



线性代数作业答案

作者：陈文轩，卢皓东，李睿宇

组织：KFRC

时间：August 1, 2026

版本：1.0.0.1145



目录

第一章 第一次作业	1
第二章 第二次作业	3
第三章 第三次作业	7
第四章 第四次作业	12
第五章 第五次作业	15
第六章 第六次作业	18
第七章 第七次作业	20
第八章 第八次作业	25
第九章 第九次作业	30
第十章 第十次作业	33
第十一章 第十一次作业	37
第十二章 第十二次作业	41
第十三章 第十三次作业	46
第十四章 第十四次作业	50

第一章 第一次作业



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

习题一 (P60)

$$1. (4) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \\ \gamma_1 \rightarrow \gamma_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -4\gamma_3 \rightarrow \gamma_1 \\ \frac{7}{3}\gamma_3 \rightarrow \gamma_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

令 $x_4 = t$, 即得原线性方程组解

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{18}t, \frac{7}{9} - \frac{25}{18}t, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t, t \right)$$

$$(7) \text{ 系数矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \\ -4\gamma_1 \rightarrow \gamma_3 \\ -2\gamma_1 \rightarrow \gamma_4 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3\gamma_4 \rightarrow \gamma_3 \\ \frac{1}{45}\gamma_3 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3\gamma_3 \rightarrow \gamma_1 \\ -2\gamma_3 \rightarrow \gamma_2 \\ -10\gamma_3 \rightarrow \gamma_4 \\ -\frac{1}{2}\gamma_2, \frac{1}{2}\gamma_4 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -\gamma_4 \rightarrow \gamma_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_2 \\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_4 \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -\gamma_4 \rightarrow \gamma_1 \\ \gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3 \\ \gamma_4 \leftrightarrow \gamma_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ 令 } x_5 = t \text{ 即得:}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{7}{6}t, \frac{5}{6}t, 0, \frac{1}{3}t, t \right)$$

2. 解:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3Y_2 \rightarrow Y_1 \\ -aY_2 \rightarrow Y_3}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & a-2 & 2a+2 & 3a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2-a}{5}Y_1 \rightarrow Y_3} \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 0 & \frac{3a+11}{5} & \frac{4a-8}{5} \end{pmatrix}$$

(a 在前, 从全 a 列开始消元计算量较大)

另一消法:

$$\text{原} \xrightarrow{\substack{2Y_1 \rightarrow Y_2 \\ -2Y_1 \rightarrow Y_3}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ a-6 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2Y_2 \rightarrow Y_3 \\ -\frac{2}{3}Y_2 \rightarrow Y_1}} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ a+8 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

可见有解仅用 $a \neq -8$, 通解: $\frac{a-20}{3(a+8)}, \frac{4a+52}{3(a+8)}$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{a+8}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - \frac{20}{12(a+8)}, \frac{4}{3} + \frac{20}{12(a+8)} \right)$$

(注: 因为把 x_1, x_2, x_3 换序为 x_3, x_2, x_1 解方程是一样解, 无需求序于常见的倒三角阶梯; 下题自由变量选取亦然)

$$(2) \text{直接正常消元即可. 最后: } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2Y_2 \rightarrow Y_1 \\ \rightarrow Y_1}} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

有解必须 $(\Leftrightarrow) a+1=0, a=-1$ 令 $x_2=t$ 有 $(x_1, x_2, x_3) = (18t-5, t, 2-7t)$ 或

$$3. \text{解: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-Y_1 \rightarrow Y_2 \\ -2Y_1 \rightarrow Y_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1-a & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3Y_2 \rightarrow Y_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1-a & 6 \\ 0 & 0 & -2-3a & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1-18a}{7} \\ \frac{2-7}{7}}} \begin{pmatrix} \dots \\ 0 & 0 & -2-3a & 21 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 有唯一解 $(\Leftrightarrow) -2-3a \neq 0, a \neq -\frac{2}{3}$

无解 $(\Leftrightarrow) -2-3a=0, a=-\frac{2}{3}$

(另一角度: $\frac{5}{3}(x_1+x_2+x_3) + (-\frac{1}{3})(2x_1-x_2+3x_3)$

$$= x_1 + 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 3$$

注意到 x_1+2x_2 可个度 r_1, r_2 中的 x_1, x_2 表示出, 并且使该方程组无解的 a 必为 $-\frac{2}{3}$)

第二章 第二次作业

作业 2.1 (Ch4 T2)

证明：每个方阵都可以表示成一个对称阵和一个反对阵阵之和的形式



证明 对 n 阶方阵 A ，令 $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ， $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ ，则 B 是一个对称阵， C 是一个反对阵，且 $A = B + C$ 。

作业 2.2 (Ch4 T5)

$$\text{计算 } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



解 直接计算即可。结果为 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ 。

作业 2.3 (Ch4 T6)

举例求满足条件的 2 阶实方阵 A ，若不存在则证明。

$$(1) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) A^3 = I_2 \text{ 且 } A \neq I_2.$$



解 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c, d 为实数。则 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow a^2 + bc = d^2 + bc = 0, ab + bd = ac + cd = 1$ 。从第一个等式可以得到 $a = d$ 或 $a = -d$ 。
若 $a = d$ ，则 $ac + dc = 2ac = 1, ab + bd = 2ab = 1 \Rightarrow a \neq 0, ab = ac = \frac{1}{2} \Rightarrow b = c$ 。
代入第一个方程可以得到 $a^2 + b^2 = 0$ ，从而 $a = b = 0$ ，与 $ab = \frac{1}{2}$ 矛盾。
若 $a = -d$ ，则 $ab + bd = ab - ba = 0$ 与 $ab + bd = 1$ 矛盾，故不存在这样的实矩阵 A 。

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$(3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

 **笔记** (3) 中的矩阵为 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 的旋转矩阵。具体可以参考课本 180 页。

作业 2.4 (Ch4 T7)

计算下列矩阵的 k 次方幂。

$$(1) A := \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad (2) B := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (5) C := \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$



解 (1) 使用归纳。假设 $A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -\sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$ 。对 $k=1$ 显然成立。若对 $k \leq n$ 成立,

$$\begin{aligned} \text{则 } A^{n+1} &= A^n A = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos nx \cos x - \sin nx \sin x & \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \\ -\sin nx \cos x - \cos nx \sin x & \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)x & \sin(n+1)x \\ -\sin(n+1)x & \cos(n+1)x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故归纳成立。

(2) 对 a, b 不全为 0, 记 $\theta = \arctan \frac{b}{a}$, 则 $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

$$\text{从而 } B = \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}。$$

$$\Rightarrow B^k = (a^2+b^2)^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

(5) 注意到 $C = \alpha\beta$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。

$$\text{故 } C^k = \alpha\beta\alpha\beta \cdots \alpha\beta = \alpha(\beta\alpha)^{k-1}\beta = \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \alpha\beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} C。$$

作业 2.5 (Ch4 T8)

设 A, B 是 n 阶对称阵, 且 $AB = BA$, 证明: AB 是对称阵。

证明 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 故 AB 是对称阵。

笔记 这题可以加强为: 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 $AB = BA$ 当且仅当 AB 是对称阵。

作业 2.6 (Ch4 T9)

证明: 两个上(下)三角方阵的乘积仍是上(下)三角。

证明 只证明对上三角阵的情形。对 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$, 且 $\forall i > j, a_{ij} = b_{ij} = 0$ 。记 $C = (c_{ij})_{n \times n} = AB$, 则 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ 。当 $i > j$ 时, $\forall 1 \leq k \leq n$, 都有 $i > k$ 或 $k > j$, 故求和中每一项都是 0 $\Rightarrow c_{ij} = 0$ 。故 C 是上三角阵。

作业 2.7 (Ch4 T10)

证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵。

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是满足题意的矩阵, 则对 $\forall j, k, AE_{jk} = E_{jk}A$ 。左边得到的矩阵的第 k 列是 A 的第 j 列, 其余列为 0, 右边得到的矩阵的第 j 行是 A 的第 k 行, 其余行为 0。当 $i \neq j$ 时, 可以得到 $a_{ik} = a_{ji} = 0$ 。因此 A 的非对角元为 0, 即 A 是对角矩阵。

设 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 由 $AS_{ij} = S_{ij}A$ 有 $\lambda_i = \lambda_j, \forall i, j$, 故 $A = \lambda_1 I_n$ 即 A 是数量阵。

作业 2.8 (Ch4 T13)

设方阵 A 满足 $A^k = O$, 其中 k 是正整数, 证明: $I + A$ 可逆, 并求 $(I + A)^{-1}$ 。

证明 注意到 $(I_n + A)(I_n - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}) = I_n + (-1)^{k-1}A^k = I_n$, 故 $I + A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = I - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}$ 。

作业 2.9 (Ch4 T18)

证明: 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$ 。

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$,

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lk} a_{kl} = 0 \neq n = \text{tr}(I_n)$$

因此, 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$ 。

作业 2.10 (Ch4 T32)

证明: 初等方阵具有以下性质

1. $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)$
2. 当 $i \neq q, j \neq p$ 时, $T_{ij}(\lambda)T_{pq}(\mu) = T_{pq}(\mu)T_{ij}(\lambda)$
3. $D_i(-1)S_{ij} = S_{ij}D_j(-1) = T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)$

证明 直接计算即可。

作业 2.11 (Ch4 T14)

设方阵 A 满足 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$, 证明: $I - A$ 可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$ 。

证明 注意到 $I = 2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = (I - A)(6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I)$,

故 $I - A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = 6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I$ 。

作业 2.12 (Ch4 T28)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 A^n 与 A^{-1}

解 直接计算可得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对 A 按 2×2 进行分块得到 $A = \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix}$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。易得 $B^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

使用归纳证明: $A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix}$ 。对 $n = 1$ 显然成立, 若对 $n \leq k$ 成立,

$$\text{则 } A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} B^k & O \\ kB^{k-1} & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ kB^k + B^k & B^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ (k+1)B^k & B^{k+1} \end{bmatrix}。$$

$$\text{故归纳成立。} A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & -n(n-1) & 1 & -n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作业 2.13 (Ch4 T29)

设 A, B 为同阶方阵, 且满足 $AB = BA$, 计算 $\begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^n$

解 使用归纳证明: $\begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{bmatrix}$ 。对 $n=1$ 显然成立, 若对 $n \leq k$ 成立,

$$\text{则 } \begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O & A^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & kA^k B + kA^{k-1}BA \\ O & A^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^k B \\ O & A^{k+1} \end{bmatrix}。$$

$$\text{故归纳成立。} \begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{bmatrix}$$

作业 2.14 (Ch4 T30)

设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^3 = I_n$ 。计算 $\begin{bmatrix} O & I_n \\ A & O \end{bmatrix}^{2024}$

解 $\begin{bmatrix} O & I_n \\ A & O \end{bmatrix}^{2024} = \left(\begin{bmatrix} O & I_n \\ A & O \end{bmatrix}^2 \right)^{1012} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}^{1012} = \begin{bmatrix} A^{1012} & O \\ O & A^{1012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$

作业 2.15 (Ch4 T31)

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 且 A, B 可逆。求分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 的逆。

解 $\begin{bmatrix} A & O & I & O \\ C & B & O & I \end{bmatrix} \xrightarrow{-CA^{-1}r_1 \rightarrow r_2} \begin{bmatrix} A & O & I & O \\ O & B & -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} A^{-1}r_1 \\ B^{-1}r_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} I & O & A^{-1} & O \\ O & I & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} I & O & A^{-1} & O \\ O & I & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}。$

作业 2.16 (Ch4 T34)

计算下列矩阵的逆矩阵

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

解 直接计算即可。(1) $\begin{bmatrix} \frac{49}{186} & \frac{25}{186} & \frac{7}{31} & \frac{13}{62} \\ -\frac{2}{93} & -\frac{20}{93} & -\frac{5}{31} & \frac{2}{31} \\ \frac{7}{186} & -\frac{23}{186} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{62} \\ -\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

第三章 第三次作业

作业 3.1 (Ch3 T1)

计算下列矩阵的行列式:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$



解

$$\begin{aligned} (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_1 \rightarrow r_2]{-2r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2 \rightarrow r_3]{r_2 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{6}{5}r_3 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 1 \times (-3) \times \frac{5}{3} \times 10 = -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_2]{3r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{15}{4}r_2 \rightarrow r_3]{-\frac{1}{4}r_2 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{3}{13}r_3 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{13} \end{bmatrix} = 1 \times (-4) \times \left(-\frac{13}{4}\right) \times \left(-\frac{20}{13}\right) = -20 \end{aligned}$$

$$(3) \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_3]{-r_1 \rightarrow r_2} \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y-x & y-x & y-x \\ z-x & z-x & z-x \end{bmatrix} = 0$$

$$(4) \det \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} & & & a_{2,n-1} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix} = \dots$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} (-1)^n \cdots (-1)^4 a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-2,3} \det \begin{bmatrix} & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{\sum_{k=3}^{n+1} k} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1} \\
(5) \det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-c_1 \rightarrow c_2]{-c_1 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2c_2 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_2]{-r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ (b+a)(b-a) & 2(b-a) & 0 \\ (c+a)(c-a) & 2(c-a) & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{提取公因式}]{\text{第一行展开}} 2(b-a)(c-a) \det \begin{bmatrix} b+a & 2 \\ c+a & 2 \end{bmatrix} = -4(a-b)(b-c)(c-a) \\
(6) \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{第五行展开}} e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第四行展开}} d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{第三行展开}} c_3 d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 d_4 e_5
\end{aligned}$$

作业 3.2 (Ch3 T3)

将行列式 $\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$ 展开为关于 x 的多项式。

解

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} &= (x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} \\
&= (x-2) \left((x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) - \left(\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) \\
&= (x-2) \left((x-2) \left((x-2)^2 - 1 \right) - (x-2) \right) - \left((x-2)^2 - 1 \right) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5
\end{aligned}$$

作业 3.3 (Ch3 T5)

证明：奇数阶反对称方阵的行列式是 0。

证明 设 A 是 n 阶反对称方阵，即 $A^T = -A$ 。则 $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$ ，故 $\det A = 0$ 。

作业 3.4 (Ch3 T16)

计算下列矩阵的行列式:

$$(1) \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}_{n \times n}$$



解

$$(1) \text{ 设 } D_k = \begin{bmatrix} a_{n-k+1} & & & b_{n-k+1} \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_{n-k+1} & & & d_{n-k+1} \end{bmatrix}, \text{ 则 } D_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix}$$

$$\det D_n \xrightarrow{\text{第一行展开}} a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 & 0 \\ 0 & & & 0 & d_1 \end{bmatrix} - b_1 \det \begin{bmatrix} 0 & a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ 0 & c_2 & & & d_2 \\ c_1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{最后一行展开}} a_1 d_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix} - b_1 c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_1 d_1 - b_1 c_1) \det D_{n-1} = \cdots = \prod_{j=1}^n (a_j d_j - b_j c_j)$$

(2) 题目所给矩阵中出现大量 1, 故使用加边方法处理。

先考虑 a_i 均不为 0 的情形。

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[j=2,3,\dots,n+1]{-c_1 \rightarrow c_j} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1,2,\dots,n]{\frac{1}{a_i} c_{i+1} \rightarrow c_1} \det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \\
 &= \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j
 \end{aligned}$$

若存在 j 使得 $a_j = 0$ ，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall t \in (0, \delta), a_i + t \neq 0$ 。此时考虑

$$\det \begin{bmatrix} 1+a_1+t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n+t \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^n (a_j + t) + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_j + t)$$

由行列式对矩阵元素的连续性，可令 $t \rightarrow 0$ ，此时行列式值仍然为 $\prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j$ 。

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 设 } \Delta_k &= \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & & \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix}_{k \times k}, \\
 \Delta_n &\xrightarrow{\text{第一行展开}} 2 \cos \theta \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos \theta & & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{第一列展开}} 2 \cos \theta \Delta_{n-1} + \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & & \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} = 2 \cos \theta \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}
 \end{aligned}$$

对 $\theta = k\pi$ ，归纳可得 $\Delta_n = (-1)^{nk} n + 1$

否则假设 $\Delta_n - \lambda \Delta_{n-1} = \mu(\Delta_{n-1} - \lambda \Delta_{n-2}) = \mu^{n-2}(\Delta_2 - \lambda \Delta_1) \Leftrightarrow \Delta_n - \mu \Delta_{n-1} = \lambda(\Delta_{n-1} - \mu \Delta_{n-2}) = \lambda^{n-2}(\Delta_2 - \mu \Delta_1)$,

此时有 $\Delta_n = \frac{\mu^{n-1}(\Delta_2 - \lambda\Delta_1) - \lambda^{n-1}(\Delta_2 - \mu\Delta_1)}{\mu - \lambda}$ 。

易得 $\lambda\mu = 1, \lambda + \mu = 2\cos\theta$ 。对应 λ, μ 是方程 $x^2 - 2\cos\theta x + 1 = 0$ 的解。

$\Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \mu = e^{-i\theta}$ (交换顺序不影响结果)。又有 $\Delta_1 = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1 = e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta}$,

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{e^{-(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) - e^{(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k (e^{-i\theta})^{n-k} = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\end{aligned}$$

同时注意到 $\theta = k\pi$ 时表达式仍然满足 $\Delta_n = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta}$, 故此即为最终答案。

第四章 第四次作业

作业 4.1 (Ch3 T13)

用 Cramer 法则求解下列线性方程组：

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$



解 两道题目的解法一致，我们只对 (1) 进行求解。

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 12$$

考虑 Cramer 法则将数替换进来

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 36, \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} = 4, \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = 4$$

最后由 Cramer 法则得到

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$$

同样得到第二题的答案为

$$x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1$$

作业 4.2 (Ch4 T22)

设 A, B 是 n 阶方阵， λ 是数，证明：(1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$ ； (2) $(AB)^* = B^* A^*$ ； (3) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.



解 对于矩阵 A, B 均为可逆矩阵，我们有 $AA^* = \det A \cdot I_n, BB^* = \det B \cdot I_n$ 为此我们有

(1) 我们知道每一个矩阵的代数余子式都是原矩阵的一个 $n-1$ 阶子式， $n-1$ 阶子式的每一项均乘上一个 λ ，行列式的值会变为原来的 λ^{n-1} 倍，故 (1) 得证。

(2)

$$(AB)^* = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (B^{-1} \det B)(A^{-1} \det A) = B^* A^*$$

(3)

$$\det A^* \cdot \det A = \det(A \cdot A^*) = \det(\det A \cdot I_n) = (\det A)^n \Rightarrow \det A^* = (\det A)^{n-1}$$

对于 AB 中有不可逆矩阵的证明，可见[网站](#)

作业 4.3 (Ch4 T23)

设方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A^* 。

解 利用公式 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 以及可逆矩阵逆矩阵的唯一性我们可以得到

$$A^* = \det A \cdot A^{-1}, \det A = (\det A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}$$

最终我们可以得到

$$A^* = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

作业 4.4 (Ch4 T24)

设方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A 。

解 显然的 A^* 是可逆矩阵, 故 A 可逆, 由 22 题我们知道 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$ 。

在本题中 n 取 4, $\det A^* = -8$, 故 $\det A = -2$, 再由 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 知道

$$A = \det A \cdot (A^*)^{-1} = (-2) \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{4} \\ & -1 & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -\frac{1}{2} \\ & 2 & & \\ & -1 & & \\ -2 & & & \end{bmatrix}$$

这里省略了 A^* 的逆矩阵的求解, 大家可以自行完成。

作业 4.5 (Ch4 T25)

设 n 阶方阵 A 的每行, 每列元素都是 0, 证明: A^* 的所有元素都相等。

解 我们需要先承认一个事实, 根据矩阵的每一项的平等地位特征, 我们只需在这个条件下证明 $A_{11} = A_{21}$ 即可, 那接下来我们来证明

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} + a_{33} + \cdots + a_{3n} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} + a_{n3} + \cdots + a_{nn} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_{21} \end{aligned}$$

利用同样的方法我们可以证明 $A_{i,j} = A_{i+1,j} = A_{i,j+1}$, 即完成了证明。

作业 4.6 (Ch4 T34)

计算下列矩阵的逆矩阵

$$(3) \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}$$

解 (3) 我们采取合并一个 I_n 的方法来求逆矩阵

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & 1 \\ & & \ddots & 1 & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 & \ddots \\ & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & 1 \\ & 1 & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

得到的右侧的 $n \times n$ 的矩阵即为逆矩阵，第二步的推导为依次把第 i 行乘上 -1 加到第 $i-1$ 行 ($2 \leq i \leq n$)。

(5) 这个题目最方便的是利用伴随矩阵法，我们记原来的矩阵为 A ，由上次作业我们可以得到

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$$

那我们可以直接来计算代数余子式，分两种情况：

当 $i = j$ 时，

$$A_{ii} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1+a_1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1+a_{i-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_{i+1} & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n a_k$$

当 $i \neq j$ 时我们计算 A_{12} 作为例子，

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1+a_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{bmatrix} = -a_3 \cdots a_n$$

同样可以得到

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_{j+1} \cdots a_n$$

那么这样得到 $A^* = (A_{ji})_{n \times n}$ 为伴随矩阵，进而得到 A 的逆矩阵。

第五章 第五次作业

作业 5.1 (Ch4 T20)

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 求 A 的 LU 分解, 并基于 A 的 LU 分解求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 此处 $\mathbf{b} = (1, -2, 1)^T$.

解

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-\frac{1}{2}), T_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{32}(\frac{4}{3})} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

故 LU 分解为:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = T_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} T_{31}(-1)^{-1} T_{32}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

记如上分解的左矩阵为 L , 右矩阵为 U . 对线性方程组 $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 令 $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$, 则求解原方程可化为求解:

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases}$$

运用 Gauss 消元法可得:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

作业 5.2 (Ch4 T36)

设 A 是 n 阶方阵, $\mathbf{a}$ 为 n 维列向量. 证明:

$$\det(A - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) = (1 - \mathbf{a}^T A^{-1} \mathbf{a}) \det(A).$$

证明 由 A 可逆, 以及对于同阶方阵有等式 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, 故原命题等价于:

$$\det(I_n - \mathbf{a}\mathbf{a}^T A^{-1}) = 1 - \mathbf{a}^T A^{-1} \mathbf{a},$$

下设 $\mathbf{b} = \mathbf{a}^T A^{-1}$ 为 n 维行向量, 即只用证明 $\det(I_n - \mathbf{a}\mathbf{b}) = 1 - \mathbf{b}\mathbf{a}$, 假设 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 知 $\mathbf{a} = 0$ 时原命题显然成立, 若 $\mathbf{a} \neq 0$, 假设 $a_i \neq 0$, 则有对所求行列式

$$\det \begin{bmatrix} 1 - a_1 b_1 & -a_1 b_2 & \cdots & -a_1 b_n \\ -a_2 b_1 & 1 - a_2 b_2 & \cdots & -a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n b_1 & -a_n b_2 & \cdots & 1 - a_n b_n \end{bmatrix} = a_i \det \begin{bmatrix} 1 - a_1 b_1 & -a_1 b_2 & \cdots & \cdots & -a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_1 & \cdots & a_i^{-1} - b_i & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n b_1 & -a_n b_2 & \cdots & \cdots & 1 - a_n b_n \end{bmatrix}$$

进行消元操作

- 把第 i 行的 $-a_j$ 倍加到第 j ($j \neq i$) 行

- 把第 $j(j \neq i)$ 行的 b_i 倍加到第 i 行

依次得到和原行列式等值的两个行列式

$$= a_i \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -a_i^{-1}a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_1 & \cdots & a_i^{-1} - b_i & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_i^{-1}a_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = a_i \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & -a_i^{-1}a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_i^{-1} - b_i - \sum_{j \neq i} a_i^{-1}a_j b_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_i^{-1}a_n & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

现第 i 行仅有一个非零元, 除了第 i 列外其他列只有对角元非零为元素 1, 按第 i 行展开得到行列式的值为

$$\det(I_n - ab) = a_i \left(a_i^{-1} - b_i - \sum_{j \neq i} a_i^{-1}a_j b_j \right) = 1 - \sum_{j=1}^n a_j b_j = 1 - ba,$$

这就是我们所要证明的.

注 从证明过程可看出本题最后的目标等式在 a, b 完全没有关系时也成立, 关于这个等式有进一步的推广和更好的证明方法, 可参考第四次习题课讲义引理 2.29、2.30 和本次作业 39 题.

作业 5.3 (Ch4 T37)

设 A 是 n 阶可逆方阵, a, b 为 n 维列向量. 证明: $A + ab^T$ 可逆当且仅当 $1 + b^T A^{-1}a \neq 0$. 且 $A + ab^T$ 可逆时,

$$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a}.$$

证明 若 $1 + b^T A^{-1}a \neq 0$, 计算有

$$\begin{aligned} (A + ab^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a} \right) &= I + ab^T A^{-1} - \frac{ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a} - \frac{ab^T A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a} \\ &= I + \frac{ab^T A^{-1}b^T A^{-1}a - ab^T A^{-1}ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a} \\ &= I + \frac{b^T A^{-1}a ab^T A^{-1} - b^T A^{-1}a ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1}a} \\ &= I \end{aligned}$$

(注意右边分式中红色部分为数字, 可以使用数乘交换律) 这个等式表明此时 $A + ab^T$ 可逆, 且给出了它的逆. 往后仅需证明 “ $A + ab^T$ 可逆 $\rightarrow 1 + b^T A^{-1}a \neq 0$ ”, 对这个命题, 下面给出两个方法

1. 重复一次 36 题的证明可得到 $\det(A + ab^T) = (1 + b^T A^{-1}a) \det(A)$, 而 $A + ab^T$ 可逆有 $\det(A + ab^T) \neq 0$, 因此 $(1 + b^T A^{-1}a) \neq 0$.
2. 考虑证明它的逆否命题 “ $1 + b^T A^{-1}a = 0 \Rightarrow A + ab^T$ 不可逆”, 若此时 $A + ab^T$ 可逆, 则有 $(A + ab^T)x = 0$ 有唯一解 0, 而 $x = A^{-1}a$ 时 $(A + ab^T)x = a + abA^{-1}a = 0$, 这表明 $A^{-1}a = 0, a = 0$, 但此时 $1 + b^T A^{-1}a = 1 \neq 0$, 矛盾.

作业 5.4 (Ch4 T38)

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 且 A 为对称可逆方阵. 证明: 存在可逆方阵 P 使得 $P \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & B \end{bmatrix} P^T$ 为准对角阵.

证明 我们考虑进行分块矩阵的初等变换, 可以发现如下事实: 由于 A 为对称可逆方阵, 因此用 A 做行变换消去 C 和做列变换消去 C^T 应该是完全相同的过程, 先考虑找到 P 使得 C 消为 0, 再验证 P^T 右乘时可把 C^T 也消为 0, 从

而取

$$P = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}, P^T = \begin{bmatrix} I_m & (-CA^{-1})^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -(A^T)^{-1}C^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}C^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

计算有

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}C^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - CA^{-1}C^T \end{bmatrix},$$

它是一个准对角阵.

作业 5.5 (Ch4 T39)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明:

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB).$$



证明 进行分块矩阵的初等变换有:

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

利用性质对于同阶方阵 $U, V, \det(UV) = \det(U)\det(V)$ (它当然也对大于两个以上的方阵相乘成立), 对上面的等式取行列式, 并且利用到每个第三类变换阵的行列式值都是 1, 即可得

$$\det(I_n - BA) = \det(I_m - AB) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

作业 5.6 (Ch4 T40)

计算下列矩阵的秩 (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$



解 三问均通过行列变换计算即可, 结果分别为 3, 2, 3.

第六章 第六次作业

作业 6.1 (Ch4 T42)

设 A 是 n 阶方阵, 且 $A^2 = I$, 求方阵 $\text{diag}(I+A, I-A)$ 的相抵标准形。

解 即求 $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A)$ 。一方面, $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) \geq \text{rank}(I+A+I-A) = n$,

另一方面, 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) \leq \text{rank}((I+A)(I-A)) + n = n$, 故 $\text{rank}(I+A) + \text{rank}(I-A) = n$ 。

故相抵标准形为 $\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。

作业 6.2 (Ch4 T43)

设 A 是 n 阶方阵, 证明: $\text{rank} A^* = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n-2 \end{cases}$

证明 若 $\text{rank}(A) = n$, 则 A 可逆, 又由 $A^*A = \det A I_n$ 有 A^* 可逆, 故 $\text{rank}(A^*) = n$ 。

若 $\text{rank}(A) = n-1$, 则 A 有非零 $n-1$ 阶子式, 故 $\text{rank}(A^*) \geq 1$ 。又由 Sylvester 不等式,

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A^*) \leq \text{rank}(AA^*) + n = n \Rightarrow \text{rank}(A^*) \leq 1$, 故 $\text{rank}(A^*) = 1$ 。

若 $\text{rank}(A) \leq n-2$, 则 A 没有非零 $n-1$ 阶子式, 故 $A^* = O, (\text{rank})(A^*) = 0$ 。

作业 6.3 (Ch4 T45)

证明下列关于秩的不等式:

$$(1) \max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B), \text{rank}(A+B)\} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

$$(3) \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

证明

(1) 由于 $A = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}, A+B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$, 乘法不增大矩阵的秩, 有 $\text{rank}(A) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, $\text{rank}(B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, \text{rank}(A+B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, 故 $\max\{\text{rank}(A), \text{rank}(B), \text{rank}(A+B)\} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 。

(2) $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} \geq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 。

(3) 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{p \times q}, C \in \mathbb{F}^{m \times q}, \text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$, 则 $\exists 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m; 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$; $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq p; 1 \leq l_1 < \dots < l_s \leq q$, 使得 $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} \neq 0, B \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_s \\ l_1 & \dots & l_s \end{pmatrix} \neq 0$ 。

记前面两个行列式对应的方阵是 $A_1, B_1, M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$,

则 $M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r & m+k_1 & \dots & m+k_s \\ j_1 & \dots & j_r & n+l_1 & \dots & n+l_s \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{bmatrix} = \det A_1 \det B_1 \neq 0$ 。

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \text{ 有 } r+s \text{ 阶非零子式, 故 } \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq r+s = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

作业 6.4 (补充题)

若 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 是列满秩的, 证明: A 是某个 m 阶可逆方阵的前 n 列.

证明 显然有 $m \geq n$, 此时 $\exists P \in GL_m(\mathbb{F}), Q \in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. $A = P \begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} Q \\ O \end{bmatrix}$,

这是可逆矩阵 $P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{m-n} \end{bmatrix}$ 的前 n 列。

作业 6.5 (Ch5 T2)

设 $a_1 = (0, 1, -2), a_2 = (2, 1, 3), a_3 = (4, 5, 0)$ 是三维几何空间中的三个向量。能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合? 这三个向量是否共面?

解 注意到 $3a_1 + 2a_2 = a_3$, 故 a_3 可由 a_1, a_2 线性表出, 故 a_1, a_2, a_3 共面。

作业 6.6 (Ch5 T3)

在 $\mathbb{F}^4$ 中, 判断向量 b 能否写成 a_1, a_2, a_3 的线性组合, 若能, 请写出一种表示方式:

(1) $a_1 = (-1, 3, 0, -5), a_2 = (2, 0, 7, -3), a_3 = (-4, 1, -2, 6), b = (8, 3, -1, -25)$.

(2) $a_1 = (3, -5, 2, -4)^T, a_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, a_3 = (3, 11, -5, 10)^T, b = (2, -30, 13, -26)^T$.

解 (1) 能。 $b = 2a_1 - a_2 - 3a_3$ 。

(2) 能。 $b = 2a_1 - 5a_2$ (答案不唯一)。

作业 6.7 (Ch5 T4)

设 $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 1, 1, 1)$ 。证明: $\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合, 且表示唯一。

证明 设 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵行列式非零, 故方程组的解唯一, 即表示唯一。

作业 6.8 (Ch5 T10)

判断下列向量组是否线性相关:

(1) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$

(3) $a_1 = (-2, 1, 0, 3), a_2 = (1, -3, 2, 4), a_3 = (3, 0, 2, -1), a_4 = (2, -2, 4, 6)$

解 (1) $\det(a_1^T, a_2^T, a_3^T) \neq 0$, 故线性无关。

(2) $\det(a_1^T, a_2^T, a_3^T, a_4^T) = 0$, 故线性相关。

第七章 第七次作业

作业 7.1 (Ch5 T12)

判断下述命题

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合.
2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关.
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关.
4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关.
5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关.
6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关.
7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关.
8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关.

解

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合.
否, 考虑作为一维数组向量的 $0, 1, 1$ 不能被 0 表示为线性组合.
2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关.
否, 考虑二维数组向量组 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关.
是. 不妨设原向量组集合为 V , 子向量组为 $V' \subset V$, 则

V 线性无关

$$\Leftrightarrow \sum_{\alpha \in V} \lambda_{\alpha} \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V \text{ 唯一解}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha = \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha + \sum_{\alpha \in V-V'} 0 \cdot \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V' \text{ 唯一解}$$

$\Leftrightarrow V'$ 线性无关.

4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关.

是, 它们可作为列向量排成一个规格为 $n \times (n+1)$ 的矩阵, 这个矩阵作为系数矩阵对应的齐次线性方程组的有非零解, 该非零解表明它们可线性组合为零向量, 因而线性相关. (或秩、基等其他角度也可)

5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关.

否, 记矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \\ \vdots \\ a_s + a_1 \end{bmatrix}$$

根据 s 为偶数时 $\det(P) = 0$, P 不可逆知该向量组构成的矩阵一定无 s 阶可逆子矩阵 (假如线性无关那么秩为 s , 列秩也为 s , 从而一定可选出 s 个列得到一个可逆的 s 阶子矩阵), 一定线性相关.

6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关.

是, s 为偶数时理由同 5, s 为奇数时 $\det(P) \neq 0$, 该二向量组等价, 因此秩都严格小于 s .

7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关.

是, 利用定义验证时仅考虑它们加长前的分量便可得全部的线性组合系数为 0.

8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关.

否, 每一个线性无关的数组向量组都可添上零保持线性无关性, 而它们现在都可看成是由线性相关的零向量加长得到.

作业 7.2 (Ch5 T16)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$. 如 $\lambda_i \neq 0$, 则用 b 代替 a_i 后, 向量组 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_s$ 线性无关.

证明

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$$

根据 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 可知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$$

从而向量组 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_s$ 线性无关.

作业 7.3 (Ch5 T17)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关, 且 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 可以由向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性表示, 则 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 也线性无关.

证明 根据线性表示关系可知存在矩阵 $B \in \mathbb{F}^{r \times r}$ (注意未必可逆) 使得

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B,$$

从而由线性无关性, 方程

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

仅有零解. 这表明 $Bx = 0$ 也仅有零解, B 一定可逆 (否则 $Bx = 0$ 已有非零解, 它也是原方程的非零解). 因此 B^{-1} 给出了 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 关于 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 的线性表示, 这两个向量组是等价的, 自然 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 也是线性无关的.

(另一解法:) 向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 与 $b_1, b_2, \dots, b_r, a_1, a_2, \dots, a_r$ 是等价向量组, 这表明向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 的秩至少为 r .

注 一个推理: 一般一个向量组 U 可被另一个向量组 V 线性表示, 则一定有 U 与 V 的向量合在一起构成的新向量组 W 可被 V 表示, 因此可得 U 的秩不大于 W 的秩等于 V 的秩.

作业 7.4 (Ch5 T19)

求下列向量组的极大线性无关组和秩.

1. $\mathbf{a}_1 = (3, -2, 0), \mathbf{a}_2 = (27, -18, 0), \mathbf{a}_3 = (-1, 5, 8).$
2. $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 4), \mathbf{a}_2 = (0, 3, 1, 2), \mathbf{a}_3 = (3, 0, 7, 14), \mathbf{a}_4 = (1, -1, 2, 0).$
3. $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2, 3), \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_3 = (3, 4, 5, 6), \mathbf{a}_4 = (4, 3, 2, 1), \mathbf{a}_5 = (6, 5, 4, 3).$

解 1.

$$(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = \begin{bmatrix} 3 & 27 & -1 \\ -2 & -18 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}r_1 \rightarrow r_2} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{24}{13}r_2 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 27 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 2, 极大线性无关组为 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}, \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}.$

2.

$$(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T, \mathbf{a}_4^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_2, -2r_1 \rightarrow r_3, -4r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_3 \rightarrow r_2, -2r_3 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}r_4 \rightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 3, 极大线性无关组为 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}.$

3.

$$(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T, \mathbf{a}_4^T, \mathbf{a}_5^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2 \rightarrow r_3, -3r_2 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & -8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1 \rightarrow r_2, r_1 \rightarrow r_3, 2r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 2, 极大线性无关组为它们中的任意两个构成的向量组.

作业 7.5 (Ch5 T22)

设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 的秩为 r , 则其中任意 r 个线性无关的向量构成 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 的极大无关组.

证明 根据极大无关组的定义(课本定义 5.3.1), 设 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ 为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 中任意 r 个线性无关的向量, 则任意 $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 都有 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\} \cup \{\mathbf{a}_k\}$ 为秩为 r 的向量组, 从而它线性相关. 故 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\} \cup \{\mathbf{a}_k\}$ 为极大无关组.

作业 7.6 (Ch5 T23)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的秩为 r , 如 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 可由它的 r 个向量线性表示, 则这 r 个向量构成 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的极大线性无关组.

证明 根据极大无关组的定义(课本定义 5.3.1), 设 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ 为题目所述的 r 个向量, 由于其和原向量组可互相线性表示, 其秩也为 r , 且任意 $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 都有其可被这 r 个向量表示, $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} \cup \{a_k\}$, 为线性相关的向量组. 故 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} \cup \{a_k\}$ 为极大无关组.

作业 7.7 (Ch5 T41)

判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间

1. V 是实数对 (x, y) 的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$, 定义

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (x, y).$$

2. V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法.
3. V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法.
4. V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘.

解

1. 否. 若是, 注意到任意 (x, y) , 根据数乘分配律

$$(x, y) = 2(x, y) = (x, y) + (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$$

这表明该空间若视为线性空间, 则只能是零空间, 但本题的空间是不平凡的.

2. 是. 依照定义逐条验证即可.
3. 否. 若是, 则注意到 $f = 1, g = -1$ 为两个 V 中的元素, 但 $f + g = 0$ 不是.
4. 否. 若是, 则注意到可逆方阵 $A, -A$ 为两个 V 中的元素, 但 $A + (-A) = 0$ 不是.

作业 7.8 (Ch5 T42)

设 V 是所有实函数在实数域上构成的线性空间, 判断 V 中下列函数组是否线性相关.

1. $1, x, \sin x$
2. $1, x, e^x$
3. $1, \cos 2x, \cos^2 x$
4. $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$
5. $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$

解

1. 否. 设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 \sin x = 0$$

令 $x = 0, \pi$, 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 从而 λ_3 也为 0, 因此线性无关.

2. 否. 设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x = 0$$

令 $x \rightarrow -\infty$, 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 从而 λ_3 也为 0, 因此线性无关.

3. 是. 存在线性组合系数 $1, 1, -2$ 使得 $1 \cdot 1 + 1 \cdot \cos 2x + (-2) \cdot \cos^2 x = 0$, 因此线性相关.
4. 是. 存在线性组合系数 $2, 6, 1, -1$ 使得 $2 \cdot 1 + 6 \cdot x^2 + 1 \cdot (x-1)^3 + (-1) \cdot (x+1)^3 = 0$, 因此线性相关.
5. 否. 设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 使得

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx = 0$$

对该式子求 $2, 4, \dots, 2n$ 阶导数可得:

$$1^{2i} \lambda_1 \cos x + 2^{2i} \lambda_2 \cos 2x + \dots + n^{2i} \lambda_n \cos nx = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

将该等式写成矩阵形式即

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 1^4 & 2^4 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2n} & 2^{2n} & \dots & n^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos x \\ \lambda_2 \cos 2x \\ \vdots \\ \lambda_n \cos nx \end{bmatrix} = 0.$$

左边的矩阵为一行列式非零的 Vandermonde 矩阵(相关计算见课本 P83 例 3.5.3, 或第四次习题课讲义例 2.20), 其可逆, 因此可得 $\lambda_i \cos ix = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 因此线性无关.

(用积分的解法:) 注意到

$$\lambda_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ix (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx) dx = 0$$

因此该向量组线性无关.

第八章 第八次作业

作业 8.1 (Ch5 T31)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 向量组 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 有关系式

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$$

证明: $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当 T 为可逆方阵.

证明 $\Rightarrow$: 若 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 则 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为满秩方阵, 故可逆

$$T = (b_1, b_2, \dots, b_n)(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}$$

是可逆的方阵.

$\Leftarrow$: 若 T 为可逆方阵, 则

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$$

为可逆方阵之积, 故它也为可逆方阵, 从而列向量组满秩为 n , 其为 $\mathbb{F}^n$ 的基.

作业 8.2 (Ch5 T34)

以向量组 $a_1 = (3, 1, 0), a_2 = (6, 3, 2), a_3 = (1, 3, 5)$ 为基, 求 $\beta = (2, -1, 2)$ 的坐标.

解 设 β 的坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 则

$$\beta = \sum_{i=1}^3 x_i a_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (-76, 41, -16)$.

作业 8.3 (Ch5 T35)

设 $a_1 = (3, 2, -1, 4), a_2 = (2, 3, 0, -1)$.

1. 将 a_1, a_2 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.
2. 给出标准基在该组基下的表示.
3. 求 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标.

解 (题目给出的为行向量, 以下写法是为了和矩阵乘法相容.)

1. 设扩充后的基为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 考虑对

$$\begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

可见其任意两行都线性无关, 从而保证行向量无关性即可, 可取 $a_3 = (1, 0, 0, 0), a_4 = (0, 1, 0, 0)$.

2. 标准基在该组基下的表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

右边矩阵各列即各个标准基的坐标.

3. 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 41 \\ 39 \end{bmatrix}.$$

即 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标为 $(-4, -14, 41, 39)$.

作业 8.4 (Ch5 T39)

求下列齐次线性方程组的基础解系与通解

$$(1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

解 (1) 用 Gauss 消元法, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5r_1 \rightarrow r_2, r_1 \rightarrow r_3, -3r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 \rightarrow r_3, r_2 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见基础解系向量个数 $4 - 2 = 2$, 即可取

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

为基础解系, 通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{F}.$$

(2) 用 Gauss 消元法, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1 \rightarrow r_2, r_1 \rightarrow r_3, -r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{-r_4 \rightarrow r_1, 3r_4 \rightarrow r_2, -4r_4 \rightarrow r_3} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

可见基础解系向量个数 $5 - 3 = 2$, 即可取

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为基础解系, 通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{F}.$$

作业 8.5 (Ch5 T40)

已知 $\mathbb{F}^5$ 中向量 $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 2, 1, 2)^T$, 求找一个齐次线性方程组使得 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 为该方程组的基础解系.

解 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times 5}$ 为该方程组的系数矩阵, 则有

$$Ax = 0 \Leftrightarrow PAx = 0$$

其中 P 为任意可逆方阵, 则根据 Gauss 消元法可取 P 使得 PA 仅有前 $r = \text{rank}(A)$ 行非零, 即可不妨设 A 为行满秩的, 且 A 的行秩满足 $5 - r = 2$, 即 $r = 3$. 现考虑

$$A(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^T A^T = 0$$

此时 A^T 的列秩为 3, 而根据方程

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^T x = 0$$

的基础解系中解向量个数为 $5 - 2 = 3$, 从而可求解它的基础解系, 得到三个线性无关的向量构成 A^T 的列向量. 于是可取

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

它是一个满足条件的系数矩阵.

作业 8.6 (Ch5 T45)

V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对称方阵全体, 定义加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘. 证明: V 为线性空间, 并求它的一组基和维数.

证明 只用验证 V 为 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的子空间, 而对任意矩阵 $A, B \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$(\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda(A)_{ij} + \mu(B)_{ij} = \lambda(A)_{ji} + \mu(B)_{ji} = (\lambda A + \mu B)_{ji}$$

从而可得 V 对向量的加法和数乘封闭, 其为 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的子空间. 且对 $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}.$$

可由向量组 $\{E_{ii} | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} | i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 线性表示, 且 $A = 0 \rightarrow a_{ij} = 0$, 这表明线性表示唯一, 故它们构成了 V 的一组基, 维数为 $\frac{n^2+n}{2}$.

作业 8.7 (Ch5 T46)

给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体. 证明: V 在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数.

解 只用证明 V 为 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 的子空间, 对 $\forall B, C \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有

$$(\lambda B + \mu C)A = \lambda BA + \mu CA = \lambda AB + \mu AC = A(\lambda B + \mu C)$$

从而 $(\lambda B + \mu C) \in V$, 故 V 对矩阵的加法和数乘封闭, 其为 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 的子空间. 对于基的求解, 下设 $B = (b_{ij})_{3 \times 3} \in V$, 有

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 4b_{11} - 2b_{21} + b_{31} & 4b_{12} - 2b_{22} + b_{32} & 4b_{13} - 2b_{23} + b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} + 4b_{13} & -2b_{13} & b_{11} + b_{13} \\ b_{22} + 4b_{23} & -2b_{23} & b_{21} + b_{23} \\ b_{32} + 4b_{33} & -2b_{33} & b_{31} + b_{33} \end{bmatrix}$$

这是一个有九个位置变量的线性方程组, 求解起来较困难, 下面介绍一个观点来直观的看出它的解空间维数:

1. 初始化: 假设 b_{12} 为最后得到解系中一个参数.
2. 根据 (2,2) 处的方程, 可见 $\{b_{12}, b_{23}\}$ 可被 b_{12} 线性表示.
3. 寻找其他含 b_{12}, b_{23} 的方程, 发现没有可直接被它们线性表示的变量了, 看 (2,1) 处方程考虑引入 b_{11} 为解系中第二个参数, 则有 $\{b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{22}\}$ 可被 b_{11}, b_{12} 线性表示.
4. 寻找其他含 $\{b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{22}\}$ 的方程, 发现没有可直接被它们线性表示的变量了, 看 (2,3) 处方程考虑引入 b_{13} 为解系中第二个参数, 则有 $\{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}\}$ 可被 b_{11}, b_{12}, b_{13} 线性表示.
5. 寻找其他含 $\{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}\}$ 的方程, (1,1) 处发现 b_{31} 可被它们线性表示, 从而也可被 b_{11}, b_{12}, b_{13} 线性表示. (1,2) 处发现 b_{32} 可被线性表示, (1,3) 处发现 b_{33} 可被线性表示.
6. 这说明方程的解最多只需要三个 b_{11}, b_{12}, b_{13} 三个作为参数就可表示出.

上述讨论发现这个方程组的基础解系最多只有三个向量, 从而 $\dim V \leq 3$, 而知 I, A, A^2 为 V 中的向量, 计算有

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

从它们的第二行可看出他们是线性无关的, 故 $\dim V = 3$, 且 I, A, A^2 构成它的一组基.

作业 8.8 (Ch5 T47)

$V = \mathbb{F}^{n \times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间, 令 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有满足 $\text{Tr}(A) = 0$ 的 n 阶矩阵 A 的全体. 证明: W 为 V 的线性子空间, 并求 W 的一组基和维数.



解 $\forall A, B \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \text{Tr}(\lambda A) + \text{Tr}(\mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B) = 0$$

从而 $\lambda A + \mu B \in W$, 故 W 对矩阵的加法和数乘封闭, 其为 V 的子空间. 而对于 $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in W$, 有 $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$, 从而

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} (E_{ii} - E_{nn})a_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij}a_{ij}$$

这表明了 A 可被向量组 $\{E_{ii} - E_{nn} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{E_{ij} | i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 线性表示, 且它们是线性无关的, 从而它为一组基, 维数为 $n^2 - 1$.

第九章 第九次作业

作业 9.1 (Ch6 T1)

判断下面所定义的变换 $\mathcal{A}$, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

- (1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathcal{A}(x, y)^T = (x + y, x^2)^T$;
- (2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^T = (3x - 2y + z, 0, x + 2y)^T$;
- (3) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^T = (x - y, z, x + 1)^T$ 。



解 容易判断 (1)(3) 不是线性变换, (2) 是线性变换。

作业 9.2 (Ch6 T35)

判断下面所定义的变换, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

- (1) 取定 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 对每个 $x \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{A}(x) = Ax - xB$;
- (2) 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}(x) = \alpha$, 其中 α 为 V 中的一个固定的向量。



解 容易判断第一小问是线性变换, 但注意第二小问需要对 α 是否为 0 元素讨论, 如果为 0 则是线性变换, 不是 0 则不是线性变换。

作业 9.3 (Ch6 T36)

求下列线性变换在所指定的基下的矩阵

- (3) 给定 2 阶实方阵 A , 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathcal{A}(x) = Ax - xA$ 在基

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下的矩阵



解 要求 $\mathcal{A}(x) = Ax - xA$ 在基下的矩阵, 记为 P , 我们有等式

$$\mathcal{A}(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)P$$

由此我们设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

然后我们代入最终可以求得矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$$

作业 9.4 (Ch6 T37)

在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathcal{A}(x, y, z)^T = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^T$ 。求 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。



解

$$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \cdot 0 \\ 1-3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 \cdot 1 \\ 0-3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}(e_3) = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 \cdot 0 \\ 0-3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

通过上述计算, 我们得到变换矩阵 A 的列向量分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

这是变换 $\mathcal{A}$ 在标准基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵表示。

作业 9.5 (Ch6 T38)

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 将 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ 变换到 $\beta_1 = (2, 3, 5)^T, \beta_2 = (1, 0, 0)^T, \beta_3 = (0, 1, -1)^T$, 求 $\mathcal{A}$ 在自然基和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵,

解 我们有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)A, (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_1, e_2, e_3)B$$

$$\mathcal{A}((e_1, e_2, e_3)) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A^{-1} = (e_1, e_2, e_3)BA^{-1}$$

$$\mathcal{A}((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = A(e_1, e_2, e_3)A = (e_1, e_2, e_3)BA^{-1}A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}B$$

最后得到

$$BA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}, A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即为最终结果。

作业 9.6 (Ch6 T39)

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1, -1)^T, \alpha_2 = (1, 1)^T$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (-1, 1)$ 下的矩阵。

解

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2) &= \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

作业 9.7 (Ch6 T40)

设 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵:

- (1) $\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2$;
(2) $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$ 。

解 总体上我们有 $P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1} \mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = ((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)T)^{-1} \mathcal{A}((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)T) = T^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}AT$
其中 T 为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 在 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的坐标, 我们只用来求 T 就可以了。

(1)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1/2 & 9/2 & -7/2 \\ -3/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

作业 9.8 (Ch6 T41)

在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (2, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T; \beta_1 = (2, 3, 1)^T, \beta_2 = (7, 9, 5)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$, 定义线性变换 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, 3)$ 。

- (1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵;
(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵。

解

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

得到

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

同时我们有

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1} \mathcal{A}((\beta_1, \beta_2, \beta_3)) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{-1} \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A = A$$

我们得到两个矩阵是一致的, 为

$$A = B = \begin{bmatrix} -3/2 & -3 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

第十章 第十次作业

作业 10.1 (Ch6 T13)

求下列矩阵的全部特征值和全部特征向量：

$$(2)A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解 (2) $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$
 $\Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$, 即特征值为 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 。

对 $\lambda_1 = e^{i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = e^{i\theta}, x_1 = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0, \lambda_2 = e^{-i\theta}, x_2 = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

(3) $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1)\lambda - 0 + (-1)(0 - 0) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, 即特征值为 1(二重), -1。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(\lambda_1 I - B)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时为 0。

对 $\lambda_3 = -1$, 解方程组 $(\lambda_3 I - B)x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时为 0, $\lambda_3 = -1, x_3 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

(5) $p_C(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^3 - 3(\lambda - 2) + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 即特征值为 1(二重), 4。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解方程组 $(\lambda_1 I - C)x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix},$

t_1, t_2 不同时为 0。

对 $\lambda_3 = 4$, 解方程组 $(\lambda_3 I - C)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -t_1 - t_2 \end{bmatrix}$, t_1, t_2 不同时为 0, $\lambda_3 = 4, x_3 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ 。

作业 10.2 (Ch6 T14)

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)^T$ 将单位圆 C 映射为椭圆 C' , 求椭圆 C' 的长短半轴方向与长度, 以及椭圆的面积。

解 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$, 对应特征向量为 $x_1 = t_1 \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^T, x_2 = t_2 \left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^T, t_1, t_2 \neq 0$
故长轴长度为 $2|\lambda_1| = 4 + 2\sqrt{5}$, 方向为 x_1 方向; 短轴长度为 $2|\lambda_2| = 2\sqrt{5} - 4$, 方向为 x_2 方向;

椭圆面积为 $\pi r^2 \cdot |\det A| = \pi$ 。

笔记 行列式缩放的是有向面积, 因此面积缩放倍率是 $|\det A|$ 而不是 $\det A$ 。

作业 10.3 (Ch6 T16)

设 A 为方阵, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: 如果 λ_0 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值; 且如果 x 是属于 λ_0 的特征向量, 则 x 也是矩阵 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

证明 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 对 A 的特征值 λ_0 , 其特征向量为 x , 则有 $Ax = \lambda_0 x \Rightarrow A^m x = A^{m-1} \lambda_0 x = \cdots = \lambda_0^m x$ 。

此时 $f(A)x = \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i\right)x = \sum_{i=0}^n a_i A^i x = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i x = \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i\right)x = f(\lambda_0)x$

即 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

作业 10.4 (Ch6 T17)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $3A + 2I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 故 $3A + 2I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 5, \tilde{\lambda}_3 = 8$, $\det(3A + 2I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 200$ 。

作业 10.5 (Ch6 T18)

(1) 若 $A^2 = I$, 证明: A 的特征值只能是 ± 1 ;

(2) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T = -A$, 证明 A 的特征值为零或纯虚数。

证明 (1) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $0 = (A^2 - I)x = A^2 x - x = (\lambda^2 - 1)x = 0$, 由 $x \neq 0$ 即有 $\lambda = \pm 1$ 。

(2) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 取共轭转置, $\bar{\lambda}x^H = x^H A^T = -x^H A$

$\Rightarrow \bar{\lambda}x^H x = -x^H A^T x = -x^H \lambda x \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})x^H x = 0$ 。又由 $x \neq 0$ 有 $x^H x = |x|^2 \neq 0$,

故 $\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$, 即 λ 是零或纯虚数。

作业 10.6 (Ch6 T33)

设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$, 由此 $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$ 。

证明

存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PTP^{-1}$, 其中 T 是上三角矩阵, 且 T 的对角线元素为 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

由于 $f(\lambda)$ 是多项式, 可以直接作用于矩阵 A , 直接计算可以得到 $f(A) = f(PTP^{-1}) = Pf(T)P^{-1}$ 。

由于 T 是上三角矩阵, 多项式 $f(T)$ 也将是上三角矩阵。具体地, $f(T)$ 的对角线元素为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$,

$$\text{即 } f(T) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

由于 $f(A) = Pf(T)P^{-1}$, 且 $f(T)$ 是上三角矩阵, 其对角线元素为 $f(\lambda_i)$, 可以得出 $f(A)$ 的特征值也是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 。

方阵的行列式等于其特征值的乘积。因此, $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$ 。

作业 10.7 (Ch6 T34)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 2, \tilde{\lambda}_3 = 7$, $\det(A^3 - 2A + 3I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 28$ 。

作业 10.8 (Ch6 T44)

设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间, 线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 满足 $\mathcal{A}(1) = x^2 + x + 3, \mathcal{A}(x) = 2x + 1, \mathcal{A}(x^2) = 2x^2 + 3$, 求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量。

解 取 V 的一组基 $\{1, x, x^2\}$, 则 $\mathcal{A}$ 在这组基下矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \text{ 即特征值为 } 2, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{对 } \lambda_1 = 2, \text{ 解方程组 } (\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 故特征向量为 } t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$$

$$\text{对 } \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \text{ 解方程组 } (\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} & -1 & -3 \\ -1 & \frac{1 + \sqrt{17}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{故特征向量为 } t \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0.$$

$$\text{对 } \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \text{ 解方程组 } (\lambda_3 I - A)x = \begin{bmatrix} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} & -1 & -3 \\ -1 & \frac{1 - \sqrt{17}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } x = t \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故特征向量为 $t \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = 2, x_1 = t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, x_2 = t \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2},$

$x_3 = t \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

第十一章 第十一次作业

作业 11.1 (Ch6 20)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$$



证明 可视 A 为复数域上的矩阵, 则 A 可相似到上三角阵

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

故

$$P^{-1}A^2P = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix},$$

有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(P^{-1}A^2P) = \text{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$.

注 本题很多同学使用了

$$A^2x = \lambda_i^2 x$$

来论证 λ_i^2 为 A^2 的特征值, 但无法说明它们为 A^2 的特征值全体. 请仔细体会本章习题 16 与习题 33 的区别.

作业 11.2 (Ch6 26)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 满足的条件.



解 先对确定的 x, y , 计算 A 可能的特征值

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

因此 A 有三个线性无关的特征向量等价于 A 的 1-特征子空间维度为 2, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

的基础解系有两个向量, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 等价于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 即 $x + y = 0$ 为所求条件.

作业 11.3 (Ch6 27)

设矩阵 A 和 B 相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

1. 求 x, y 的值.
2. 求可逆阵 T 使得 $T^{-1}AT = B$.

解 1. 根据 A, B 相似知 -1 为 A 特征值, 有

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

不满秩, 可见 $x+1=1, x=0$, 此时 A 特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

这说明 A 有三个不同的特征值, $y = -2$.

2. 由 $AT = TB$, 求 A 的从属于特征值 $-1, 2, -2$ 的特征向量依次构成 T 的列向量即可得到 T , 计算有

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - 2I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

计算或观察可取

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 11.4 (Ch6 28)

设 n 阶方阵 $A \neq 0$, 满足 $A^m = 0$. 其中 $m \geq 2$ 为正整数

1. 求 A 的特征值;
2. 证明 A 不可相似于对角阵;
3. 证明 $\det(I + A) = 1$.

解 1. 由 $A^m = 0$ 知 A^m 的特征值为 0, 由本章 16 题知 A 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^m = 0$, 故 A 仅有特征值 0.

2. 设 A 可相似到对角阵 D , 则 $A^m = 0$ 等价于 $D^m = 0$, 即从 D 为对角阵得 $D = 0$, 从而 $A = 0$, 矛盾.

3. 由 1. 中推理视 A 为复数域上的矩阵也成立, 故 A 可复相似于对角元全为 0 的上三角阵 B , 从而 $\det(I + A) = \det(I + B) = 1$.

作业 11.5 (Ch6 29)

判断下列矩阵是否可对角化, 若可, 则求变换矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

$$(3) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解 (3) 记题中矩阵为 A , 则

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 & 8 \\ 4 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1) + 4(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2,$$

而从 $\text{rank}(A - I) = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$, 可见 A 的 1-特征子空间维度为 $3 - 2 = 1$, 因此 A 不存在三个线性无关的特征向量, 它不可对角化.

(4) 仍记题中矩阵为 A , 则

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

而从 $A - I = 1$, 可见 A 的 1-特征子空间维度为 $3 - 1 = 2$, 因此 A 存在三个线性无关的特征向量, 它可对角化, 而从

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

计算或观察可取线性无关特征向量组构成 T 的列向量, 即

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

作业 11.6 (Ch6 31)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I$, 证明 A 相似于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$, 其中 $0 \leq r \leq n$.

证明 将 A 先视作复数域上的方阵, 则 A 有 n 个特征值, 为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 且由题 16 知它们都满足 $\lambda_i^2 = 1$, 从而 A 在其域上的特征多项式为 $(\lambda - 1)^r(\lambda + 1)^{n-r}$, 又由 $(A - I)(A + I) = 0$, 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - I & 0 \\ 0 & A + I \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A - I & 0 \\ A + I & A + I \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A - I & 0 \\ 2I & A + I \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2I & A + I \end{bmatrix} = n,$$

这表明 $\text{rank}(A - I) + \text{rank}(A + I) = n$, 即 $n - \text{rank}(A - I) + n - \text{rank}(A + I) = n$, 因此 A 有 n 个线性无关的特征向量, 它相似于对角阵, 且将这些向量恰当排序后即可得到题中所求的对角阵.

作业 11.7 (Ch6 45)

设 $V = \mathbb{F}^{n \times n}$.

1. 证明: V 的变换 $\mathcal{A}: x \mapsto x^T$ 为线性变换;
2. 求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量. 并问: $\mathcal{A}$ 是否可对角化?

解 1. 由转置的定义可见, $\forall x, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x^T + \mu y^T = \lambda \mathcal{A}x + \mu \mathcal{A}y,$$

且根据 $\mathcal{A}$ 的定义在 V 上, 它是线性变换.

2. 设 $\mathcal{A}$ 在某个基下的矩阵为 A , 由 $\mathcal{A}^2 = I$, 可见 $A^2 = I$, (由题 31 直接可知它可对角化, 但我们在此处还是不用这

个结论), 设 x 为它的一个 λ -特征向量在该组基下的坐标, 有 $Ax = \lambda x, A^2x = x = \lambda^2x$, 从而 $\lambda = \pm 1$.

对 $\lambda = 1$, 有满足 $x = x^T$ 的向量全体构成它的特征子空间, 可知 $E_{ij} + E_{ji}, i \geq j$ 构成了它的 $n(n+1)/2$ 个线性无关的特征向量. 对 $\lambda = -1$, 由 $E_{ij} - E_{ji}, i > j$ 构成了它的 $n(n-1)/2$ 个线性无关的特征向量, 根据不同特征子空间内的线性无关向量组之并仍为线性无关的, 可知它们恰好构成一个含有 n^2 个线性无关向量的特征向量组, 这表明 $\mathcal{A}$ 可对角化, 且 1-特征向量为 V 上的非零对称方阵全体, -1 -特征向量为 V 上的非零反对称方阵全体.

作业 11.8 (补充)

证明: 对于有限维欧式空间上给定的内积, 度量阵是可逆的.

证明 对于度量阵的定义, 我们采用课堂讲义 10-1 里的四-1, 注意它是和课本有别的.

设 V 为欧式空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的基, 则度量阵为 $(G)_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, 此时设 x, y 为 V 上两个向量, $x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, y = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i$, 则根据内积的双线性性

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i, \alpha_j) x_i y_j = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

此时若 G 不可逆, 则存在非零的 y 可使得 $G(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = 0$, 则有 $(y, y) = 0$, 这与内积的正定性矛盾!

第十二章 第十二次作业

作业 12.1 (Ch7 T1)

已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 3, 1, -1)$, $\alpha_3 = (-1, -1, -2, 2)$. 求:

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的长度和彼此间的夹角.
- 与它们都正交的向量.



解 1. $|\alpha_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7}$, $|\alpha_2| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$, $|\alpha_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$, $(\alpha_1, \alpha_2) = 6$, $(\alpha_2, \alpha_3) = -9$, $(\alpha_3, \alpha_1) = 1$ 从而

$$\theta_{1,2} = \arccos \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{35}, \theta_{2,3} = \arccos \frac{(\alpha_2, \alpha_3)}{|\alpha_2||\alpha_3|} = \arccos \frac{-3\sqrt{6}}{10}, \theta_{3,1} = \arccos \frac{(\alpha_3, \alpha_1)}{|\alpha_3||\alpha_1|} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}.$$

2. 设 (x_1, x_2, x_3, x_4) 与它们都正交, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0, \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

作业 12.2 (Ch7 T5)

用 Schmidt 正交化方法构造标准正交向量组.

- $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$
- $(1, 1, 1, 2), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$



解 为方便计算 (少出现根号), 我们采用先找正交向量组再归一化为标准正交向量的计算顺序. 并记两问里的三个向量依次为 a_1, a_2, a_3

1. $b_1 = (0, 0, 1)$, $b_2 = (0, 1, 1) - (b_1, a_2) \frac{b_1}{|b_1|^2} = (0, 0, 1)$, $b_3 = (1, 1, 1) - (b_1, a_3) \frac{b_1}{|b_1|^2} - (b_2, a_3) \frac{b_2}{|b_2|^2} = (1, 0, 0)$, 此时它们已经为标准的, 无需再标准化. 故 b_1, b_2, b_3 为标准正交向量组.

2. $b_1 = (1, 1, 1, 2)$, $b_2 = (1, 1, -5, 3) - (b_1, a_2) \frac{b_1}{|b_1|^2} = (1, 1, -5, 3) - \frac{3}{7}(1, 1, 1, 2) = \frac{1}{7}(4, 4, -38, 15)$, $b_3 = (3, 2, 8, -7) - (b_1, a_3) \frac{b_1}{|b_1|^2} - (b_2, a_3) \frac{b_2}{|b_2|^2} = (3, 2, 8, -7) + \frac{1}{7}(1, 1, 1, 2) + \frac{389}{7 \times 7 \times 49^{-1} \times 1701}(4, 4, -38, 15) = \frac{1}{1701}(6902, 5201, -931, -5586)$, 从而标准化后有 $u_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2)$, $u_2 = \frac{1}{9\sqrt{21}}(4, 4, -38, 15)$, $u_3 = \frac{1}{9\sqrt{26898}}(986, 743, -133, -798)$.

注 本题为尽量避免根号, 计算时为先找正交向量组再标准化, 这样算的话算把算法写成 QR 分解还需额外步骤, 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{(b_1, a_2)}{|b_1|^2} & \frac{(b_1, a_3)}{|b_1|^2} \\ 0 & 1 & \frac{(b_2, a_3)}{|b_2|^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1|^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & |b_2|^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & |b_3|^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1| & 0 & 0 \\ 0 & |b_2| & 0 \\ 0 & 0 & |b_3| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{(b_1, a_2)}{|b_1|^2} & \frac{(b_1, a_3)}{|b_1|^2} \\ 0 & 1 & \frac{(b_2, a_3)}{|b_2|^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1| & (u_1, a_2) & (u_1, a_3) \\ 0 & |b_2| & (u_2, a_3) \\ 0 & 0 & |b_3| \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

我第二小问也没有在 6 次验算以内算对.

作业 12.3 (Ch7 T6)

设在 $\mathbb{R}^3$ 中基 a_1, a_2, a_3 的度量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

试求由它们表示的一组标准正交基.

解 假设我们要找的正交基为 e_1, e_2, e_3 , 它们在 a_1, a_2, a_3 下的表示为

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} T$$

T 的各个列向量即为 e_1, e_2, e_3 在 a_1, a_2, a_3 下的坐标表示, 可见

$$I = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} T = T^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} T$$

于是求 T 即是找对称变换矩阵使得原本的度量阵变换为单位阵, 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \rightarrow c_3, r_1 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}c_2, r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

取

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注 也可用 Gram-Schmidt 方法直接求解.

作业 12.4 (Ch7 T8)

验证下述向量正交, 并添加向量改造为标准正交基.

- $(2, 1, 2), (1, 2, -2);$
- $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3).$

解 验证略. 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

标准化后的正交基为 $\frac{1}{3}(2, 1, 2), \frac{1}{3}(1, 2, -2), \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$

2. 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

可取 $(1, -2, 1, 0)$ 为第三个正交的向量, 再求解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

可得 $(-25, -4, 17, 6)$ 为一个和它们都正交的向量, 将它们标准化后得到标准正交基

$$\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{23}}(1, 2, 3, -3), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{966}}(-25, -4, 17, 6).$$

注 两个小问都可先添加一个和它们线性无关的向量再用 Gram-Schmidt 正交化方法写, 但一般需要添加多个向量时, 你取的向量数字不好可能会导致计算量爆炸的情况出现.

作业 12.5 (Ch7 T10)

设 e_1, e_2, e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 令

$$a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(+e_1 - 2e_2 - 2e_3)$$

证明: a_1, a_2, a_3 也构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

证明 将它们之间的关系写成矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

从而计算有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = I, \end{aligned}$$

这说明它们构成了一组标准正交基.

作业 12.6 (Ch7 T11)

设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, $x_1, x_2, \dots, x_k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意 k 个向量. 证明: $x_1, x_2, \dots, x_k$ 两两正交的充分必要条件是:

$$\sum_{s=1}^n (x_i, e_s)(x_j, e_s) = 0, \forall i \neq j$$

证明 根据 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基和基的定义, 有

$$x_i = \sum_{s=1}^n (x_i, e_s) e_s, \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

因此两两正交等价于

$$0 = (x_i, x_j) = \left(\sum_{s=1}^n (x_j, e_s) e_s, \sum_{t=1}^n (x_j, e_t) e_t \right) = \sum_{s=1}^n (x_i, e_s) (x_j, e_s), \forall i \neq j$$

作业 12.7 (Ch7 T12)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. 证明:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, (a, b) = \sum_{i=1}^n (a, a_i)(b, a_i)$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}^n, |a|^2 = \sum_{i=1}^n (a, a_i)^2$.

证明 根据等式

$$a = \sum_{s=1}^n (a, a_s) a_s,$$

用内积的线性性直接计算即可.

作业 12.8 (Ch7 T13)

证明二阶正交矩阵必取下面二种形式之一:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

证明 正交阵的行向量为相互正交的单位向量, 因此第一行的向量必定有形式 $(\cos \theta, \sin \theta)$, $-\pi \leq \theta < \pi$, 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

可得 $(x_1, x_2) = t(\sin \theta, -\cos \theta)$ 为和它正交的向量, 因此它们构成了一个正交基, 且当 $t = \pm 1$ 时它们是标准正交基, 分别作为行向量构成的矩阵对应了题中的两种形式.

作业 12.9 (Ch7 T14)

写出所有的三阶正交阵, 它的元素为 0 或 1.

解 设正交阵行向量组为 e_1, e_2, e_3 , 则

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_3^T \end{bmatrix} = I,$$

而根据每个向量的元素都为 0 或 1, 它们满足自身和自身内积为它们所含 1 的个数, 因此它们都是单位向量, 而需要 $(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$, 这些单位向量之间彼此正交, 故全部所求的矩阵即由单位向量排列构成. 它们分别是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 12.10 (Ch7 T19)

给定三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求它的 QR 分解.



解 先用 Gram-Schmidt 正交化将 A 的列向量化为标准正交向量组, $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 0)^T - \frac{2}{5}(1, 0, 2)^T = \frac{1}{5}(8, 5, -4)^T$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{105}}(8, 5, -4)^T$, $\mathbf{b}_3 = (0, 2, 1)^T - \frac{2}{5}(1, 0, 2)^T - \frac{2}{35}(8, 5, -4)^T = \frac{3}{7}(-2, 4, 1)$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, 4, 1)$, 从而可写出 A 的 QR 分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{21}{\sqrt{105}} & \frac{6}{\sqrt{105}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

第十三章 第十三次作业

作业 13.1 (Ch7 T24)

设 a 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量, 定义线性变换: $\mathcal{A}(b) = b - 2\langle a, b \rangle a$ 。证明: $\mathcal{A}$ 为正交变换, 并找 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵。

解 $|\mathcal{A}(x)|^2 = \langle \mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x) \rangle = \langle x - 2\langle a, x \rangle a, x - 2\langle a, x \rangle a \rangle = \langle x, x \rangle - 4\langle a, x \rangle \langle a, x \rangle + 4\langle a, x \rangle^2 \langle a, a \rangle^2 = \langle x, x \rangle = |x|^2$,
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 因此 $\mathcal{A}$ 保模长, 是正交变换。

任取一组包含 $\pm a$ 的标准正交基即使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵。

作业 13.2 (Ch7 T26)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 由此求 A^k , k 是自然数。

解 A 的特征值, 特征向量如下: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1, x_1 = a(1, -2, 2)^T, x_2 = b(-2, 1, 2)^T, x_3 = c(2, 2, 1)^T$ 。

特征向量归一化得到 $e_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是标准正交基,

因此正交矩阵 $P = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} := D$ 是对角矩阵, 此时

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(4 \cdot (-1)^k + 4 \cdot 2^k + 5^k) & \frac{2}{9}(2 \cdot (-1)^k - 2^k - 5^k) & \frac{2}{9}((-1)^k - 2 \cdot 2^k + 5^k) \\ \frac{2}{9}(2 \cdot (-1)^k - 2^k - 5^k) & \frac{1}{9}(4 \cdot (-1)^k + 2^k + 4 \cdot 5^k) & \frac{2}{9}((-1)^k + 2^k - 2 \cdot 5^k) \\ \frac{2}{9}((-1)^k - 2 \cdot 2^k + 5^k) & \frac{2}{9}((-1)^k + 2^k - 2 \cdot 5^k) & \frac{1}{9}((-1)^k + 4 \cdot 2^k + 4 \cdot 5^k) \end{bmatrix}$$

作业 13.3 (Ch7 T27)

证明: 下列三个条件中只要有二个成立, 另一个也必成立: (1) A 是对称的; (2) A 是正交的; (3) $A^2 = I$ 。

证明 (1)(2) $\Rightarrow$ (3): $A^2 = AA^T = I$ 。

(2)(3) $\Rightarrow$ (1): $A^T = A^{-1}, A^{-1} = A$, 故 A 对称。

(1)(3) $\Rightarrow$ (2): $A^2 = I, A^T = A = A^{-1}, AA^T = I$, 故 A 正交。

作业 13.4 (Ch7 T28)

求正交阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵:

$$(3)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解 (3) A 的特征值, 特征向量如下: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3, x_1 = a(2, 1, 2)^T, x_2 = b(-1, 0, 1)^T, x_3 = c(-1, 2, 0)^T$ 。

把 x_1 归一化, 对 x_2, x_3 G-S 正交化, 得到 $e_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)^T, e_3 = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T$ 。

此时 $T = (e_1, e_2, e_3) = A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$ 即为所求。

(4) A 的特征值, 特征向量如下: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1, x_1 = a(2, -2, 1)^T, x_2 = b(-2, -1, 2)^T, x_3 = c(1, 2, 2)^T$ 。

特征向量归一化得到 $e_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$,

此时 $T = (e_1, e_2, e_3) = A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 即为所求。

作业 13.5 (Ch7 T31)

设 V 是 n 阶实方阵全体构成的线性空间。对 $A, B \in V$, 定义 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$

(1) 证明: $\langle A, B \rangle$ 构成内积, 从而 V 在该内积下成为欧氏空间。

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$, 求 A 的模长。

(3) 基本矩阵 E_{ij} 是否构成 V 的一组标准正交基? 请说明理由。

证明 (1) 对称性: $\forall A, B \in V, \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(AB^T)^T = \text{tr}(BA^T) = \langle B, A \rangle$ 。

正定性: $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in V, \langle A, A \rangle = \text{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$, 取等当且仅当 a_{ij} 全为 0, 即 $A = 0$ 。

线性性: $\forall A, B, C \in V, \langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}((\lambda A + \mu B)C^T) = \lambda \text{tr}(AC^T) + \mu \text{tr}(BC^T) = \text{tr}(BA^T) = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$

(2) $|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

(3) 显然有 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 线性无关, 且 $\dim V = n^2 = \#\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, 故 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 是 V 的一组基。

计算得到 $\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \text{tr}(E_{ij}E_{kl}^T) = \text{tr}(E_{ij}E_{lk}) = \delta_{ik}\text{tr}(E_{jl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}$, 故 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 是标准正交基。

笔记 线性空间 V 上满足以下三条性质的非负值函数 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ 称为范数:

• 正定性: $\forall x \in V, \|x\| \geq 0$; 取等当且仅当 $x = 0$ 。

• 齐次性: $\forall x \in V, a \in \mathbb{R}, \|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ 。

• 三角不等式: $\forall x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

对 V 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 则 $\|\cdot\|$ 是 V 上的范数, 称为内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导的范数。此题中内积诱导的范数是 Frobenius 范数, 一般记作 $\|\cdot\|_F$

对 V 上的某个范数 $\|\cdot\|$, 其由内积诱导当且仅当其满足平行四边形法则: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ 。

作业 13.6 (Ch7 T32)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量, 定义其 Gram 矩阵 $G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基当且仅当 $\det(G) \neq 0$ 。

(2) 设 α_i 在一组标准正交基下的坐标为 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 记 $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 证明: $\det G = (\det X)^2$

证明 (2) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = x_i^T x_j \Rightarrow G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n \times n} = (x_i^T x_j)_{n \times n} = X^T X$, 故 $\det G = \det(X^T X) = (\det X)^2$ 。

(1) 设 α_i 在一组标准正交基下的坐标为 $x_i, i = 1, 2, \dots, n, X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基 $\Leftrightarrow \det X \neq 0 \Leftrightarrow \det G = (\det X)^2 \neq 0$ 。

作业 13.7 (Ch8 T1)

将下列二次型表示成矩阵形式:

(2) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$;

$$(3) Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_1x_4 + 6x_2x_3 + 7x_2x_4 + 10x_3x_4.$$

解 (2) $Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

$$(3) Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

作业 13.8 (Ch8 T2)

写出下列对称矩阵对应的二次型:

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

解 (3) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$

作业 13.9 (Ch8 T3)

用配方法将下列二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换:

$$(2) Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3.$$

解 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3 = x_1^2 + \frac{1}{4}((x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2) = x_1^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 := y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 是标准型,

对应 $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x, x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} y$ 是对应线性变换。

作业 13.10 (Ch8 T4)

用初等变换法将下列二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换:

$$(1) Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

解 $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}c_1 \rightarrow c_2 \\ -\frac{1}{2}c_1 \rightarrow c_3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_2 \\ -\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{3}{5}r_2 \rightarrow r_3 \\ -\frac{3}{5}c_2 \rightarrow c_3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$

由上可知标准型是 $\tilde{Q}(y) = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2$, 对应的线性变换是 $x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y.$

作业 13.11 (Ch8 T5)

求正交变换化下列实二次型为标准形:

$$(3) Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值和特征向量为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3, x_1 = a(1, 1, 1)^T, x_2 = b(-1, 0, 1)^T, x_3 = c(-1, 1, 0)^T$.

把 x_1 归一化, 对 x_2, x_3 G-S 正交化, 得到 $e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, e_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T$.

此时 $P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$ 即为所求, 对 $x = Py, \tilde{Q}(y) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$.

作业 13.12 (Ch8 T6)

证明: 实数域上对称矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 不相合。

证明 若 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相合, 则 $\exists P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 使得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P$.

取行列式, $1 = \det P^T \cdot (-1) \cdot \det P \Rightarrow \det P = \pm i$, 矛盾, 故 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 不相合。

作业 13.13 (Ch8 T7)

证明: 秩等于 r 的对称矩阵 A 可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和

证明 此时 $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$ (n 阶正交阵集合) 使得 $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P^{-1}$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$.

取 $A_i = P(\lambda_i E_{ii}) P^{-1}, 1 \leq i \leq r$, 则 $\sum_{i=1}^r A_i = P \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i E_{ii} \right) P^{-1} = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P^{-1} = A$,
且 A_i 是秩等于 1 的对称矩阵, 故 $\{A_i\}_{1 \leq i \leq r}$ 即为所求。

作业 13.14 (Ch8 T8)

设 A 是一个 n 阶方阵, 证明:

(1) A 是反对称阵, 当且仅当对任一个 n 维向量 X , 有 $x^T A x = 0$;

(2) 如果 A 为对称阵, 且对任一个 n 维向量 x , 有 $x^T A x = 0$, 那么 $A = 0$ 。

证明 (1) $(\Rightarrow) \forall x \in \mathbb{C}^n, x^T A x = (x^T A x)^T = \frac{1}{2} (x^T A x + (x^T A x)^T) = \frac{1}{2} (x^T A x + x^T A^T x) = \frac{1}{2} x^T (A + A^T) x = 0$

$(\Leftarrow)$ 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 取 $x = e_i, 0 = x^T A x = a_{ii}$; 取 $x = e_i + e_j, 0 = x^T A x = a_{ij} + a_{ji}$, 故 A 是反对称阵。

(2) 由 (1), 对称阵 A 反对称, 故 $A = A^T = -A \Rightarrow A = 0$ 。

第十四章 第十四次作业

作业 14.1 (Ch8 T12)

将二次方程化为最简形式, 并判断曲面类型:

(1) $4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz - 4x + 4y + 4z - 5 = 0$;

(2) $x^2 - \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{16}{3}\sqrt{2}yz + 44z + \frac{8}{3}\sqrt{3}z - 1 = 0$.

解 (1) 将方程左端的二次型部分 $4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz$ 化为标准形式 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ 其特征值为 4, -8, -4 特

征向量为 $x_1 = (1, 0, 0)^T, x_2 = (0, 1, 1)^T, x_3 = (0, 1, -1)^T$ 取 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 作线性替换 $X = QY$ 则二次型化为

$4x''^2 - 4y''^2 + 8z''^2$, 再将其反代入进原方程得到 $4x''^2 - 4y''^2 - 8z''^2 = 5$ 是双叶双曲面,

(2) 作坐标变换 $x' = x, y' = \frac{-y+\sqrt{2}z}{\sqrt{3}}, z' = \frac{z+\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}$ 将原式化为 $\frac{3}{11}(x'+2)^2 + \frac{12}{11}y'^2 - \frac{12}{11}(z' - \sqrt{3})^2 = 1$, 是单叶双曲面。

作业 14.2 (Ch8 T14)

判断下列二次型是否是正定二次型:

(1) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(3) $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

解 (1) 矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 考察顺序主子式, 行列式为 1, 1, 0 均大于等于 0, 故为半正定二次型。

(3) 矩阵为 $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 考察顺序主子式, 行列式为 7, 6, 2 均大于 0, 故为正定二次型。

作业 14.3 (Ch8 T15)

判断下列矩阵是否是正定矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

解 (1) 一样的考察顺序主子式, 行列式为 $2, \frac{15}{4}, -5$ 故不为正定矩阵。

(2) 顺序主子式行列式为 1, 1, -1 故不为正定矩阵。

 笔记 16, 18 这两题均归结为考察顺序主子式进而判断范围的题目, 详细过程可以参照 21, 这里给出答案。

作业 14.4 (Ch8 T16)

参数 t 满足什么条件时下列二次型正定?

$$(1) Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_1x_3;$$

$$(2) Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + tx_1x_2 + tx_1x_3 + x_2x_3$$

解 (1) $t \in (-2, 2)$, (2) $t \in \left(-\frac{\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}}{2}\right)$ 。

作业 14.5 (Ch8 T18)

设 $Q = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 + 2cx_1x_3$, 问 a, b, c 满足什么条件时, Q 为正定?

解 $a > 0, b > 0, -a < c < a$ 时 Q 正定。

作业 14.6 (Ch8 T21)

在 $Q = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$ 中, 问:

(1) 哪些 λ 的值使得 Q 为正定?

(2) 哪些 λ 的值使得 Q 为负定?

(3) 当 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = -1$ 时, Q 为什么类型?

解 二次型的矩阵为
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) 我们需要所有的顺序主子式行列式大于 0, 故我们应该有 $\lambda > 0, \lambda^2 - 1 > 0, \lambda^3 - 3\lambda - 2 > 0$ 解得 $\lambda > 2$;

(2)* 特别注意, 我们判断负定的时候不是所有的顺序主子式都小于 0, 而是只有奇数阶的顺序主子式行列式小于 0, 因为我们考虑 $-A$ 的正定性发现加上负号后偶数阶的主子式行列式是不发生变化的 *

故我们有 $\lambda < 0, \lambda^2 - 1 > 0, \lambda^3 - 3\lambda - 2 < 0$ 解得 $\lambda < -1$;

(3) 最后当 $\lambda = 2, -1$ 时, 我们代入计算主子式的行列式可得 $\lambda = 2$ 时为半正定, $\lambda = -1$ 时为半负定。

作业 14.7 (Ch8 T24)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 $A^2 = I$, 证明 $A + I$ 为正定矩阵或半正定矩阵。

证明 由于 $A^2 = I$, 则对于 A 的特征值 λ 有 $\lambda^2 = 1, \lambda = 1, -1$, 又 A 是对称矩阵即存在 $U, A = U^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U$, 那么矩阵 $A + I = U^{-1} \text{diag}(\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1) U$, 对角元均大于等于 0, 故正定或者半正定。

作业 14.8 (Ch8 T28)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A \succ 0$, 求证: $\det A \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr} A\right)^n$

证明 由于 A 是对称矩阵且正定, 故 A 的所有特征值均大于 0, 我们已知 $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \text{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ 那么由均值不等式我们立刻可以得出结论。

作业 14.9 (Ch8 T29)

证明: 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶正定方阵, 则 $\det A \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 。

证明 这是著名的 Hadamard 第二不等式, 证明可以参考 <https://www.zhihu.com/question/49557377>