初等因子组相同, 故 A 与 J 相似。

最后总结求复方阵 A 的 Jordan 标准型的过程如下:

算法 5.22

1. 求出特征方阵 $\lambda I_n - A$ 的不变因子;
2. 把不变因子分解为一次因式的乘积, 得到初等因子组;
3. 写出每个初等因子的 Jordan 块;
4. 把所有 Jordan 块进行合并, 得到 Jordan 标准型。

同时也给出另外一种算法:

算法 5.23

1. 求出特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$;
2. 记 $r_{ik} = \text{rank}(A - \lambda_i)^k$, 约定 $r_{i0} = n$;
3. 记 $d_{ik} = r_{i,k-1} - r_{ik}, \forall k \geq 1$;
4. 记 $\delta_{ik} = d_{ik} - d_{i,k+1}, \forall k \geq 1$;
5. 此时 $J_k(\lambda_i)$ 有 δ_{ik} 个。



证明 设 $\phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{n_t}$, 其中 $\sum_{i=1}^t n_i = n$ 。记 $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_t)$,

其中 $J_i = \text{diag}(J_{m_{i1}}(\lambda_i), \dots, J_{m_{ij_i}}(\lambda_i)), m_{i1} \geq \dots \geq m_{ij_i}$ 且 $\sum_{k=1}^{j_i} m_{ik} = n_i$ 。

由于 $\forall p \neq q, \lambda_p \neq \lambda_q$, 且此时 $\forall 1 \leq k \leq j_p, J_{m_{pk}}(\lambda_p) - \lambda_q I_{m_{pk}}$ 是满秩上三角阵, 故 $\forall l > 0, \text{rank}(J_{m_{pk}}(\lambda_p) - \lambda_q I_{m_{pk}})^l = m_{pk}$ 。

此时 $r_{ik} = \text{rank}(A - \lambda_i I_n)^k = \text{rank}(J - \lambda_i I_n)^k = \text{rank} \text{diag}(J_1 - \lambda_i I_{n_1}, \dots, J_t - \lambda_i I_{n_t}) = n - n_i + \sum_{k=1}^{j_i} \text{rank}(J_{m_{ik}}(0))^k$,

$d_{ik} = r_{i,k-1} - r_{ik} = \sum_{k=1}^{j_i} (\text{rank}(J_{m_{ik}}(0))^{k-1} - \text{rank}(J_{m_{ik}}(0))^k) = \langle \text{属于特征值 } \lambda_i \text{ 的阶数 } \geq k \text{ 的 Jordan 块个数} \rangle$,

$\delta_{ik} = d_{ik} - d_{i,k+1} = \langle \text{属于特征值 } \lambda_i \text{ 的阶数为 } k \text{ 的 Jordan 块个数} \rangle = \langle J_k(\lambda_i) \text{ 的个数} \rangle$

使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型的可逆矩阵 P 称为过渡矩阵。过渡矩阵的求法如下:

算法 5.24

1. 对特征方阵 $\lambda I_n - A$ 施加初等 λ 变换, 把 $\lambda I_n - A$ 化为 $\lambda I_n - J$, 从而求出 n 阶可逆多项式矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使得 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \lambda I_n - J$;
2. 求出 $R(\lambda) = Q(\lambda)^{-1}$;
3. 把 $R(\lambda)$ 写成矩阵的多项式 $R(\lambda) = \sum_{j=1}^m R_m \lambda^m$, 则 $P = R(A)$ 。



该方法正确性的证明留给读者。

5.3 Jordan 标准型的应用

例题 5.1 证明: A, A^T 相似。

证明 设 A 的 Jordan 标准型为 J , 即证 J, J^T 相似。设 $J = \text{diag}(J_{m_{11}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{tk_t}}(\lambda_t))$ 。

对 $\forall 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq k_i$, 容易求得 $J_{m_{ij}}(\lambda_i), J_{m_{ij}}(\lambda_i)^T$ 的初等因子组均为 $\{(\lambda - \lambda_i)^{m_{ij}}\}$, 故存在可逆方阵 P_{ij} 使得 $P_{ij}^{-1} J_{m_{ij}}(\lambda_i) P_{ij} = J_{m_{ij}}(\lambda_i)^T$, 令 $P = \text{diag}(P_{11}, \dots, P_{tk_t})$, 即有 $P^{-1}JP = J^T$, 即 A, A^T 相似。

笔记 注意到 $S_{ij} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$ 满足 $S^{-1} J_{m_{ij}}(\lambda_i) S_{ij} = J_{m_{ij}}(\lambda_i)^T$, 设 $S = \text{diag}(S_{11}, \dots, S_{tk_t}), Q^{-1}AQ = J$, 则

$(QSQ^T)^{-1}A(QSQ^T) = A^T$, 由 QSQ^T 对称可逆知存在对称可逆矩阵 P 把 A 相似至 A^T 。

例题 5.2 证明: 任意一个 n 阶复方阵 A 都可以表示为两个 n 阶对称方阵的乘积, 而且可以指定其中一个是可逆的。

证明 不妨设要求第一个矩阵可逆。由上, 存在对称可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}A^T S = A \Leftrightarrow A^T S = SA$,

记 $P_1 = S^{-1}$ 对称可逆, $P_2 = A^T S$ 满足 $P_2^T = S^T A = SA = A^T S = P_2$, 即 P_2 对称。此时 $A = P_1 P_2$ 即为所求。

例题 5.3 设 A 是 n 阶可逆复方阵, 证明: $\exists B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $A = B^2$ 。

证明 首先证明 $\forall a \neq 0$, $J_m(a^2)$ 与 $(J_m(a))^2$ 相似。首先有 $J_m(a) = aI_m + N_m$, $J_m(a^2) = a^2I_m + N_m$,
 $(J_m(a))^2 = a^2I_m + 2aN_m + N_m^2$, 由 $\text{rank}(J_m(a^2) - a^2I_m) = \text{rank}((J_m(a))^2 - a^2I_m) = m - 1$ 即有其相似。
 对 A 的某个 Jordan 块 $J_m(a)$, $\exists P_{ma}$ 可逆使得 $P_{ma}^{-1}(J_m(\sqrt{a}))^2P_{ma} = J_m(a)$, 记 $B_{ma} = P_{ma}^{-1}J_m(\sqrt{a})P_{ma}$,
 设 $A = P^{-1}\text{diag}(J_{m_{11}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{t_k t}}(\lambda_t))P = P^{-1}\text{diag}(B_{m_{11}\lambda_1}^2, \dots, B_{m_{t_k t}\lambda_t}^2)P$, (A 可逆 $\Rightarrow 0$ 不是特征值)
 令 $B = P^{-1}\text{diag}(B_{m_{11}\lambda_1}, \dots, B_{m_{t_k t}\lambda_t})P$, 即有 $A = B^2$ 。

例题 5.4 $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $B \neq O$, $AB = O$, 证明: $\exists D \neq O$, s.t. $AD = DA = O$ 。

证明 设 $P^{-1}AP = J$, 记 $\tilde{B} = P^{-1}BP \neq O$, 则 $J\tilde{B} = O \Rightarrow \text{rank}(J) \leq 2$ 。以下对 J 的可能形式分类。

1. $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{11}P$ 即可;
2. $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{33}P$ 即可;
3. $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{33}P$ 即可;
4. $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{13}P$ 即可;
5. $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{33}P$ 即可;
6. $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 此时取 $D = P^{-1}E_{23}P$ 即可。

第六章 期末复习

6.1 线性变换与矩阵的相似

首先回顾一些比较重要的算法和性质。

命题 6.1

$\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性映射, 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下矩阵为 A , P 是可逆矩阵, $\beta_i = P\alpha_i$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 下矩阵是 $P^{-1}AP$ 。

算法 6.2 (特征值与特征向量的计算)

对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 可以通过以下步骤计算其特征值与特征向量:

1. 计算特征多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$, $\sum_{i=1}^s \lambda_i = n$, 这是关于 λ 的一个 n 次多项式, 从而有 n 个根;
2. 令 $p_A(\lambda) = 0$, 得到特征值 $\lambda_1(n_1 \text{ 重}), \lambda_2(n_2 \text{ 重}) \cdots \lambda_s(n_s \text{ 重})$, 这些是 A 的特征值;
3. 对每一个 $\lambda_i (1 \leq i \leq s)$, 求出线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的非零解, 即为 λ_i 的特征向量;

命题 6.3 (特征值的性质)

- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, $f(\lambda)$ 是多项式, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 的对应特征向量;
- 若 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, x 是对应的特征向量;
- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ 是 A^T 的特征值, 但 x 不一定是对应特征向量;
- 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 则 $|\lambda| = 1$;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = A^T$, 则 λ 是实数, 且存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = -A^T$, 则 λ 是纯虚数或零。

定理 6.4

- 特征值是相似不变量, 即若 A, B 相似, 则 A, B 有相同的特征值。
- 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 则 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ 。

不是所有方阵都可以对角化, 这里给出一些可对角化的充分条件:

命题 6.5

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 可对角化;
- 若方阵 A 的所有特征值的代数重数等于几何重数, 则 A 可对角化;
- 若 n 阶方阵 A 的所有特征值的几何重数等于 n , 则 A 可对角化。

例题 6.1 证明: $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$ 与 $A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 相似。

证明 显然 $N, N - nI$ 是奇异矩阵, 故 $0, n$ 是 N 的特征值, 且 $\dim \ker N = n - 1, \dim \ker(N - nI) = 1$, 故特征值 0

的几何重数是 $n-1$, 特征值 n 的几何重数是 1, 因此 N 可对角化, 相似标准形是 nE_{11} 。

同理对 A , 0 是几何重数为 $n-1$ 的特征值, n 是几何重数为 1 的特征值, 故 A 可对角化, 相似标准形也是 nE_{11} , 故 A, N 相似。

例题 6.2 假设 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T, \beta_1 = (-1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 1)^T, \beta_3 = (2, -1, -2)^T; M_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基。设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 且 $\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^T, \sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^T, \sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^T$ 。分别求出 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵 T_1, T_2 。

解 $\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^T = -5\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3, \sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^T = -\beta_2, \sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^T = -3\beta_1 - 5\beta_2 - 4\beta_3$ 。

$$\Rightarrow \sigma(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow T_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}。记 B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), 则$$

$$\sigma(e_1, e_2, e_3) = \sigma((\beta_1, \beta_2, \beta_3)B^{-1}) = (\sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2), \sigma(\beta_3))B^{-1} = BT_2B^{-1} = (e_1, e_2, e_3)BT_2B^{-1}$$

$$\Rightarrow T_1 = BT_2B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

例题 6.3 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + 3A + 2I = 0$ 。

- (1) 给出 A 的所有可能的互异特征值。
- (2) 若 n 是奇数, 证明 A 的伴随矩阵 A^* 正定。

证明 (1) A 的特征值是方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 的根, 即 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 。

(2) 由 A 对称有 A^{-1} 对称, A^{-1} 的全部可能特征值为 $-1, -\frac{1}{2}$ 均为负数, 故 $A^{-1} \prec 0$ 。

又 n 是奇数, 有 $\det A < 0$, 因此 $A^* = \det A \cdot A^{-1} \succ 0$ 。

6.2 正交变换与内积空间

定义 6.6

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 若函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- 正定性: $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$;
- 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ 。

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范空间。 $d(x, y) := \|x - y\|$ 是 X 上的一个度量, 称为典则度量。

定义 6.7

X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 若函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 满足:

- 对第一变元线性: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- 对第二变元共轭线性: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;
- 共轭对称: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X$;
- 正定性: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$, 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 。

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 X 上的一个内积, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为内积空间。 $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 是 X 上的一个范数, 称为由内积诱导的范数。

引理 6.8 (Cauchy-Schwarz)

X 是内积空间, 对任意 $x, y \in X$, 有 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, 等号成立当且仅当 x, y 线性相关。

定义 6.9

X 是内积空间, 若对 $x, y \in X$, 有 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x, y 正交, 记作 $x \perp y$ 。

对 $M \subset X$, 若 $\forall y \in M, x \perp y$, 则称 x 正交于 M , 记作 $x \perp M$ 。

$M^\perp := \{x \in X | x \perp M\}$ 称为 M 的正交补。此时若 M 是 X 的子空间, 有 $X = M \oplus M^\perp$ 。

命题 6.10

- (极化恒等式 over $\mathbb{R}$) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是实内积空间, 则 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
- (极化恒等式 over $\mathbb{C}$) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是复内积空间, 则 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2)$
- (平行四边形法则) $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- (勾股定理) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, 则 $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

定义 6.11

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 X 的一组基, 则 $G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n \times n}$ 称为基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 Gram 矩阵, $G \succ 0$ 。对 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)y$, 有 $\langle \alpha, \beta \rangle = x^T G y$ 。

命题 6.12

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ 分别是 X 的一组基, G_1 是基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 Gram 矩阵, G_2 是基 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 的 Gram 矩阵, 若可逆矩阵 P 使得 $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P$, 使得 $G_2 = P^T G_1 P$ 。

定义 6.13

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $e_1, \dots, e_n$ 是 X 的一组基, 若 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, 则称 $e_1, \dots, e_n$ 是 X 的标准正交基。

算法 6.14 (Gram-Schmidt 正交化)

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 X 的一组基, 对 $i = 1, 2, \dots, n$, 令

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, u_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \langle \alpha_2, u_1 \rangle u_1, u_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \langle \alpha_3, u_1 \rangle u_1 - \langle \alpha_3, u_2 \rangle u_2, u_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} \\ &\vdots \\ \beta_n &= \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_n, u_j \rangle u_j, u_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}\end{aligned}$$

则 $u_1, \dots, u_n$ 是 X 的一组标准正交基。

定义 6.15

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $T: X \rightarrow X$ 是线性变换,

- 若对 $\forall x, y \in X$, 有 $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, 则称 T 是 X 上的正交变换。
- 若对 $\forall x, y \in X$, 有 $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$, 则称 T 是 X 上的对称变换。

命题 6.16

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $T: X \rightarrow X$ 是线性变换, 则以下各条性质等价:

- T 是正交变换
- T 保范数: $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$
- T 把标准正交基映成标准正交基
- T 在某一组基下的矩阵是正交矩阵

命题 6.17

实对称阵具有以下性质:

- 实对称阵的特征值是实数;
- 实对称阵的特征向量对应于不同特征值的特征向量是正交的;
- 实对称阵可以正交对角化;

例题 6.4 设 $V = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间。

(1) 证明: $\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积。

(2) 应用 Schmidt 正交化方法将向量值 $1, x$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组。

解 (1) 只验证正定性。 $\langle f(x), f(x) \rangle = f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 \geq 0$, 取等当且仅当 $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f = 0$ 。

(2) $f_1 = 1, f_2 = x; u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \beta_2 = f_2 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1 = x - 1, u_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$ 。

例题 6.5 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in X, A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{s \times s}$ 。证明: $\text{rank} A = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$

证明 设 A_i 是 A 的第 i 列, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 是 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 的极大线性无关组, 先证明 $A_1, \dots, A_r$ 线性无关。

若 $\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i = 0$, 则 $\forall 1 \leq k \leq s, \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq s, \langle \alpha_k, \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k, \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq r$ 。因此 $A_1, \dots, A_r$ 确实线性无关。

对其他的 A_k , 设 $\alpha_k = \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i$, 则 $A_k = \begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_k \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_k \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_s, \alpha_k \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i \rangle \\ \langle \alpha_2, \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_s, \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_i \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_s, \alpha_i \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i$,

故 $\text{rank} A = r = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ 。

笔记 以下是一个典型错误解答。请思考错误原因: $A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_s \end{bmatrix} := P^T P$, 由 $\text{rank}(P^T P) = \text{rank} P$ 即得。

例题 6.6 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 并且有 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 分别为属于特征值 1 和 2 的特征向量。

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量的全体,

(2) 求矩阵 A 。

解 (1) A 实对称 $\Rightarrow A$ 属于不同特征值的特征向量相互正交, 故 $V_3 \cup \{0\} = (\text{span}(\alpha_1) \oplus \text{span}(\alpha_2))^\perp = t(1, 0, 1)^T$ 。

$V_3 = t(1, 0, 1)^T, t \neq 0$ 。

(2) 把 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 归一化, 得到 $e_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T, e_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T, e_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$

$$P = (e_1, e_2, e_3) \text{ 满足 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} P^T = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}.$$

6.3 二次型与对称矩阵的相合

定义 6.18

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵, 若存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^T B P$, 则称 A, B 相合。

相合是一种等价关系, 即满足自反性、对称性、传递性。

 **笔记** 每一个二次型都和一个对称矩阵一一对应, 由此可知矩阵的相合等价于对二次型换元。类似于相抵/相似标准形, 我们想找到相合关系中等价类的代表元, 因此引入相合标准型的概念。以下是几种求相合标准形的方法:

算法 6.19

1. 正交相似/正交相合: A 是 n 阶实对称矩阵, 可以正交相似对角化, 即存在 P 是正交矩阵, $P^T A P$ 是对角矩阵, 此即为 A 的相合对角化;
2. 配方法 (对二次型操作): 若 $Q(x)$ 有含平方项, 则直接配方即可, 否则利用 $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$ 构造出平方项;
3. 初等变换: 对 $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ 进行成对的初等变换与列初等变换, 最终得到 $\begin{bmatrix} P^T A P \\ P \end{bmatrix}$ 。

由于相合标准型中对角项系数并不唯一, 因此我们可以进一步求出唯一的相合规范型。

定理 6.20

A 是对称矩阵, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = \begin{bmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & O \end{bmatrix}$, 其中 $r+s = \text{rank} A$, r 称为正惯性指数, s 称为负惯性指数, $r-s$ 称为符号差, r, s 由 A 唯一确定。

在学习相合标准型之后, 我们就可以对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面进行分类了, 具体结论如下:

命题 6.21

假设已经把二次曲面化为标准形式, 则有: (以下假设 $a, b, c > 0$)

- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, 则曲面为椭球面;
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$, 则曲面为单叶双曲面;
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 - cz^2 = 1$, 则曲面为双叶双曲面;
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz = 0$, 则曲面为椭圆抛物面;
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 - cz = 0$, 则曲面为双曲抛物面;
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$, 则曲面为圆锥面;
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 = 1$, 则曲面为椭圆圆柱面;
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 = 1$, 则曲面为双曲圆柱面;
- 若标准形式为 $ax^2 - by = 0$, 则曲面为抛物圆柱面;

定义 6.22

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$,

- 若 $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0$, 则称 A 是正定的, 记作 $A \succ 0$;
- 若 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0$, 则称 A 是半正定的, 记作 $A \succeq 0$;
- 若 $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x < 0$, 则称 A 是负定的, 记作 $A \prec 0$;
- 若 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \leq 0$, 则称 A 是半负定的, 记作 $A \preceq 0$;

命题 6.23

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$, 以下命题等价:

- A 是正定的;
- A 的正惯性指数是 n , 负惯性指数是 0 ;
- A 的特征值全是正的;
- 存在唯一的 $B \succ 0$ 使得 $A = B^2$;
- 存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^T P$ (相合与单位阵);
- A 的顺序主子式全为正。

命题 6.24

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$, 以下命题等价:

- A 是半正定的;
- A 的正惯性指数是 $r = \text{rank} A$, 负惯性指数是 0 ;
- A 的特征值全是非负的;
- 存在 $B \succeq 0$ 使得 $A = B^2$ 且 $\text{rank} A = \text{rank} B$;
- 存在 P 使得 $A = P^T P$ 且 $\text{rank} A = \text{rank} P$;
- A 的所有主子式全为非负。
- A 的所有 k 阶主子式之和为非负。

例题 6.7 设实二次型 $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 。

(1) 利用正交变换把二次型化为标准型, 并写出正交变换矩阵。

(2) 判断 $Q(x) = -1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示曲面的类型。

解 (1) 二次型对应矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

特征值和特征向量为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda = -4; x_1 = a(-1, 0, 1)^T, x_2 = b(-1, 2, 0)^T, x_3 = (2, 1, 2)^T$ 。

对 x_1, x_2 作 G-S 正交化, 把 x_3 归一化, 得到 $e_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right), e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 。

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ 使得 } P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}。$$

因此经过正交变换 $x = Py$ 后二次型化为标准型 $\tilde{Q}(y) = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$ 。

(2) 由 (1) 知曲面为双叶双曲面。

例题 6.8 A 是 n 阶实对称矩阵且 $\det A < 0$, 证明: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $x^T A x < 0$ 。

证明 对 A 作正交相似对角化使得 $P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 由 $\det A < 0$ 有至少有一个 $\lambda_i < 0$ 。

取 $x = Pe_i$ 即有 $x^T Ax = \lambda_i < 0$ 。

例题 6.9 A, B 为 n 阶实对称矩阵, 证明以下结论:

(1) 若 A 正定, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^T AP = I_n$, $P^T BP$ 为对角矩阵, 且 $P^T BP$ 的对角元全是 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根。

* (2) 若 A, B 均半正定, 则存在可逆矩阵 H 使得 $H^T AH, H^T BH$ 为对角矩阵。

证明 (1) 由 A 正定有存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^T AQ = I_n$, 且由 B 实对称有 $Q^T BQ$ 是实对称矩阵,

此时存在正交矩阵 S 使得 $S^T Q^T BQS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 且 $S^T Q^T AQS = S^T I_n S = I_n$, 故 $P = QS$ 即为所求。

且 $\det(\lambda_i A - B) = \det(\lambda_i (Q^T)^{-1} Q^{-1} - B) = \det Q^T \det(\lambda_i (Q^T)^{-1} Q^{-1} - B) \det Q \cdot \frac{1}{\det(QQ^T)} = \det(\lambda_i I - Q^T BQ) \cdot \frac{1}{\det(QQ^T)} = 0$ 。

(2) 由 A, B 半正定有 $A + B$ 半正定, 故存在可逆矩阵 P 使得 $P^T (A + B)P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。设 $P^T AP = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_4 \end{bmatrix}$,

则 $P^T AP = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^T & -A_4 \end{bmatrix}$, 由于 $P^T AP \succeq 0$, 有 $A_4 \succeq 0$; 同理 $-A_4 \succeq 0 \Rightarrow A_4 = O$ 。

若 $A_2 \neq O$, 则存在 $u \in \mathbb{R}^r, v \in \mathbb{R}^{n-r}, u^T A_2 v < 0$, 此时 $\begin{bmatrix} u^T & \lambda v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = u^T A_1 u + 2\lambda u^T A_2 v$,

取 λ 足够大, 即有此时 $\begin{bmatrix} u^T & \lambda v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} < 0$ 与 $P^T AP \succeq 0$ 矛盾, 故 $A_2 = O$ 。

此时 $P^T AP = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}, P^T BP = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。对于对称矩阵 A_1 , 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A_1 Q$ 为对角矩阵,

而 $Q^T (I_r - A_1) Q$ 也是对角矩阵, 因此取 $H = P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$ 即可。