



线性代数作业答案

作者：陈文轩

组织：KFRC

时间：August 1, 2026

版本：2.0.0.5088



目录

第一章 第一次作业	1
第二章 第二次作业	3
第三章 第三次作业	9
第四章 第四次作业	17
第五章 第五次作业	22
第六章 第六次作业	27
第七章 第七次作业	31
第八章 第八次作业	35
第九章 第九次作业	40
第十章 第十次作业	42
第十一章 第十一次作业	46
第十二章 第十二次作业	49
第十三章 第十三次作业	53
第十四章 第十四次作业	57

第一章 第一次作业

作业 1.1 (Ch2 T1(5))

解方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 4r_1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_2 - 9x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -4 \end{cases} \\ & \xrightarrow{r_2 \times -1} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5 \\ 2x_2 - 9x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 2r_2 \\ r_4 - r_2 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_3 + 16x_4 = 9 \\ x_3 + 16x_4 = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_3 + 16x_4 = 9 \\ 0 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

显然无解。

作业 1.2 (Ch2 T2(1))

当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时写出它的通解。

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

解

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a-6)x_1 - 6x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 - \frac{2}{3}r_2 \\ r_3 + 2r_2 \end{matrix}} \begin{cases} -\frac{5}{3}x_1 + x_3 = \frac{4}{3} \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a+8)x_1 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

可见有解当且仅当 $a \neq -8$ ，通解为 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3a+24}, \frac{4a+52}{3a+24} \right)$

作业 1.3 (Ch2 T4)

求多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，使 $y = f(x)$ 的图像经过以下 4 个点： $A(1, 2), B(-1, 3), C(3, 0), D(0, 2)$ 。

解

$$\text{由题意有: } \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -24 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a = -\frac{5}{24}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{7}{24}, d = 2, f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2.$$

作业 1.4 (Ch2 T5)

求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 满足 $f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = -1$ 。



解 易得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} d=1 \\ c=1 \\ a+b+c+d=2 \\ 3a+2b+c=1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

第二章 第二次作业

作业 2.1

设平面上有三个不共线的点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ 。请给出并证明该三点构成的三角形面积 S 可以用二阶行列式表示

解 记 $\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \mathbf{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, θ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角, 并将 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 视为第三分量为 0 的 $\mathbb{R}^3$ 中向量, 则有:

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|$$

对于变量轮换的情形同理。

注 该公式与 $S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$ 是等价的。

作业 2.2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

利用 3 元线性方程组的求解公式, 尝试推导求解上述 4 元线性方程组的一般公式。

解 记 $D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, 并假设 $D \neq 0$, 则有:

$$\begin{aligned} x_1 D &= \det \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}x_1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4]{x_i c_i \rightarrow c_1} \det \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

$$\text{同理可得: } x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}, x_3 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}, x_4 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}.$$

注 以上过程可以扩展到 n 元线性方程组的求解，实际上就是 Cramer 法则。

以下给出另一种证明方式：

证明. 显然有唯一解时 a_{i4} 不全为 0，可通过初等行变换让其全不为 0。把含 x_4 的项移到等式右边，有：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{14}x_4 & (2.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{24}x_4 & (2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{34}x_4 & (2.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 - a_{44}x_4 & (2.4) \end{cases}$$

选取方程 (2.1)(2.2)(2.3)，记 $M_{44} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ，则由 3 元线性方程组的求解公式可得：

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 - a_{14}x_4 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 - a_{24}x_4 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 - a_{34}x_4 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{M_{44}} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - x_4 \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{M_{44}}$$

$$\text{记 } P_1^{(A)} = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, Q_1^{(A)} = \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ 则 } x_1 = \frac{P_1^{(A)} - x_4 Q_1^{(A)}}{M_{44}}.$$

同理，选取方程 (2.1)(2.2)(2.4)，记 $M_{34} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$ ，可得：

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 - a_{14}x_4 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 - a_{24}x_4 & a_{22} & a_{23} \\ b_4 - a_{44}x_4 & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}{M_{34}} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} - x_4 \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}{M_{34}}$$

$$\text{记 } P_1^{(B)} = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, Q_1^{(B)} = \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \text{ 则 } x_1 = \frac{P_1^{(B)} - x_4 Q_1^{(B)}}{M_{34}}.$$

类似的，选取方程 (2.1)(2.3)(2.4)，得到 $x_1 = \frac{P_1^{(C)} - x_4 Q_1^{(C)}}{M_{24}}$ ，选取方程 (2.2)(2.3)(2.4)，得到 $x_1 = \frac{P_1^{(D)} - x_4 Q_1^{(D)}}{M_{14}}$ 。

此时利用 $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = k$ 时， $k = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$ ，可得：

$$x_1 = \frac{P_1^{(A)} - x_4 Q_1^{(A)}}{M_{44}} = \frac{P_1^{(B)} - x_4 Q_1^{(B)}}{M_{34}} = \frac{P_1^{(C)} - x_4 Q_1^{(C)}}{M_{24}} = \frac{P_1^{(D)} - x_4 Q_1^{(D)}}{M_{14}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_{44}P_1^{(A)} - a_{44}x_4Q_1^{(A)}}{a_{44}M_{44}} = \frac{-a_{34}P_1^{(B)} + a_{34}x_4Q_1^{(B)}}{-a_{34}M_{34}} = \frac{a_{24}P_1^{(C)} - a_{24}x_4Q_1^{(C)}}{a_{24}M_{24}} = \frac{-a_{14}P_1^{(D)} + a_{14}x_4Q_1^{(D)}}{-a_{14}M_{14}} \\
&= \frac{a_{44}P_1^{(A)} - a_{34}P_1^{(B)} + a_{24}P_1^{(C)} - a_{14}P_1^{(D)} - x_4(a_{44}Q_1^{(A)} - a_{34}Q_1^{(B)} + a_{24}Q_1^{(C)} - a_{14}Q_1^{(D)})}{a_{44}M_{44} - a_{34}M_{34} + a_{24}M_{24} - a_{14}M_{14}}
\end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
a_{44}M_{44} - a_{34}M_{34} + a_{24}M_{24} - a_{14}M_{14} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\
a_{44}P_1^{(A)} - a_{34}P_1^{(B)} + a_{24}P_1^{(C)} - a_{14}P_1^{(D)} &= \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\
a_{44}Q_1^{(A)} - a_{34}Q_1^{(B)} + a_{24}Q_1^{(C)} - a_{14}Q_1^{(D)} &= \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

因此 $x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}$ 。同理可求出 x_2, x_3, x_4 。

□

□

作业 2.3

验证按照 $\Delta_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n)$ (即按列递归展开) 定义的行列式具有以下性质:

1. $\Delta_n(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) = -\Delta_n(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots)$;
2. $\Delta_n(\dots, \lambda \alpha_i, \dots) = \lambda \Delta_n(\dots, \alpha_i, \dots)$;
3. $\Delta_n(\dots, \alpha_i + \beta_i, \dots) = \Delta_n(\dots, \alpha_i, \dots) + \Delta_n(\dots, \beta_i, \dots)$.



证明. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 先证明第 2 点. 对 $n = 2$, $\Delta_2(\alpha_1, \alpha_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

对第一列, $\Delta_2(\lambda \alpha_1, \alpha_2) = (\lambda a_{11})a_{22} - a_{12}(\lambda a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2)$,

对第二列, $\Delta_2(\alpha_1, \lambda \alpha_2) = a_{11}(\lambda a_{22}) - (\lambda a_{12})a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2)$, 故成立。

假设对所有 $k < n$ 均成立, 现对 n 进行证明: 设 $\tilde{A} = (\dots, \lambda \alpha_k, \dots)$,

$$\begin{aligned}
\text{对 } k = 1, \Delta_n(\tilde{A}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\lambda a_{i1}) \Delta_{n-1}(\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_{i-1}, \tilde{\alpha}'_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}'_n) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) = \lambda \Delta_n(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{对 } k > 1, \Delta_n(\tilde{A}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{n-1}(\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_{i-1}, \tilde{\alpha}'_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}'_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \lambda \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \lambda \alpha'_k, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) = \lambda \Delta_n(A), \text{ 因此归纳成立。}
\end{aligned}$$

再证明第 2 点。对 $n = 2$ ，以下验证其成立：

$$\Delta_2(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2) = (a_{11} + b_{11})a_{22} - a_{12}(a_{21} + b_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} = \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2) + \Delta_2(\beta_1, \alpha_2),$$

$$\Delta_2(\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2) = a_{11}(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21} = \Delta_2(\alpha_1, \alpha_2) + \Delta_2(\alpha_1, \beta_2)。$$

假设对所有 $k < n$ 均成立，现对 n 进行证明：设 $A = (\dots, \alpha_k, \dots), B = (\dots, \beta_k, \dots), \tilde{C} = (\dots, \alpha_k + \beta_k, \dots)$,

$$\begin{aligned}
\text{对 } k = 1, \Delta_n(\tilde{C}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (a_{i1} + b_{i1}) \Delta_{n-1}(\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_{i-1}, \tilde{\alpha}'_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}'_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} b_{i1} \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) \\
&= \Delta_n(A) + \Delta_n(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{对 } k > 1, \Delta_n(\tilde{C}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{n-1}(\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_{i-1}, \tilde{\alpha}'_{i+1}, \dots, \tilde{\alpha}'_n) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} [\Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_k, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n) + \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_k, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n)] \\
&= \Delta_n(A) + \Delta_n(B), \text{ 因此归纳成立。}
\end{aligned}$$

最后证明第 1 点。对 $n = 2$ ， $\Delta_2(\alpha_2, \alpha_1) = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ，故成立。

假设对所有 $k < n$ 均成立，现对 n 进行证明：设 $A = (\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots), \tilde{A} = (\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots)$,

- $i, j \neq 1$ ，则有：

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\tilde{A}) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{n-1}(\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \dots, \tilde{\alpha}'_{k-1}, \tilde{\alpha}'_{k+1}, \dots, \tilde{\alpha}'_n) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} (-\Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{j-1}, \alpha'_i, \alpha'_{j+1}, \dots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_j, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n)) \\
&= -\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{n-1}(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k-1}, \alpha'_{k+1}, \dots, \alpha'_n) = -\Delta_n(A)
\end{aligned}$$

- $i = 1, j = 2$ ，以下记 A_{ij} 是 A 去掉第 i 行，第 j 列得到的子矩阵， $M_{ij,kl}$ 是 A 去掉第 i, j 行，第 k, l 列得到的子矩阵，此时有：

$$\Delta_n(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} a_{i2} \Delta_{n-1}(A_{i1})$$

现在对 A_{i1} 按第一列展开，设 a_{k1} 是 α_1 的第 k 个元素，在 A_{i1} 中位于第 k' 行，则 $k' = \begin{cases} k & , k < i \\ k-1 & , k > i \end{cases}$ ，则

$$\begin{aligned}
\Delta_{n-1}(A_{i1}) &= \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{k1} \Delta_{n-2}(M_{ik,21}) \\
\Rightarrow \Delta_n(\tilde{A}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n (-1)^{i+1} a_{i2} (-1)^{k'+1} a_{k1} \Delta_{n-2}(M_{ik,21}) = \sum_{i \neq k} (-1)^{i+k'} a_{i2} a_{k1} \Delta_{n-2}(M_{ik,21})
\end{aligned}$$

使用同样的方法计算 $\Delta_n(A)$ ，有：

$$\Delta_n(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{n-1}(A_{k1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \sum_{i=1, i \neq k}^n (-1)^{i'+1} a_{i2} \Delta_{n-2} M_{ki,12}$$

$$= \sum_{i \neq k} (-1)^{k+i'} a_{k1} a_{i2} \Delta_{n-2}(M_{ki,12})$$

其中 $i' = \begin{cases} i & , i < k \\ i-1 & , i > k \end{cases}$, $\Delta_{n-2}(M_{ik,21}) = \Delta_{n-2}(M_{ki,12})$, 对于 $i < k$, $k' = k-1, i' = i, (k+i') = (k'+i)+1$;

对于 $i > k$, $k' = k, i' = i-1, (k+i') = (k'+i)-1$, 二者永远相差一个负号, 因此 $\Delta_n(\tilde{A}) = -\Delta_n(A)$ 。

• $i = 1, j > 2$, 此时利用以上两种情况的结论, 得到:

$$\begin{aligned} \Delta_n(A) &= \Delta_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = -\Delta_n(\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = \Delta_n(\alpha_2, \alpha_j, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= -\Delta_n(\alpha_j, \alpha_2, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = -\Delta_n(\tilde{A}) \end{aligned}$$

综上, 归纳成立。

□

□

作业 2.4 (Ch3 T1)

计算下列矩阵的行列式:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_1 \rightarrow r_2]{-2r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2 \rightarrow r_3]{r_2 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{6}{5}r_3 \rightarrow r_4]{\frac{6}{5}r_3 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 1 \times (-3) \times \frac{5}{3} \times 10 = -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \det \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= (-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} & & & a_{2,n-1} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix} = \cdots \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^n \cdots (-1)^4 a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-2,3} \det \begin{bmatrix} & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{\sum_{k=3}^{n+1} k} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-c_1 \rightarrow c_2]{-c_1 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2c_2 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_2]{-r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ (b+a)(b-a) & 2(b-a) & 0 \\ (c+a)(c-a) & 2(c-a) & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{提取公因式}]{\text{第一行展开}} 2(b-a)(c-a) \det \begin{bmatrix} b+a & 2 \\ c+a & 2 \end{bmatrix} = -4(a-b)(b-c)(c-a) \\
(6) \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{第五行展开}} e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第四行展开}} d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{第三行展开}} c_3 d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 d_4 e_5
\end{aligned}$$

作业 2.5 (Ch3 T3)

将行列式 $\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$ 展开为关于 x 的多项式。

解

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} &= (x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} \\
&= (x-2) \left((x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) - \left(\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) \\
&= (x-2) \left((x-2) \left((x-2)^2 - 1 \right) - (x-2) \right) - \left((x-2)^2 - 1 \right) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5
\end{aligned}$$

作业 2.6 (Ch3 T4)

A 为 n 阶矩阵, λ 为常数, 证明: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ 。

证明. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $\lambda A = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$, 由行列式的性质 2, 有:

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n) = \dots = \lambda^n \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lambda^n \det A$$

证毕。

□

□

第三章 第三次作业

作业 3.1

求三次多项式 $f(x)$ 满足 $f(-1) = 1, f(-3) = -109, f'(2) = 5, f'(4) = 53$ 。

解 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 则 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ -27a + 9b - 3c + d = -109 \\ 12a + 4b + c = 5 \\ 48a + 8b + c = 53 \end{cases}$

使用 Cramer 法则计算, $\Delta = -584, \Delta_1 = -1168, \Delta_2 = 3504, \Delta_3 = -2920, \Delta_4 = -8176$,

故 $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -6, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5, d = \frac{\Delta_4}{\Delta} = 14, f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 14$ 。

作业 3.2

求四次多项式 $f(x)$ 满足 $f(0) = 7, f(1) = 3, f(2) = 7, f'(1) = -2, f'(2) = 14$ 。

解 设 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, 则 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow \begin{cases} e = 7 \\ a + b + c + d + e = 3 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 7 \\ 4a + 3b + 2c + d = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 14 \end{cases}$

解方程组得到 $a = 1, b = -2, c = 3, d = -6, e = 7, f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$ 。

作业 3.3

计算 $\det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

解 对 $b = c$,

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ 0 & b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

假设 $a_i - b$ 中有两个为 0, 则按第一列展开后每一项至少有一行全为 0, 所以行列式值为 0。

假设 $a_i - b$ 中只有一个为 0, 则设 $a_r = b, 1 \leq r \leq n$,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列展开}} (-1)(-1)^{r+2} \det \begin{bmatrix} b & b & \cdots & b & b \\ a_1 - b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{r+3} (-1)^{r-1} \cdot b \prod_{i \neq r} (a_i - b) = b \prod_{i \neq r} (a_i - b)$$

假设 $a_i - b$ 中没有 0, 则

$$\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{i=1, \dots, n}]{\frac{b}{a_i - b} C_{i+1} \rightarrow C_1} \det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{a_i - b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{a_i - b} \right) \prod_{i=1}^n (a_i - b)$$

注意到 $\prod_{i=1}^n (a_i - b) + b \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (a_i - b)$ 满足以上全部三种情况, 故此即为最终解答。

对 $b \neq c$, 令

$$D(x) = \det \begin{bmatrix} a_1 - x & b - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & c - x & a_3 - x & \cdots & b - x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - x & c - x & c - x & \cdots & a_n - x \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{i=2, \dots, n}]{-r_1 \rightarrow r_i} \det \begin{bmatrix} a_1 - x & b - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - a_1 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ c - a_1 & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - a_1 & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

由第一行展开可知 $D(x)$ 是关于 x 的 1 次多项式, 确定其在两点处的值即可确定其在 0 处取值, 即为所求。

$$\text{注意到 } D(b) = \det \begin{bmatrix} a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c - b & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ c - b & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - b & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i - b), D(c) = \prod_{i=1}^n (a_i - c)。$$

$$\text{故 } D(0) = D(b) - \frac{D(b) - D(c)}{b - c} b = \frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c}。$$

 **笔记** 当 $b \rightarrow c$ 时, 由洛必达法则, $\frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c} \rightarrow b \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (a_i - b) + \prod_{i=1}^n (a_i - b)$, 与 $b = c$ 时的结果相同。这是为什么?

注 以下给出另一种求解 $b \neq c$ 时情形的思路。

解

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& = (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{右边行列式}]{-c_1 \rightarrow c_i, i=2, \dots, n} (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2 - c & b - c & \cdots & b - c \\ c & 0 & a_3 - c & \cdots & b - c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_n - c \end{bmatrix} \\
& = (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \prod_{i=2}^n (a_i - c) \\
& \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 - c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 & b & \cdots & b \\ 0 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& = (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a_2 & b & \cdots & b \\ 1 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{右边行列式}]{-r_1 \rightarrow r_i, i=2, \dots, n} (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \prod_{i=2}^n (a_i - b) \\
\text{得到: } &\left\{ \begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} &= (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \prod_{i=2}^n (a_i - c) \quad (1) \\ \\ \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} &= (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \prod_{i=2}^n (a_i - b) \quad (2) \end{aligned} \right. \\
\text{通过 } &\frac{(1) \times (a_1 - c) - (2) \times (a_1 - b)}{b - c}, \text{ 即可得到 } \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c}.
\end{aligned}$$

作业 3.4 (Cauchy 行列式)

设复数列 $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n$ 满足 $x_i \neq y_j, \forall i, j$, 计算

$$\det C_n(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix}$$



解

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow[k=1, \dots, n-1]{-r_n \rightarrow r_k} \det \begin{bmatrix} \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[k=1, \dots, n-1]{-c_n \rightarrow c_k} \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_1 - y_{n-1})(x_1 - y_n)} \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_2 - y_{n-1})(x_2 - y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_{n-1} - y_1)(x_{n-1} - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_{n-1} - y_2)(x_{n-1} - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_{n-1} - y_{n-1})(x_{n-1} - y_n)} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n - x_j)(y_j - y_n)}{(x_n - y_j)(x_j - y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \frac{1}{x_{n-1} - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{\text{递推}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i - y_j)}
\end{aligned}$$

 **笔记** $x_n = n-1, y_n = -n$ 时, $C_n(x, y)$ 称为 Hilbert 矩阵。Hilbert 矩阵正定且高度病态 (对任意一个元素的微小扰动都会导致行列式和逆的巨大变化)。

作业 3.5

证明: 奇数阶反对称方阵的行列式是 0。



证明. 设 A 是 n 阶反对称方阵, 即 $A^T = -A$ 。则 $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, 故 $\det A = 0$ 。 □

作业 3.6

证明: $\det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 。



证明.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{a_{21}r_3+a_{22}r_4 \rightarrow r_2}]{\substack{a_{11}r_3+a_{12}r_4 \rightarrow r_1}} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_1 \leftrightarrow c_3}]{\substack{c_2 \leftrightarrow c_4}} \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & -1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

□

作业 3.7

求以下排列的逆序数, 并说明其奇偶性:

1. (6, 8, 1, 4, 7, 5, 3, 2, 9)
2. (2, 6, 4, 1, 9, 7, 3, 5, 8)
3. (7, 5, 2, 3, 9, 8, 1, 6, 4)

解

1. 逆序数为 $5+6+0+2+3+2+1+0+0=19$, 为奇排列。
2. 逆序数为 $1+4+2+0+4+2+0+0+0=13$, 为奇排列。
3. 逆序数为 $6+1+1+1+4+3+0+1+0=20$, 为偶排列。

作业 3.8

使用 Cramer 法则求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解 计算得到 $D = 27, D_1 = 81, D_2 = -108, D_3 = -27, D_4 = 27$, 故解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, -4, 1, 1)$ 。

作业 3.9

证明: n 个变元, n 个方程的齐次线性方程组有非零解当且仅当系数矩阵的行列式为零。

证明. 设齐次线性方程组为 $Ax = b = 0$, 其中 A 为 n 阶系数矩阵, X 为 $n \times 1$ 列向量。

必要性: 若 $\det A \neq 0$, 则可以使用 Cramer 法则, 由于 $b = 0$, D_i 对应矩阵中有一列是零, 故 $D_i = 0, \forall i \Rightarrow x = 0$, 即只有零解, 矛盾。故 $\det A = 0$ 。

充分性: 对 A 施加初等行变换, 得到阶梯形矩阵 U , 则 $\det A = 0 \Rightarrow \det U = 0$, 所以 U 按照定义至少第 n 行为 0, 因此 x_n 为自由变量, 设 $x_n = t \neq 0$, 则可以从下往上依次解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ (可能需要添加其他自由变量), 从而得到非零解。 □

作业 3.10 (Ch3 T16)

计算下列矩阵的行列式:

$$(1) \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}_{n \times n}$$



解

$$(1) \text{ 设 } D_k = \begin{bmatrix} a_{n-k+1} & & & b_{n-k+1} \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_{n-k+1} & & & d_{n-k+1} \end{bmatrix}, \text{ 则 } D_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix}$$

$$\det D_n \stackrel{\text{第一行展开}}{=} a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 & 0 \\ 0 & & & 0 & d_1 \end{bmatrix} - b_1 \det \begin{bmatrix} 0 & a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_1 & 0 & & & d_2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\text{最后一行展开}}{=} a_1 d_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix} - b_1 c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix}$$

$$= (a_1 d_1 - b_1 c_1) \det D_{n-1} = \cdots = \prod_{j=1}^n (a_j d_j - b_j c_j)$$

$$(3) \text{ 设 } \Delta_k = \det \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}_{k \times k},$$

$$\begin{aligned}
\Delta_n &\stackrel{\text{第一行展开}}{=} 2 \cos \theta \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & 1 & \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} \\
&\stackrel{\text{第一列展开}}{=} 2 \cos \theta \Delta_{n-1} + \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & 1 & \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} = 2 \cos \theta \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}
\end{aligned}$$

对 $\theta = k\pi$, 归纳可得 $\Delta_n = (-1)^{nk} n + 1$

否则假设 $\Delta_n - \lambda \Delta_{n-1} = \mu(\Delta_{n-1} - \lambda \Delta_{n-2}) = \mu^{n-2}(\Delta_2 - \lambda \Delta_1) \Leftrightarrow \Delta_n - \mu \Delta_{n-1} = \lambda(\Delta_{n-1} - \mu \Delta_{n-2}) = \lambda^{n-2}(\Delta_2 - \mu \Delta_1)$, 此时有 $\Delta_n = \frac{\mu^{n-1}(\Delta_2 - \lambda \Delta_1) - \lambda^{n-1}(\Delta_2 - \mu \Delta_1)}{\mu - \lambda}$ 。

易得 $\lambda\mu = 1, \lambda + \mu = 2 \cos \theta$ 。对应 λ, μ 是方程 $x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = 0$ 的解。

$\Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \mu = e^{-i\theta}$ (交换顺序不影响结果)。又有 $\Delta_1 = 2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \Delta_2 = 4 \cos^2 \theta - 1 = e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{e^{-(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) - e^{(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k (e^{-i\theta})^{n-k} = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

同时注意到 $\theta = k\pi$ 时表达式仍然满足 $\Delta_n = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta}$, 故此即为最终答案。

第四章 第四次作业

作业 4.1 (Ch4 T3)

设 $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, 计算 AB, BC, ABC, B^2, AC, CA 。



解

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 11 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$ABC = (AB)C = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -61 \\ 12 & 93 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -15 & -4 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -13 & 7 & 12 \\ 1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

作业 4.2 (Ch4 T5)

计算 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$



解 直接计算即可。结果为 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ 。

作业 4.3 (Ch4 T6)

举例求满足条件的 2 阶实方阵 A , 若不存在则证明。

$$(1) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) A^3 = I_2 \text{ 且 } A \neq I_2.$$

解 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为实数。则 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow a^2 + bc = d^2 + bc = 0, ab + bd = ac + cd = 1$ 。从第一个等式可以得到 $a = d$ 或 $a = -d$ 。
 若 $a = d$, 则 $ac + dc = 2ac = 1, ab + bd = 2ab = 1 \Rightarrow a \neq 0, ab = ac = \frac{1}{2} \Rightarrow b = c$ 。
 代入第一个方程可以得到 $a^2 + b^2 = 0$, 从而 $a = b = 0$, 与 $ab = \frac{1}{2}$ 矛盾。
 若 $a = -d$, 则 $ab + bd = ab - ba = 0$ 与 $ab + bd = 1$ 矛盾, 故不存在这样的实矩阵 A 。

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

笔记 (3) 中的矩阵为 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 的旋转矩阵。具体可以参考课本 180 页。

作业 4.4 (Ch4 T7)

计算下列矩阵的 k 次方幂。

$$(1) A := \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad (2) B := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$(4) C := \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6) D := \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

解 (1) 使用归纳。假设 $A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -\sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$ 。对 $k = 1$ 显然成立。若对 $k \leq n$ 成立,

$$\begin{aligned} \text{则 } A^{n+1} &= A^n A = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos nx \cos x - \sin nx \sin x & \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \\ -\sin nx \cos x - \cos nx \sin x & \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)x & \sin(n+1)x \\ -\sin(n+1)x & \cos(n+1)x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故归纳成立。

(2) 对 a, b 不全为 0, 记 $\theta = \arctan \frac{b}{a}$, 则 $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{从而 } B &= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B^k &= (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 记 } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } C = aI + N, \text{ 观察到 } N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

归纳可得 $N^k = (\delta_{i,j-k})_{n \times n}$, 显然 $\forall k \geq n, N^k = 0$. 故 $C^k = (aI + N)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^{\min(k, n-1)} \binom{k}{i} a^{k-i} N^i$.

$$\text{以下对 } a < b \text{ 记 } \binom{a}{b} = 0, \text{ 则 } C^k = \begin{bmatrix} \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}a^{k-n+1} \\ & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2}a^{k-n+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} \\ & & & & \binom{k}{0}a^k \end{bmatrix}$$

(6) 注意到 $D = \alpha\beta$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

$$\text{故 } D^k = \alpha\beta\alpha\beta \cdots \alpha\beta = \alpha(\beta\alpha)^{k-1}\beta = \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \alpha\beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} D.$$

作业 4.5

$$\text{求次数最低的首一多项式 } f(x) \text{ 使得对 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ 满足 } f(A) = O.$$

解 记 $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$. 由于 $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & O \\ O & A_{22}^n \end{bmatrix}$, 故对多项式 $f(x)$,

有 $f(A) = \begin{bmatrix} f(A_{11}) & O \\ O & f(A_{22}) \end{bmatrix}$. 此时只要求 $f(A_{11}) = O, f(A_{22}) = O$ 的最低次多项式, 取最小公倍数即可.

对 A_{11} , 先令其对角线元素为 0, 得到 $f_1(x) = (x-1)^k$, 验证满足 $f_1(A_{11}) = O$ 的最小 k 为 2, 故 $f_1(x) = (x-1)^2$.

对 A_{22} , 先令其对角线元素为 0, 得到 $f_2(x) = (x-2)^k$, 验证满足 $f_2(A_{11}) = O$ 的最小 k 为 2, 故 $f_2(x) = (x-2)^2$.

故符合条件的 $f(x) = \text{lcm}(f_1(x), f_2(x)) = (x-1)^2(x-2)^2$.

笔记 这实际上就是求方阵 A 的最小多项式 $m_A(x)$. 课本此节中并未提及最小多项式的概念, 但它是线性代数中与 Jordan 标准形相关的重要内容, 感兴趣的同学可以自行查阅相关资料.

作业 4.6 (Ch4 T10)

设 A, B 是 n 阶对称阵, 且 $AB = BA$, 证明: AB 是对称阵.

证明. $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA = AB$, 故 AB 是对称阵. □

笔记 这题可以加强为: 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 $AB = BA$ 当且仅当 AB 是对称阵.

作业 4.7 (Ch4 T11)

证明: 两个上(下)三角方阵的乘积仍是上(下)三角.

证明. 只证明对上三角阵的情形. 对 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$, 且 $\forall i > j, a_{ij} = b_{ij} = 0$. 记 $C = (c_{ij})_{n \times n} = AB$,

则 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 。当 $i > j$ 时, $\forall 1 \leq k \leq n$, 都有 $i > k$ 或 $k > j$, 故求和中每一项都是 0 $\Rightarrow c_{ij} = 0$ 。
故 C 是上三角阵。 $\square$

作业 4.8 (Ch4 T12)

证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵。

证明. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是满足题意的矩阵, 则对 $\forall j, k, AE_{jk} = E_{jk}A$ 。左边得到的矩阵的第 k 列是 A 的第 j 列, 其余列为 0, 右边得到的矩阵的第 j 行是 A 的第 k 行, 其余行为 0。当 $i \neq j$ 时, 可以得到 $a_{ik} = a_{ji} = 0$ 。因此 A 的非对角元为 0, 即 A 是对角矩阵。

设 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 由 $AS_{ij} = S_{ij}A$ 有 $\lambda_i = \lambda_j, \forall i, j$, 故 $A = \lambda_1 I_n$ 即 A 是数量阵。 $\square$

作业 4.9

如下定义矩阵的张量积: 对 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{p \times q}, A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$; 证明如

此定义的张量积满足以下性质: 对 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \tilde{A} \in \mathbb{F}^{n \times k}, B \in \mathbb{F}^{p \times q}, \tilde{B} \in \mathbb{F}^{q \times l}, (A \otimes B)(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = (A\tilde{A}) \otimes (B\tilde{B})$ 。

$$\text{证明. } A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}, \tilde{A} \otimes \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}\tilde{B} & \tilde{a}_{12}\tilde{B} & \cdots & \tilde{a}_{1k}\tilde{B} \\ \tilde{a}_{21}\tilde{B} & \tilde{a}_{22}\tilde{B} & \cdots & \tilde{a}_{2k}\tilde{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\tilde{B} & \tilde{a}_{n2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{a}_{nk}\tilde{B} \end{bmatrix}, \text{记 } C = (A \otimes B)(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = (C_{ij})_{m \times r},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik}B)(\tilde{a}_{kj}\tilde{B}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\tilde{a}_{kj} \right) B\tilde{B} = (A\tilde{A})_{ij}(B\tilde{B})$ 。记 $P = A\tilde{A}, Q = B\tilde{B}$,

则 $(P \otimes Q)_{ij} = P_{ij}Q = (A\tilde{A})_{ij}(B\tilde{B}) = C_{ij}$ 。因此有 $(A \otimes B)(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = (A\tilde{A}) \otimes (B\tilde{B})$ 。 $\square$

作业 4.10 (Ch4 T19)

求所有满足 $A^2 = O, B^2 = I, C^H C = I$ 的 2 阶复方阵 A, B, C 。

解 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$ 。此时有 $a^2 + bc = bc + d^2 = 0, ab + bd = ac + cd = 0$ 。

从第一个等式可以得到 $a = d$ 或 $a = -d$ 。若 $a + d \neq 0$, 则 $b = c = 0$, 从而 $a = d = 0$, 此时 $A = O$ 。

否则 $a = -d$, 则第二个等式自动符合, 且由第一个等式可得 $bc = -a^2$ 。

因此所有满足 $A^2 = O$ 的 2 阶复方阵 A 形如 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{C}, bc = -a^2$ 。

(2) 设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $a^2 + bc = bc + d^2 = 1, ab + bd = ac + cd = 0$ 。

若 $a + d \neq 0$, 则 $b = c = 0$, 从而 $a^2 = d^2 = 1$, 此时 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

否则 $a = -d$, 则第二个等式自动符合, 且 $bc = 1 - a^2$ 。此时 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{C}, a^2 + bc = 1$ 。

$$(3) \text{ 设 } C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [v_1 v_2], \text{ 则 } C^H C = \begin{bmatrix} v_1^H v_1 & v_2^H v_1 \\ v_1^H v_2 & v_2^H v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & v_2^H v_1 \\ v_1^H v_2 & |v_2|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \end{cases}.$$

从第一个条件开始, 假设 $|a|^2 + |c|^2 = 1$, 则第二个条件是齐次方程组, 通解为 $b = -\lambda \bar{c}, d = \lambda \bar{a}, \lambda \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

代入第三个条件, 得到 $|\lambda|^2(|c|^2 + |a|^2) = |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

此时 $C = \begin{bmatrix} a & -\bar{c}e^{i\theta} \\ c & \bar{a}e^{i\theta} \end{bmatrix}$, 其中 $a, c \in \mathbb{C}, |a|^2 + |c|^2 = 1, \theta \in \mathbb{R}$.

作业 4.11 (Ch4 T20)

证明: 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$.

证明. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$,

$$\text{则 } \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lk} a_{kl} = 0 \neq n = \text{tr}(I_n)$$

因此, 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$. □

作业 4.12 (Ch4 T34)

证明: 初等方阵具有以下性质

1. $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)$
2. 当 $i \neq q, j \neq p$ 时, $T_{ij}(\lambda)T_{pq}(\mu) = T_{pq}(\mu)T_{ij}(\lambda)$
3. $D_i(-1)S_{ij} = S_{ij}D_j(-1) = T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)$
4. $D_i(\lambda)D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$

证明. 自行验证即可. □

作业 4.13 (Ch4 T35)

将单位矩阵做一系列 (有限次) 行与行的对换得到的矩阵称为置换矩阵, 证明:

1. 将单位矩阵做一系列的列与列的对换得到的矩阵也为置换矩阵;
2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位阵的行 (或列) 得到;
3. 置换矩阵的乘积仍为置换矩阵;
4. 置换矩阵的逆、转置也是置换矩阵.

证明. 由题意, $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}$, 使得 $P = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k} I = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$. 此即置换矩阵的等价定义.

对于列变换 $S_{p_1 q_1}, \dots, S_{p_r q_r}$, 则 $P' = I S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r} = S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$, 故做列对换得到的矩阵也是置换矩阵.

由 S_{ij} 性质可知, 置换矩阵每行, 每列恰有一个 1, 其余元素为 0, 因此置换矩阵可以通过按某种次序排列单位阵的行 (或列) 得到.

设 P_1, P_2 是置换矩阵, 则 $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}, \{p_1, \dots, p_r\}, \{q_1, \dots, q_r\}$, 使得 $P_1 = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$, $P_2 = S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$. 此时 $P_1 P_2 = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k} S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$, 故置换矩阵的乘积仍为置换矩阵.

设 P 是置换矩阵, 则 $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}$, 使得 $P = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$. 由 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}, S_{ij}^T = S_{ij}$ 可知 $P^{-1} = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}, P^T = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}$, 故置换矩阵的逆、转置也是置换矩阵. □

第五章 第五次作业

作业 5.1 (Ch4 T15)

设方阵 A 满足 $A^k = O$, 其中 k 是正整数, 证明: $I + A$ 可逆, 并求 $(I + A)^{-1}$.

证明. 注意到 $(I_n + A)(I_n - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}) = I_n + (-1)^{k-1}A^k = I_n$, 故 $I + A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = I - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}$. $\square$

作业 5.2 (Ch4 T16)

设方阵 A 满足 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$, 证明: $I - A$ 可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$.

证明. 注意到 $I = 2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = (I - A)(6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I)$,
故 $I - A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = 6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I$. $\square$

作业 5.3 (Ch4 T21)

证明: 可逆上(下)三角、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是上(下)三角、准对角、对称、反对称的。

证明. (1) 以上三角矩阵为例, 假设 A 是上三角矩阵, $B = A^{-1}$, $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=i}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$

将 $i = n$ 代入, 得到 $a_{nn}b_{nk} = 0$, 由于 $a_{nn} \neq 0$, 所以 $b_{nk} = 0, k < n$. 假设 $\forall m > i$, 有 $\forall k < m, b_{mk} = 0$, 则此时 $\sum_{j=i}^n a_{ij}b_{jk} = a_{ii}b_{ik} = \delta_{ik}$, 所以 $b_{ik} = 0, k < i$. 由数学归纳法可知 B 是上三角矩阵。

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_m \end{bmatrix}$ 是准对角矩阵, 则 $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_m^{-1} \end{bmatrix}$ 也是准对角矩阵。

(3) 设 A 是对称矩阵, $B = A^{-1}$, 则 $I = AB = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$, 由逆矩阵的唯一性可知 $B = B^T$, 所以 B 是对称矩阵。

(4) 设 A 是反对称矩阵, $B = A^{-1}$, 则 $I = AB = (AB)^T = B^T A^T = -B^T A$, 由逆矩阵的唯一性可知 $B = -B^T$, 所以 B 是反对称矩阵. $\square$

作业 5.4 (Ch4 T23)

求解下列矩阵方程:

$$(1) \quad X \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

解 (1) 记 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $X = BA^{-1} \begin{bmatrix} -9 & -7 & -9 \\ -36 & -29 & -46 \\ -41 & -32 & -51 \end{bmatrix}$

$$(2) \text{ 计算可得 } \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & x_{23} - x_{12} \\ x_{31} & x_{32} - x_{21} & x_{33} - x_{22} \\ x_{11} & x_{12} - x_{31} & x_{13} - x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 14 \\ 1 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

作业 5.5 (Ch4 T24)

设 A, B 是 n 阶方阵, λ 是数, 证明: (1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$; (2) $(AB)^* = B^* A^*$; (3) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.

解 对于矩阵 A, B 均为可逆矩阵, 我们有 $AA^* = \det A \cdot I_n, BB^* = \det B \cdot I_n$ 为此我们有

(1) 每一个矩阵的代数余子式都是原矩阵的一个 $n-1$ 阶子式, $n-1$ 阶子式的每一项均乘上一个 λ , 行列式的值会变为原来的 λ^{n-1} 倍, 故 (1) 得证。

(2)

$$(AB)^* = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (B^{-1} \det B)(A^{-1} \det A) = B^* A^*$$

(3)

$$\det A^* \cdot \det A = \det(A \cdot A^*) = \det(\det A \cdot I_n) = (\det A)^n \Rightarrow \det A^* = (\det A)^{n-1}$$

对于 AB 中有不可逆矩阵的情形, 可以使用扰动法或借助行列式与矩阵乘法的连续性来证明。

作业 5.6 (Ch4 T25)

设方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A^* 。

解 利用公式 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 以及可逆矩阵逆矩阵的唯一性可以得到

$$A^* = \det A \cdot A^{-1}, \det A = (\det A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}$$

最终可以得到

$$A^* = \frac{1}{2} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

作业 5.7 (Ch4 T26)

设方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A 。

解 显然 A^* 是可逆矩阵, 故 A 可逆, 由 24 题有 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$ 。

在本题中 n 取 4, $\det A^* = -8$, 故 $\det A = -2$, 再由 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 有

$$A = \det A \cdot (A^*)^{-1} = (-2) \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{4} \\ & -1 & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -\frac{1}{2} \\ & 2 & & \\ & -1 & & \\ -2 & & & \end{bmatrix}$$

作业 5.8 (Ch4 T27)

设 n 阶方阵 A 的每行, 每列元素之和都是 0, 证明: A^* 的所有元素都相等。

解 根据矩阵的每一项的平等地位特征, 只需在这个条件下证明 $A_{11} = A_{21}$ 即可。

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} + a_{33} + \cdots + a_{3n} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} + a_{n3} + \cdots + a_{nn} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_{21} \end{aligned}$$

利用同样的方法可以证明 $A_{i,j} = A_{i+1,j} = A_{i,j+1}$, 即完成了证明。

作业 5.9 (Ch4 T28)

设 A 是方阵, 证明: 线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $\det(A) = 0$ 。

证明. 设齐次线性方程组为 $Ax = b = 0$, 其中 A 为 n 阶系数矩阵, X 为 $n \times 1$ 列向量。

必要性: 若 $\det A \neq 0$, 则可以使用 Cramer 法则, 由于 $b = 0$, D_i 对应矩阵中有一列是零, 故 $D_i = 0, \forall i \Rightarrow x = 0$, 即只有零解, 矛盾。故 $\det A = 0$ 。

充分性: 对 A 施加初等行变换, 得到阶梯形矩阵 U , 则 $\det A = 0 \Rightarrow \det U = 0$, 所以 U 按照定义至少第 n 行为 0, 因此 x_n 为自由变量, 设 $x_n = t \neq 0$, 则可以从下往上依次解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ (可能需要添加其他自由变量), 从而得到非零解。□

作业 5.10 (Ch4 T30)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 A^n 与 A^{-1}

解 直接计算可得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对 A 按 2×2 进行分块得到 $A = \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix}$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。易得 $B^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

使用归纳证明: $A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix}$ 。对 $n = 1$ 显然成立, 若对 $n \leq k$ 成立,

则 $A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} B^k & O \\ kB^{k-1} & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ kB^k + B^k & B^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ (k+1)B^k & B^{k+1} \end{bmatrix}$ 。

故归纳成立。
$$A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & -n(n-1) & 1 & -n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作业 5.11 (Ch4 T36)

计算下列矩阵的逆矩阵

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5) A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$$

解 (2) 直接给出:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(5) 由之前练习可以得到 $\det A = \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \prod_{i=1}^n a_i$, 因此 A 可逆当且仅当至多一个 $a_i = 0$ 。假设 $a_i \neq 0$ 。此时

记 $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$, 则 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} + \mathbb{1} \mathbb{1}^\top$, 记 $B = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, $u = v = \mathbb{1}$, 由 Sherman-Morrison

公式 (39 题) 可得

$$\begin{aligned} A^{-1} &= B^{-1} - \frac{B^{-1} u v^\top B^{-1}}{1 + v^\top B^{-1} u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \mathbb{1} \mathbb{1}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}{1 + \mathbb{1}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \mathbb{1}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} = \begin{cases} \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right)}, & i = j \\ -\frac{1}{a_i a_j \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right)}, & i \neq j \end{cases}_{n \times n} \end{aligned}$$

对于 a_i 有一个为 0 的情形, 由于 $X_k \rightarrow X$ 时 $X_k^{-1} \rightarrow X^{-1}$ ($X \rightarrow X^{-1}$ 是连续映射), 因此可以取 $a_i \rightarrow 0$ 的极限得到逆矩阵。以下假设 $a_k = 0, i, j \neq k$, 记 $S = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$, 则有:

$$\begin{aligned}
(A^{-1})_{kk} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k^2 S} \right) = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{a_k S - 1}{a_k^2 S} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{a_k (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i})}{a_k^2 (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}) + a_k} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}}{2a_k (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}) + 1} \\
&= \frac{1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}}{1 + 0} = 1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i} \\
(A^{-1})_{ii} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i^2 S} \right) = \frac{1}{a_i} \\
(A^{-1})_{ik} &= (A^{-1})_{ki} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_k S} \right) = \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_k + a_i + a_i a_k \sum_{l \neq k} \frac{1}{a_l}} \right) = -\frac{1}{a_i} \\
(A^{-1})_{ij} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_j S} \right) = 0
\end{aligned}$$

作业 5.12 (Ch4 T38)

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 证明 $\det(A - aa^\top) = (1 - a^\top A^{-1}a) \det A$ 。

证明. 令 $M = \begin{bmatrix} A & a \\ a^\top & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det M = \det A \det(1 - a^\top A^{-1}a) = \det 1 \det(A - a(1)^{-1}a^\top)$, 即 $(1 - a^\top A^{-1}a) \det A = \det(A - aa^\top)$ 。 $\square$

作业 5.13 (Ch4 T39)

证明 Sherman-Morrison 公式: 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $u, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 则 $A + uv^\top$ 可逆当且仅当 $1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$, 并且此时

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$$

证明. 令 $M = \begin{bmatrix} A & u \\ -v^\top & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det M = \det A \det(1 - (-v^\top)A^{-1}u) = \det 1 \det(A - u(1)^{-1}(-v)^\top)$, 即 $(1 + v^\top A^{-1}u) \det A = \det(A + uv^\top)$, 因此 $A + uv^\top$ 可逆当且仅当 $1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$ 。以下验证结论成立:

$$\begin{aligned}
(A + uv^\top) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} \right) &= AA^{-1} + uv^\top A^{-1} - \frac{uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{uv^\top A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} \\
&= I_n + uv^\top A^{-1} - \frac{uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{u(v^\top A^{-1}u)v^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} = I_n + \left(1 - \frac{1}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{v^\top A^{-1}u}{1 + v^\top A^{-1}u} \right) uv^\top A^{-1} = I_n
\end{aligned}$$

$\square$

第六章 第六次作业

作业 6.1 (Ch4 T39)

证明 Sherman-Morrison 公式：设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆， $u, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ，则 $A + uv^\top$ 可逆当且仅当 $1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$ ，并且此时

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$$

◆

证明. 令 $M = \begin{bmatrix} A & u \\ -v^\top & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $\det M = \det A \det(1 - (-v^\top)A^{-1}u) = \det 1 \det(A - u(1)^{-1}(-v)^\top)$ ，即 $(1 + v^\top A^{-1}u) \det A = \det(A + uv^\top)$ ，因此 $A + uv^\top$ 可逆当且仅当 $1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$ 。以下验证结论成立：

$$\begin{aligned} (A + uv^\top) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} \right) &= AA^{-1} + uv^\top A^{-1} - \frac{uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{uv^\top A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} \\ &= I_n + uv^\top A^{-1} - \frac{uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{u(v^\top A^{-1}u)v^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u} = I_n + \left(1 - \frac{1}{1 + v^\top A^{-1}u} - \frac{v^\top A^{-1}u}{1 + v^\top A^{-1}u} \right) uv^\top A^{-1} = I_n \end{aligned}$$

□

作业 6.2 (Ch4 T41)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵，证明：

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB)$$

◆

证明. 进行分块矩阵的初等变换有：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

利用性质对于同阶方阵 $U, V, \det(UV) = \det(U) \det(V)$ ，对上面的等式取行列式，并且利用到每个第三类变换阵的行列式值都是 1，即可得

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB)$$

□

作业 6.3 (Ch4 T43)

对于 a, b 的各种取值，讨论实矩阵 $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix}$ 的秩。

◆

解 对 A 进行初等行变换，有 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{bmatrix}$ 。

因此：当 $a \neq 6, b \neq 6$ 时, $\text{rank}(A) = 3$; 当 $a = 6, b = 6$ 时, $\text{rank}(A) = 1$; 当 $a = 6, b \neq 6$ 或 $a \neq 6, b = 6$ 时, $\text{rank}(A) = 2$ 。

作业 6.4 (Ch4 T45)

设 A 是 n 阶方阵, 证明: $\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{rank}(A) = n - 1 \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n - 2 \end{cases}$

证明. 若 $\text{rank}(A) = n$, 则 A 可逆, 又由 $A^*A = \det A I_n$ 有 A^* 可逆, 故 $\text{rank}(A^*) = n$ 。

若 $\text{rank}(A) = n - 1$, 则 A 有非零 $n - 1$ 阶子式, 故 $\text{rank}(A^*) \geq 1$ 。又由 Sylvester 不等式,

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A^*) \leq \text{rank}(AA^*) + n = n \Rightarrow \text{rank}(A^*) \leq 1$, 故 $\text{rank}(A^*) = 1$ 。

若 $\text{rank}(A) \leq n - 2$, 则 A 没有非零 $n - 1$ 阶子式, 故 $A^* = O, (\text{rank})(A^*) = 0$ 。□

作业 6.5 (Ch4 T48)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I_n$, 证明: $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) = n$ 。

证明. 首先有 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq \text{rank}((I_n - A) + (I_n + A)) = n$ 。又由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \leq \text{rank}((I_n - A)(I_n + A)) + n = n$, 故 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) = n$ 。□

引理 6.1

对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = A$

证明. 首先有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}((I_n - A) + A) = n$ 。考虑等号成立条件:

($\Leftarrow$) 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \leq \text{rank}(A(I_n - A)) + n = n$ 。

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n - A \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix}$$

此时由 $\text{rank} \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} = n$ 即有 $A - A^2 = O$, 即 $A^2 = A$ 。□

引理 6.2

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $A^2 = A$ 时 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ 。

证明. 必要性: 记 $r = \text{rank}(A)$, 则 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), s.t. A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$, 此时 $A^2 = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A$ 。

消去可逆矩阵, $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。对 QP 作分块 $\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, 代入前式, 得到

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \Rightarrow R_{11} = I_r, \text{ 此时}$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \left(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q P \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ O & O \end{bmatrix} = r = \text{rank}(A)。 \quad \square$$

作业 6.6

设 $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$, 证明: $A_i^2 = A_i, i = 1, \dots, k$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^k \text{rank}(A_i) = n$ 。

证明. 充分性: 由 $A_i^2 = A_i$, 有 $\text{rank } A_i = \text{tr } A_i$, 由 $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$ 与引理可得 $\sum_{i=1}^k \text{rank } A_i = \sum_{i=1}^k \text{tr } A_i = \text{tr } I_n = n$ 。

必要性: 令 $\tilde{A}_i = \sum_{j \neq i} A_j = I_n - A_i$, 则 $\text{rank } \tilde{A}_i = \text{rank} \left(\sum_{j \neq i} A_j \right) \leq \sum_{j \neq i} \text{rank } A_j = n - \text{rank } A_i$

又 $n = \text{rank } I_n = \text{rank}(A_i + \tilde{A}_i) \leq \text{rank } A_i + \text{rank } \tilde{A}_i$, 有 $\text{rank } \tilde{A}_i \geq n - \text{rank } A_i \Rightarrow \text{rank } \tilde{A}_i = n - \text{rank } A_i$ 。

由引理可知 $A_i^2 = A_i$ 。

□

作业 6.7

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{p \times q}, C \in \mathbb{F}^{m \times q}, X \in \mathbb{F}^{n \times q}, Y \in \mathbb{F}^{m \times p}$, 证明: 矩阵方程 $AX - YB = C$ 有解的充分必要条

件是 $\text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 。

证明. 必要性: 设 X_0, Y_0 是方程的一个解, 则 $AX_0 - Y_0B = C$, 此时 $\begin{bmatrix} A & AX_0 - Y_0B \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & AX_0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

故 $\text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 。

充分性: 设 $\text{rank } A = r, \text{rank } B = s, \exists P_A, Q_A, P_B, Q_B$ s. t. $P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}, P_B B Q_B = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}$, 对方程

进行变形: $AX - YB = C \Leftrightarrow P_A(AX - YB)Q_B = P_A C Q_B \Leftrightarrow (P_A A Q_A)(Q_A^{-1} X Q_B) - (P_A Y P_B^{-1})(P_B B Q_B) = P_A C Q_B$ 。

令 $A' = P_A A Q_A, B' = P_B B Q_B, X' = Q_A^{-1} X Q_B, Y' = P_A Y P_B^{-1}, C' = P_A C Q_B$, 则方程化为 $A'X' - Y'B' = C'$ 。

又 $r + s = \text{rank } A + \text{rank } B = \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} P_A & \\ & P_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} P_A A Q_A & P_A C Q_B \\ 0 & P_B B Q_B \end{bmatrix} =$

$\text{rank} \begin{bmatrix} A' & C' \\ 0 & B' \end{bmatrix}$, 将 C' 按匹配 A', B' 的结构分块为 $\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix}$, 则 $\begin{bmatrix} A' & C' \\ 0 & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & C'_{11} & C'_{12} \\ 0 & 0 & C'_{21} & C'_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 利用初等变

换可以得到 $r + s = \text{rank} \begin{bmatrix} I_r & 0 & C'_{11} & C'_{12} \\ 0 & 0 & C'_{21} & C'_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r + s + \text{rank } C'_{22}$, 故 $C'_{22} = 0$ 。考虑变形后

的方程 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{11} - Y'_{11} & X'_{12} \\ -Y'_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & 0 \end{bmatrix}$, 此时此方程显然有解, 从而原方程有解。

□

作业 6.8 (Ch5 T3)

在 $\mathbb{F}^4$ 中, 判断向量 b 能否写成 a_1, a_2, a_3 的线性组合, 若能, 请写出一种表示方式:

(1) $a_1 = (-1, 3, 0, -5), a_2 = (2, 0, 7, -3), a_3 = (-4, 1, -2, 6), b = (8, 3, -1, -25)$ 。

解 (1) 能。 $b = 2a_1 - a_2 - 3a_3$ 。

作业 6.9 (Ch5 T4)

设 $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 1, 1, 1)$ 。证明: $\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合, 且表示唯一。

证明. 设 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵行列式非零, 故方程组的解唯一, 即表示唯一。□

作业 6.10

设 $P_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq 4$ 是三维空间中的点, 证明: 这四个点共面当且仅当 $\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$ 。

证明. 必要性: 假设 P_i 均在平面 $\pi: ax + by + cz + d = 0 (a, b, c \text{ 不全为 } 0)$ 上, 则

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \text{ 有非零}$$

解, 故系数矩阵行列式为零。

充分性: 若系数矩阵行列式为零, 则 $\exists (a, b, c, d) \neq 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } P_i \text{ 均在平面 } \pi:$$

$ax + by + cz + d = 0$ 上。□

作业 6.11

设 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 证明: $\mathbb{F}\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \mathbb{F}^{m \times 1}$ 的充分必要条件是 $\text{rank}(A) = m$ 。

证明. 必要性: 记 $\text{Col}(A) = \mathbb{F}\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, 则 $\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = m$ 。

充分性: 由 $\text{rank}(A) = m$ 可知 $\dim(\text{Col}(A)) = m$, 而 $\text{Col}(A) \subseteq \mathbb{F}^{m \times 1}$, 故 $\text{Col}(A) = \mathbb{F}^{m \times 1}$ 。□

第七章 第七次作业

作业 7.1 (Ch5 T10)

判断下列向量组是否线性相关:

(2) $a_1 = (3, 1, 2, -4), a_2 = (1, 0, 5, 2), a_3 = (-1, 2, 0, 3)$

(2) $a_1 = (1, -1, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0), a_3 = (0, 0, 1, -1), a_4 = (-1, 0, 0, 1)$

解 (2) 线性无关, (4) 线性相关。

作业 7.2 (Ch5 T11)

证明: 任何一个经过两平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 交线的平面的方程可以写为 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, 其中 λ, μ 不全为 0。

证明. 证明分为两部分: 方程 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 代表一个过交线 L 的平面; 任意一个过交线 L 的平面都可以表示成上述形式。

对于第一部分, 原先平面的法向量为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$; 把方程重写为 $(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0$, x, y, z 的系数分别为 $\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2, \lambda C_1 + \mu C_2$, 可以视作 n_1 与 n_2 的线性组合 $\lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2$, 由于平面 π_1, π_2 相交, 故 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 不共线, 对不全为零的 λ, μ , 有 $\lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2 \neq 0$, 因此该方程代表一个平面。设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是交线 L 上任意一点, 则其坐标满足 $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$, 代入上述方程可得 $\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0$, 因此 P_0 在该平面上。由于 P_0 是 L 上任意一点, 故该平面过交线 L 。

对于第二部分, 设这个平面的方程为 $\pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$, 取 $P_3(x_3, y_3, z_3) \in \pi_3 \setminus L$, 则 P_3 不同时在 π_1, π_2 上, 即对 $k_1 = A_1x_3 + B_1y_3 + C_1z_3 + D_1, k_2 = A_2x_3 + B_2y_3 + C_2z_3 + D_2$, k_1, k_2 不全为 0。考虑平面 $\pi: \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, 为了使 P_3 在 π 上, 需满足 $\lambda k_1 + \mu k_2 = 0$, 该方程有不全为零的解 $(k_2, -k_1)$, 因此 π 可以写成 $k_2(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - k_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 。又由于 π_3 和 π 同时包含交线 L 和 L 外一点 P_3 , 因此 $\pi = \pi_3$, 即 π_3 可以表示成所需形式。□

注 这个命题的 n 维情形是否成立?

作业 7.3 (Ch5 T17)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关, 且 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 可以由向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性表示, 则 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 也线性无关。

证明. 根据线性表示关系可知存在矩阵 $B \in \mathbb{F}^{r \times r}$ (未必可逆) 使得

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B$$
$$\text{从而由线性无关性, 方程 } \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

仅有零解。这表明 $Bx = 0$ 也仅有零解, B 一定可逆 (否则 $Bx = 0$ 已有非零解, 它也是原方程的非零解)。因此 B^{-1} 给出了 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 关于 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 的线性表示, 这两个向量组是等价的, 故 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 是线性无关的。□

注 若一个向量组 U 可被另一个向量组 V 线性表示, 则一定有 U 与 V 的向量合在一起构成的新向量组 W 可被 V 表示, 因此可得 $\text{rank } U < \text{rank } W = \text{rank } V$ 。

作业 7.4 (Ch5 T19)

求下列向量组的极大线性无关组和秩。

(2) $a_1 = (1, -1, 2, 4), a_2 = (0, 3, 1, 2), a_3 = (3, 0, 7, 14), a_4 = (1, -1, 2, 0)$.

(3) $a_1 = (0, 1, 2, 3), a_2 = (1, 2, 3, 4), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (4, 3, 2, 1), a_5 = (6, 5, 4, 3)$.

解

$$\begin{aligned} (2) \quad (a_1^\top, a_2^\top, a_3^\top, a_4^\top) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_2, -2r_1 \rightarrow r_3, -4r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-3r_3 \rightarrow r_2, -2r_3 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}r_4 \rightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见其秩为 3, 极大线性无关组为 $\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}$ 。

$$\begin{aligned} (3) \quad (a_1^\top, a_2^\top, a_3^\top, a_4^\top, a_5^\top) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2 \rightarrow r_3, -3r_2 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & -8 & -12 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-2r_1 \rightarrow r_2, r_1 \rightarrow r_3, 2r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见其秩为 2, 极大线性无关组为它们中的任意两个构成的向量组。

作业 7.5

设 V 是线性空间, $V^{m \times n}$ 是元素为 V 中向量的 $m \times n$ 矩阵构成的集合。证明 $V^{m \times n}$ 中元素与 $\mathbb{R}^{p \times q}$ 中元素的矩阵乘法在维度相容时满足结合律 (对向量矩阵 S 与标量矩阵 A, B 验证 $(AS)B = A(SB), (AB)S = A(BS)$)。

证明. 设 $S \in V^{m \times n}, A \in \mathbb{R}^{p \times m}, B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, 则 $(AS)B = A(SB)$ 可通过分块矩阵乘法验证:

$$\text{设 } S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qp} \end{bmatrix}$$

则 $((AS)B)_{ij} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^m a_{il} s_{lk} \right) b_{kj}, (A(SB))_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} \left(\sum_{k=1}^p s_{lk} b_{kj} \right)$, 由标量乘法对向量加法的分配律与向量有限求和的结合律, 有 $(AS)B = A(SB)$ 。

同理可验证 $(AB)S = A(BS)$ 。

□

作业 7.6 (Ch5 T22)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的秩为 r , 则其中任意 r 个线性无关的向量构成 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的极大无关组。

证明. 根据极大无关组的定义, 设 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ 为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中任意 r 个线性无关的向量, 则任意 $k \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 都有 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} \cup \{a_k\}$ 为秩为 r 的向量组, 从而它线性相关。故 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} \cup \{a_k\}$ 为极大无关组。 $\square$

作业 7.7 (Ch5 T25)

求下列矩阵秩以及行空间, 列空间, 零空间的一组基。

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -11 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此秩为 3, 行空间的一组基为 $\{(0, -11, 6, 1), (1, 3, -2, 0), (0, -6, 0, 5)\}$, 列空间的一组基为 $\{(3, -1, 2, 4)^T, (-2, -3, 0, 1)^T, (0, 2, -4, -2)^T\}$, $Ax = 0$ 通解为 $x = t(8, 30, 49, 36)^T$, $t \in \mathbb{F}$, 零空间的一组基为 $\{(8, 30, 49, 36)^T\}$ 。

作业 7.8 (Ch5 T26)

证明: 线性方程组 $\sum_{i=1}^m a_i x_i = b$ 有解 (1) 当且仅当 $b \in \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ (2), 当且仅当 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle$ (3)。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)

有解时 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 就是 $b = \sum_{i=1}^m x_i a_i$ 的线性组合系数, 故 $b \in \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3)

$\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \subset \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle$ 是显然的, 反之由 $a_i \in \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle, b \in \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ 有 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle \subset \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, 因此二者相等。

(3) $\Rightarrow$ (1)

由 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle$ 有 $b \in \mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, 故 $\exists x_i, b = \sum_{i=1}^m x_i a_i$, 因此方程有解。 $\square$

作业 7.9 (Ch5 T27)

证明: $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s)$

证明. 设 $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 的极大无关组是 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ 的极大无关组是 $\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q}\}$, 则 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle = \mathbb{F}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p} \rangle$, $\mathbb{F}\langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle = \mathbb{F}\langle b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q} \rangle$, 故 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s \rangle = \mathbb{F}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}, b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q} \rangle$, 因此 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq p + q$ 。又 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) = p, \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s) = q$, 故 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s)$ 。 $\square$

作业 7.10 (Ch5 T29)

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 的秩为 r , 证明: A 的不为 0 的 $r \times r$ 子式所在行/列构成 A 的行/列向量的一个极大无关组。

证明. 设 A 的不为 0 的 $r \times r$ 子式所在行/列为 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行与 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列, 组成矩阵为 $\tilde{A}$, 设 A 的行向量为 $a_i, a_2, \dots, a_n$, $\tilde{A}$ 的行向量为 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$, 则 $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r\}$ 线性无关, 此时 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ 作为 $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r\}$ 的加长向量组仍线性无关. 再证明其极大性. 从 A 的剩余 $m-r$ 行中任取一行 a_k , 再选取第 j 列, 和 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行与 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列组成新的值为 0 的 $(r+1) \times (r+1)$ 子式, 新加入的行与列均是最后一个, 设对应矩阵为 $\hat{A}$ (若选取列满足 $j = j_t$ 时则认为 $\hat{A}$ 有两个相同的列), 按照原矩阵的第 j 列展开, 有 $0 = \det \hat{A} = \sum_{l=1}^r a_{i_l j} \hat{A}_{l, r+1} + a_{k j} \hat{A}_{r+1, r+1}$, 注意到此时代数余子式 $\hat{A}_{l j}$ 与 j 无关, 记作 c_l , 此时 $\forall 1 \leq j \leq n$, 有 $c_1 a_{i_1, j} + c_2 a_{i_2, j} + \dots + c_r a_{i_r, j} + c_{r+1} a_{k j} = 0$, 对应到矩阵的行得到 $c_1 a_{i_1} + c_2 a_{i_2} + \dots + c_r a_{i_r} + c_{r+1} a_k = 0$, 且 $c_{r+1} = \det \tilde{A} \neq 0$, 故 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, a_k$ 线性相关, 因此 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ 是极大无关组. 列向量组的证明考虑 A^T 的行向量组即可. $\square$

作业 7.11 (Ch5 T31)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 向量组 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 有关系式

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$$

证明: $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当 T 为可逆方阵. 

证明. $\Rightarrow$: 若 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 则 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为满秩方阵, 故 $T = (b_1, b_2, \dots, b_n)(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}$ 是可逆方阵.

$\Leftarrow$: 若 T 为可逆方阵, 则 $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$ 作为可逆方阵乘积显然可逆, 从而列向量组满秩, 是 $\mathbb{F}^n$ 的基. $\square$

第八章 第八次作业

作业 8.1 (Ch5 T12)

判断下述命题

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合。
2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关。
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关。
4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关。
5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关。
6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关。
7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关。
8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关。

解

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合。

否。考虑作为一维数组向量的 $0, 1$, 1 不能被 0 表示为线性组合。

2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关。

否。考虑二维数组向量组 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 。

3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关。

是。不妨设原向量组集合为 V , 子向量组为 $V' \subset V$, 则

V 线性无关

$$\Leftrightarrow \sum_{\alpha \in V} \lambda_{\alpha} \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V \text{ 唯一解}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha = \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha + \sum_{\alpha \in V-V'} 0 \cdot \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V' \text{ 唯一解}$$

$\Leftrightarrow V'$ 线性无关

4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关。

是。它们可作为列向量排成一个规格为 $n \times (n+1)$ 的矩阵, 这个矩阵作为系数矩阵对应的齐次线性方程组的有非零解, 该非零解表明它们可线性组合为零向量, 因而线性相关。

5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关。

否。记矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \\ \vdots \\ a_s + a_1 \end{bmatrix}$$

根据 s 为偶数时 $\det P = 0$, P 不可逆知该向量组构成的矩阵一定无 s 阶可逆子矩阵 (假如线性无关那么秩为 s , 列秩也为 s , 从而一定可选出 s 个列得到一个可逆的 s 阶子矩阵), 一定线性相关。

6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关。

是。 s 为偶数时理由同 5, s 为奇数时 $\det(P) \neq 0$, 该二向量组等价, 因此秩都严格小于 s 。

7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关。

是。利用定义验证时仅考虑它们加长前的分量便可得全部的线性组合系数为 0。

8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关。

否。每一个线性无关的数组向量组都可添上零保持线性无关性, 而它们现在都可看成是由线性相关的零向量加长得到。

作业 8.2 (Ch5 T34)

以向量组 $a_1 = (3, 1, 0), a_2 = (6, 3, 2), a_3 = (1, 3, 5)$ 为基, 求 $\beta = (2, -1, 2)$ 的坐标。

解 设 β 的坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 则

$$\beta = \sum_{i=1}^3 x_i a_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (-76, 41, -16)$ 。

作业 8.3 (Ch5 T35)

设 $a_1 = (3, 2, -1, 4), a_2 = (2, 3, 0, -1)$ 。

1. 将 a_1, a_2 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;
2. 给出标准基在该组基下的表示;
3. 求 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标。

解 题目给出的为行向量, 以下写法是为了和矩阵乘法相容。

$$1. \text{ 设扩充后的基为 } a_1, a_2, a_3, a_4, \text{ 考虑对 } \begin{bmatrix} a_1^\top & a_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}。$$

可见其任意两行都线性无关, 从而保证行向量无关性即可, 可取 $a_3 = (1, 0, 0, 0), a_4 = (0, 1, 0, 0)$ 。

$$2. \text{ 标准基在该组基下的表示为 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix}。$$

右边矩阵各列即各个标准基的坐标。

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 41 \\ 39 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \beta = (1, 3, 4, -2) \text{ 在该组基下的坐标为 } (-4, -14, 41, 39)。$$

作业 8.4 (Ch5 T36)

将三维空间中一个右手系统单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 逆时针 (从 $z+$ 方向看) 旋转 θ , 求原坐标系中一点 (x, y, z) 的新坐标。

解 记 $p = (x, y, z)$, 将 p 分解为平行于 e 和垂直于 e 的分量, 即 $p = p_{\parallel} + p_{\perp}$, 其中 $p_{\parallel} = (p \cdot e)e, p_{\perp} = p - p_{\parallel}$ 。由于 $e \perp p_{\perp}$, 故 $p_{\perp}, e, w := e \times p_{\perp} = e \times p$ 构成一组正交基, 且 $|w| = |e||p_{\perp}| \sin 90^\circ = |p_{\perp}|$ 。现考虑在该基下的坐标变换, 设 $p'_{\perp}, p'_{\parallel}$ 分别为旋转后的 $p_{\perp}, p_{\parallel}$, 则 $p'_{\parallel} = p_{\parallel}$, 且 $p'_{\perp} = p_{\perp} \cos \theta + w \sin \theta$ 。因此 $p' = p'_{\parallel} + p'_{\perp} = (p \cdot e)e + (p - (p \cdot e)e) \cos \theta + (e \times p) \sin \theta = p \cos \theta + (e \times p) \sin \theta + (p \cdot e)e(1 - \cos \theta)$ (在这一步代入即可得到答

案，但是一般起见以下给出矩阵形式的推导)。以下使用列向量进行推导，设 $e = (e_x, e_y, e_z)^\top, p = (x, y, z)^\top$ 。

$$\begin{aligned}
 p' &= p \cos \theta + (e \times p) \sin \theta + (p \cdot e)e(1 - \cos \theta) \\
 &= \begin{bmatrix} x \cos \theta \\ y \cos \theta \\ z \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} e_y z - e_z y \\ e_z x - e_x z \\ e_x y - e_y x \end{bmatrix} + (1 - \cos \theta)(ee^\top)p \\
 &= \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} p + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} p + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} e_x^2 & e_x e_y & e_x e_z \\ e_y e_x & e_y^2 & e_y e_z \\ e_z e_x & e_z e_y & e_z^2 \end{bmatrix} p \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_x^2 & (1 - \cos \theta)e_x e_y - e_z \sin \theta & (1 - \cos \theta)e_x e_z + e_y \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)e_y e_x + e_z \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_y^2 & (1 - \cos \theta)e_y e_z - e_x \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)e_z e_x - e_y \sin \theta & (1 - \cos \theta)e_z e_y + e_x \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_z^2 \end{bmatrix} p \\
 \text{代入上式之一即可得到} &\begin{cases} x' = x \cos \theta + \frac{z-y}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3}(1 - \cos \theta) \\ y' = y \cos \theta + \frac{x-z}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3}(1 - \cos \theta) \\ z' = z \cos \theta + \frac{y-x}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3}(1 - \cos \theta) \end{cases} .
 \end{aligned}$$

作业 8.5 (Ch5 T39)

求下列齐次线性方程组的基础解系与通解

$$(1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{5r_1 \rightarrow r_2 \\ r_1 \rightarrow r_3 \\ -3r_1 \rightarrow r_4}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2 \rightarrow r_3 \\ r_2 \rightarrow r_4}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见基础解系向量个数 $4 - 2 = 2$ ，即可取 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ 为基础解系，通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 。

作业 8.6 (Ch5 T40)

已知 $\mathbb{R}^5$ 中向量 $a_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^\top, a_2 = (1, 3, 2, 1, 2)^\top$ ，求找一个齐次线性方程组使得 a_1 与 a_2 为该方程组的基础解系。

解 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times 5}$ 为该方程组的系数矩阵，则有 $Ax = 0 \Leftrightarrow PAX = 0$ ，其中 P 为任意可逆方阵，则根据 Gauss 消元法可取 P 使得 PA 仅有前 $r = \text{rank}(A)$ 行非零，即可不妨设 A 为行满秩的，且 A 的行秩满足 $5 - r = 2$ ，即 $r = 3$ 。现考虑 $A(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2)^\top A^\top = 0$ ，此时 $A^\top$ 的列秩为 3，而根据方程 $(a_1, a_2)^\top x = 0$ 的基础解系中解向量个数为 $5 - 2 = 3$ ，从而可求解它的基础解系，得到三个线性无关的向量构成 $A^\top$ 的列向量。于是可取

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 这是一个满足条件的系数矩阵.}$$

作业 8.7 (Ch5 T44)

设 $F_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间。

1. 证明: $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}$ 构成 $F_n[x]$ 的一组基;
2. 求 S 到基 $T = \{1, x, \dots, x^n\}$ 的过渡矩阵;
3. 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in F_n[x]$ 在基 S 下的坐标.

解

1. 显然 $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$, 故仅需证明 S 线性无关。设 $P(x) = \sum_{i=0}^n c_i(x-i)^i = 0$, 则 $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n c_i \frac{i!}{(i-k)!} (x-1)^{i-k}$, 从而 $P^{(k)}(1) = c_k k! = 0 \Rightarrow c_k = 0, \forall k$, 故 S 线性无关。

2. 设过渡矩阵为 $P, Q = P^{-1} = (q_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$, 则有 q_{ij} 为 $(x-1)^{j-1}$ 的 $i-1$ 次项系数, 为 $\binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i}$, 其中 $1 \leq i, j \leq n+1$, 故 $Q = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(-1)^0 & \binom{1}{0}(-1)^1 & \binom{2}{0}(-1)^2 & \cdots & \binom{n}{0}(-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1}(-1)^0 & \binom{2}{1}(-1)^1 & \cdots & \binom{n}{1}(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(-1)^0 & \cdots & \binom{n}{2}(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n}(-1)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$

$$\text{对应 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 即求 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展开 $p(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x-1)^i$ 系数 $\{b_i\}$, 其有显式表达式 $b_i = \frac{p^{(i)}(1)}{i!} = \sum_{j=i}^n a_j \frac{j!}{(j-i)!i!} = \sum_{j=i}^n a_j \binom{j}{i}$, 其中 $0 \leq i \leq n$.

作业 8.8 (Ch5 T46)

给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体。证明: V 在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数。

解 只用证明 V 为 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 的子空间, 对 $\forall B, C \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有 $(\lambda B + \mu C)A = \lambda BA + \mu CA = \lambda AB + \mu AC = A(\lambda B + \mu C)$, 从而 $(\lambda B + \mu C) \in V$, 故 V 对矩阵的加法和数乘封闭, 其为 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 的子空间。对于基的求解, 下设 $B = (b_{ij})_{3 \times 3} \in V$, 有

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 4b_{11} - 2b_{21} + b_{31} & 4b_{12} - 2b_{22} + b_{32} & 4b_{13} - 2b_{23} + b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} + 4b_{13} & -2b_{13} & b_{11} + b_{13} \\ b_{22} + 4b_{23} & -2b_{23} & b_{21} + b_{23} \\ b_{32} + 4b_{33} & -2b_{33} & b_{31} + b_{33} \end{bmatrix}$$

这是一个有九个位置变量的线性方程组, 求解起来较困难, 下面介绍一个观点来直观的看出它的解空间维数:

1. 初始化: 假设 b_{12} 为最后得到解系中一个参数。
2. 根据 (2, 2) 处的方程, 可见 $\{b_{12}, b_{23}\}$ 可被 b_{12} 线性表示。
3. 寻找其他含 b_{12}, b_{23} 的方程, 发现没有可直接被它们线性表示的变量了, 看 (2, 1) 处方程考虑引入 b_{11} 为解系中第二个参数, 则有 $\{b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{22}\}$ 可被 b_{11}, b_{12} 线性表示。
4. 寻找其他含 $\{b_{11}, b_{12}, b_{23}, b_{22}\}$ 的方程, 发现没有可直接被它们线性表示的变量了, 看 (2, 3) 处方程考虑引入 b_{13} 为解系中第二个参数, 则有 $\{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}\}$ 可被 b_{11}, b_{12}, b_{13} 线性表示。
5. 寻找其他含 $\{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}\}$ 的方程, (1, 1) 处发现 b_{31} 可被它们线性表示, 从而也可被 b_{11}, b_{12}, b_{13} 线性表示。(1, 2) 处发现 b_{32} 可被线性表示, (1, 3) 处发现 b_{33} 可被线性表示。
6. 这说明方程的解最多只需要 b_{11}, b_{12}, b_{13} 作为参数就可表示出。

上述讨论发现这个方程组的基础解系最多只有三个向量, 从而 $\dim V \leq 3$, 显然有 $I, A, A^2 \in V$, 计算得到

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

从第二行可看出其线性无关的, 故 $\dim V = 3$, 且 I, A, A^2 构成它的一组基。

作业 8.9 (Ch5 T49)

证明: 有限维线性空间 V 的任何子空间 U 都有补空间 W 。

证明. 设 U 有一组基 $\{u_1, \dots, u_r\}$, 将其扩充为 V 的一组基 $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$, 以下证明 $W = \mathbb{F}\langle w_1, \dots, w_s \rangle$ 即为所求补空间。 $\forall x \in V$, 有唯一表示 $x = \sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{j=1}^s b_j w_j$, 其中 $a_i, b_j \in \mathbb{F}$, 令 $u = \sum_{i=1}^r a_i u_i \in U, w = \sum_{j=1}^s b_j w_j \in W$, 则 $x = u + w \in U + W$, 从而 $V = U + W$ 。取 $x \in U \cap W$, 则 $x = \sum_{i=1}^r a_i u_i = \sum_{j=1}^s b_j w_j$, 移项得 $\sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{j=1}^s (-b_j) w_j = 0$, 由于 $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ 线性无关, 故 $a_i = 0, b_j = 0, \forall i, j$, 从而 $x = 0$, 即 $U \cap W = \{0\}$, 故 $V = U \oplus W$, 即 W 为 U 的补空间。 $\square$

作业 8.10 (Ch5 T50)

令 $F_n[x]$ 是数域 F 上次数不超过 n 的多项式全体按多项式的加法与数乘构成的线性空间, W_1 是 $F_n[x]$ 的偶多项式 (满足 $f(-x) = f(x)$) 全体, W_2 是 $F_n[x]$ 的奇多项式 (满足 $f(-x) = -f(x)$) 全体。证明: W_1, W_2 是 $F_n[x]$ 的子空间, 且 $F_n[x] = W_1 \oplus W_2$ 。

证明. 显然 W_1, W_2 对多项式的加法与数乘封闭, 故为 $F_n[x]$ 的子空间。 $\forall f(x) \in F_n[x]$, 有 $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, 其中 $\frac{f(x) + f(-x)}{2} \in W_1, \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in W_2$, 从而 $F_n[x] = W_1 + W_2$ 。取 $f(x) \in W_1 \cap W_2$, 则 $f(x) = f(-x) = -f(x)$, 从而 $f(x) = 0$, 即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 故 $F_n[x] = W_1 \oplus W_2$ 。 $\square$

第九章 第九次作业

作业 9.1 (Ch6 T1)

判断下面所定义的变换 $\mathcal{A}$, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

(1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathcal{A}(x, y)^T = (x + y, x^2)^T$;

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^T = (3x - 2y + z, 0, x + 2y)^T$;

(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^T = (x - y, z, x + 1)^T$ 。

解 容易判断 (1)(3) 不是线性变换, (2) 是线性变换。

作业 9.2 (Ch6 T3)

在平面直角坐标系中, 求关于直线 $l: x \sin \theta - y \cos \theta = 0$ 的对称变换。

解 直线 l 的方向向量为 $u = (\cos \theta, \sin \theta)^T$, 设向量 $v = (x, y)^T$ 关于直线 l 的对称向量为 v' , 在 l 上的投影为 p , 则 $|p| = v \cdot u = x \cos \theta + y \sin \theta$, $p = |p|u = (x \cos^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta, x \cos \theta \sin \theta + y \sin^2 \theta)^T$, 由于 v' 关于 l 对称, 因此 v' 可表示为 $v' = 2p - v = (2x \cos^2 \theta + 2y \cos \theta \sin \theta - x, 2x \cos \theta \sin \theta + 2y \sin^2 \theta - y)^T = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta)^T$, 因此关于直线 l 的对称变换矩阵为 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 。

作业 9.3 (Ch6 T5)

证明: $\mathbb{R}^2$ 上可逆线性变换可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。

证明. 考虑单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 在线性变换 $\mathcal{A}$ 下的像, 设 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示是 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, $\mathcal{A}^{-1}$ 的矩阵表示是 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 设单位圆上点 $(x, y)^T$ 的像是 $(u, v)^T$, 则 $(x, y)^T = A^{-1}(u, v)^T = (au + bv, cu + dv)^T$, 此时 $(au + bv)^2 + (cu + dv)^2 = 1$, 即 $(a^2 + c^2)u^2 + 2(ab + cd)uv + (b^2 + d^2)v^2 = 1$, 由于 $\mathcal{A}$ 可逆, 这个二次曲线可能是椭圆、双曲线。但由于单位圆是有界的, 而双曲线是无界的, 因此这个二次曲线只能是椭圆。设椭圆的长轴的原像是 $v_1 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)^T$, $v_2 = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0)^T$ 与 v_1 垂直。设 $v(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $f(\theta) = \|\mathcal{A}(v(\theta))\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \right\|^2 = (p \cos \theta + q \sin \theta)^2 + (r \cos \theta + s \sin \theta)^2 = (p^2 + r^2) \cos^2 \theta + 2(pq + rs) \cos \theta \sin \theta + (q^2 + s^2) \sin^2 \theta$, 则由 θ_0 是 $f(\theta)$ 极值点, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{d\theta}(\theta_0) = 2(-p^2 - r^2 + q^2 + s^2) \cos \theta_0 \sin \theta_0 + 2(pq + rs)(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \\ &= 2 \begin{bmatrix} p \cos \theta_0 + q \sin \theta_0 & r \cos \theta_0 + s \sin \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \sin \theta_0 + q \cos \theta_0 \\ -r \sin \theta_0 + s \cos \theta_0 \end{bmatrix} = 2\mathcal{A}(v_1)^T \mathcal{A}(v_2) \end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}(v_1) \perp \mathcal{A}(v_2)$, 即 $\mathcal{A}$ 将一组正交基 v_1, v_2 映射为另一组正交基 $\mathcal{A}(v_1), \mathcal{A}(v_2)$ 。现在把 $\mathcal{A}$ 拆分为三个变换的复合: 首先将 x, y 轴方向旋转到 v_1, v_2 方向, 其次在 v_1, v_2 方向上进行伸缩, 最后将 v_1, v_2 方向旋转回合适的方向。其中第二步的伸缩变换可能包含反射变换, 因此 $\mathcal{A}$ 可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。 $\square$

作业 9.4 (Ch6 T6)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于平面 $x + 2y + 3z = 0$ 的对称变换。

解 考虑对于一般情形的平面 $ax + by + cz = 0$, 其法向量为 $n = (a, b, c)^T$, 假设 $|n| = 1$, 将向量 $v = (x, y, z)^T$ 分解为

平行于 n 和垂直于 n 的两个分量 $v_{\parallel}$ 与 $v_{\perp}$, 则 $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, 其中 $v_{\parallel} = (v \cdot n)n$, $v_{\perp} = v - v_{\parallel}$, 则关于平面 $ax + by + cz = 0$ 的对称向量为 $v' = v_{\perp} - v_{\parallel} = v - 2(v \cdot n)n = v - 2nn^T v = (I - 2nn^T)v$, 因此关于平面 $ax + by + cz = 0$ 的对称变换矩阵为 $I - 2nn^T$, 对于平面 $x + 2y + 3z = 0$, 其单位法向量为 $n = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T$, 因此关于平面 $x + 2y + 3z = 0$ 的

对称变换矩阵为 $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ 。

作业 9.5 (Ch6 T7)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于直线 $z = 2y = 3x$ 的对称变换。



解 考虑对于一般情形的直线 l , 其方向向量为 e , 假设 $|e| = 1$, 将向量 $v = (x, y, z)^T$ 分解为平行于 e 和垂直于 e 的两个分量 $v_{\parallel}$ 与 $v_{\perp}$, 则 $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, 其中 $v_{\parallel} = (v \cdot e)e$, $v_{\perp} = v - v_{\parallel}$, 则关于直线 l 的对称向量为 $v' = v_{\parallel} - v_{\perp} = 2v_{\parallel} - v = 2(v \cdot e)e - v = 2ee^T v - v = (2ee^T - I)v$, 因此关于直线 l 的对称变换矩阵为 $2ee^T - I$, 对于直线 $z = 2y = 3x$, 其单位方向向量为 $e = \frac{1}{7}(2, 3, 6)^T$, 因此关于直线 $z = 2y = 3x$ 的对称变换矩阵为

$$\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & 24 \\ 12 & -31 & 36 \\ 24 & 36 & 23 \end{bmatrix}。$$

作业 9.6 (Ch6 T8)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求绕单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ 逆时针旋转 30° 的旋转变换。



解 在作业 8.4 已求出旋转矩阵 $\begin{bmatrix} \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_x^2 & (1 - \cos \theta)e_x e_y - e_z \sin \theta & (1 - \cos \theta)e_x e_z + e_y \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)e_y e_x + e_z \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_y^2 & (1 - \cos \theta)e_y e_z - e_x \sin \theta \\ (1 - \cos \theta)e_z e_x - e_y \sin \theta & (1 - \cos \theta)e_z e_y + e_x \sin \theta & \cos \theta + (1 - \cos \theta)e_z^2 \end{bmatrix}$, 代

入 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ 与 $\theta = 30^\circ$ 可得旋转矩阵为 $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & -1 & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 。

第十章 第十次作业

作业 10.1 (Ch6 T11)

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (2x + y - z, x + 2y + z, 4x + 5y + z)^\top$, 求 $\mathcal{A}$ 的像空间与核空间的维数及其一组基。

解 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^\top, e_2 = (0, 1, 0)^\top, e_3 = (0, 0, 1)^\top$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 考虑 $Ae_1 = (2, 1, 4)^\top, Ae_2 = (1, 2, 5)^\top, Ae_3 = (-1, 1, 1)^\top$, 由 $\text{rank}(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = 2$, 故 $\dim \text{Im } \mathcal{A} = 2$, 且 $\{(2, 1, 4)^\top, (1, 2, 5)^\top\}$ 是 $\text{Im } \mathcal{A}$ 的一组基。 $Ax = 0$ 的基解是 $x = t(-1, 1, -1)^\top, t \neq 0$, 故 $\dim \ker \mathcal{A} = 1$, 且 $\{(-1, 1, -1)^\top\}$ 是 $\ker \mathcal{A}$ 的一组基。

作业 10.2 (Ch6 T13)

求下列矩阵的全部特征值和全部特征向量:

$$(2) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4) B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad (6) C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解 (2) $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$

$\Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$, 即特征值为 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 。

对 $\lambda_1 = e^{i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = e^{i\theta}, x_1 = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0, \lambda_2 = e^{-i\theta}, x_2 = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

(4) $p_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^3, \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 即特征值为 2 (三重)。

解方程组 $(2I - B)x = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时

为 0。

(6) $p_C(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 2)$,

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \sqrt{2}, \lambda_4 = -\sqrt{2}$, 即特征值为 2 (二重), $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解方程组 $(2I - C)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 故特征向量为

$$t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \text{ 不同时为 } 0.$$

对 $\lambda_3 = \sqrt{2}$, 解方程组 $(\sqrt{2}I - C)x = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$, 故特征向

量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \neq 0.$

对 $\lambda_4 = -\sqrt{2}$, 解方程组 $(-\sqrt{2}I - C)x = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -\sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -\sqrt{2}-1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$, 故

特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \neq 0.$

作业 10.3 (Ch6 T14)

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathcal{A}(x, y) = (3x + 2y, 2x + y)^\top$ 将单位圆 C 映射为椭圆 C' , 求椭圆 C' 的长短半轴方向与长度, 以及椭圆的面积。

解 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0)^\top, e_2 = (0, 1)^\top$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$, 对应特征向量为 $x_1 = t_1 \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^\top, x_2 = t_2 \left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^\top, t_1, t_2 \neq 0$, 故长轴长度为 $2|\lambda_1| = 4 + 2\sqrt{5}$, 方向为 x_1 方向; 短轴长度为 $2|\lambda_2| = 2\sqrt{5} - 4$, 方向为 x_2 方向; 椭圆面积为 $\pi r^2 \cdot |\det A| = \pi$ 。

 **笔记** 行列式缩放的是有向面积, 因此面积缩放倍率是 $|\det A|$ 而不是 $\det A$ 。

作业 10.4 (Ch6 T15)

设 A 是可逆方阵, 证明: 若 λ 是 A 的特征值, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且对应的特征向量相同。

证明. 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 两边同乘以 A^{-1} , 得 $x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$. 故 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且对应的特征向量为 x . □

作业 10.5 (Ch6 T16)

设 A 为方阵, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: 如果 λ_0 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值; 且如果 x 是属于 λ_0 的特征向量, 则 x 也是矩阵 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

证明. 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 对 A 的特征值 λ_0 , 其特征向量为 x , 则有 $Ax = \lambda_0 x \Rightarrow A^m x = A^{m-1} \lambda_0 x = \cdots = \lambda_0^m x$. 此时 $f(A)x = \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i \right) x = \sum_{i=0}^n a_i A^i x = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i x = \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i \right) x = f(\lambda_0)x$, 即 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。□

作业 10.6 (Ch6 T17)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $3A + 2I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 故 $3A + 2I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 5, \tilde{\lambda}_3 = 8, \det(3A + 2I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 200$ 。

作业 10.7 (Ch6 T18)

- (1) 若 $A^2 = I$, 证明: A 的特征值只能是 ± 1 ;
 (2) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T = -A$, 证明 A 的特征值为零或纯虚数。

证明. (1) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $0 = (A^2 - I)x = A^2 x - x = (\lambda^2 - 1)x = 0$, 由 $x \neq 0$ 即有 $\lambda = \pm 1$ 。

(2) 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 取共轭转置, $\bar{\lambda}x^H = x^H A^T = -x^H A \Rightarrow \bar{\lambda}x^H x = -x^H A^T x = -x^H \lambda x \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})x^H x = 0$. 又由 $x \neq 0$ 有 $x^H x = |x|^2 \neq 0$, 故 $\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$, 即 λ 是零或纯虚数。□

作业 10.8 (Ch6 T19)

设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明: $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量。

证明. 若 $x_1 + x_2$ 是 A 的特征向量, 则存在特征值 λ , 使得 $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$. 又由 $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$ 可得 $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. 故 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0$. 由于 x_1, x_2 线性无关, 故 $\lambda_1 - \lambda = 0, \lambda_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, 与 λ_1, λ_2 不同矛盾. 因此 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量。□

作业 10.9 (Ch6 T20)

设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 证明: $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$ 。

证明. 显然 A^2 的全部特征值为 $\lambda_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, 故 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$ 。□

作业 10.10 (Ch6 T21)

判断以下矩阵 A, B 是否相似? 请说明理由。

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

解 由于 $(A - I)^2 \neq O$, $(B - I)^2 = O$, 故 A, B 不相似。

作业 10.11 (Ch6 T24)

设 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 证明: $\text{diag}(A, C)$ 与 $\text{diag}(B, D)$ 相似。反之是否成立?

解 设 P, Q 分别为可逆矩阵, 使得 $B = PAP^{-1}$, $D = QCQ^{-1}$, 则有 $\text{diag}(B, D) = \text{diag}(P, Q) \text{diag}(A, C) \text{diag}(P^{-1}, Q^{-1})$, 故 $\text{diag}(A, C)$ 与 $\text{diag}(B, D)$ 相似。

反之不成立, 例如 $A = [1], B = [2], C = [2], D = [1]$, 则 $\text{diag}(A, C) \sim \text{diag}(B, D)$, 但 $A \not\sim B, C \not\sim D$ 。

第十一章 第十一次作业

作业 11.1 (Ch6 T42)

设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是线性变换, 若存在 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0, \mathcal{A}^n\alpha = 0$, 证明: 存在 V

的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 。

证明. 由于 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0, \mathcal{A}^n\alpha = 0$, 有 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关, 故可作为 V 的一组基, 将其反序后 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $J_n(0)$ 。□

作业 11.2 (Ch6 T45)

设 $V = \mathbb{F}^{n \times n}$ 。

1. 证明: V 的变换 $\mathcal{A}: x \rightarrow x^\top$ 为线性变换;
2. 求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量, 并问: $\mathcal{A}$ 是否可对角化?

解

1. $\forall x, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y)^\top = \lambda x^\top + \mu y^\top = \lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y)$, 故 $\mathcal{A}$ 为线性变换;
2. 注意到 $x = (x^\top)^\top = \mathcal{A}^2(x)$, 有 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$, 故 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = \pm 1$ 。当 $\lambda = 1$ 时, $\mathcal{A}x = x$, 即 $x = x^\top$, 故对应的特征向量为对称矩阵; 当 $\lambda = -1$ 时, $\mathcal{A}x = -x$, 即 $x = -x^\top$, 故对应的特征向量为反对称矩阵。由于对称矩阵和反对称矩阵的维数分别为 $n(n+1)/2$ 和 $n(n-1)/2$, 两者之和为 n^2 , 等于 V 的维数, 故 $\mathcal{A}$ 可对角化。

 **笔记** 也可以根据 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ 没有重根直接得出 $\mathcal{A}$ 可对角化。

作业 11.3 (Ch6 T46)

求下列矩阵的 Jordan 标准形:

$$(3)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^4 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, 计算得到 $(A - I)^3 = 8E_{14} \Rightarrow \text{rank}(A - I)^3 = 1$, 故 A

的 Jordan 标准形为 $J_4(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

作业 11.4 (Ch6 T47)

求 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形的过渡矩阵。

解 $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 又 $\text{rank}(I - A) = 2$, 有 A 的 Jordan 标准形为 $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。考虑 $(A - I)x_{11} = 0$ 有非零解 $x_{11} = (1, 5, 3)^\top$, 且 $(A - I)x_{12} = x_{11}$ 有解 $x_{12} = (1, 3, 2)^\top$,

$(2I - A)x_2 = 0$ 有非零解 $x_2 = (4, 15, 10)^\top$, 故 A 的 Jordan 标准形的过渡矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 。

笔记 一般通过以下方法求一个矩阵的 Jordan 标准形的过渡矩阵:

1. 求出矩阵的特征值, 进而得到其 Jordan 标准形 $J = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_k}(\lambda_k))$;
2. 对每个 Jordan 块 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 构造 Jordan 链: 首先求解 $(\lambda_i I - A)x_{i1} = 0$ 得到第一个特征向量 x_{i1} , 然后依次求解 $(\lambda_i I - A)x_{ij} = x_{i,j-1}$ 得到后续的广义特征向量 x_{ij} , 直到得到 n_i 个向量;
3. 如果上式中某个方程组无解, 则说明需要调整第一个特征向量的选择, 重新选择后继续上述过程, 直到为每个 Jordan 块构造出完整的 Jordan 链;
4. 将所有 Jordan 链中的向量按顺序排列, 组成矩阵 P , 则 P 即为所求的过渡矩阵。

若多个 Jordan 块对应同一特征值, 则按照 Jordan 块的大小顺序降序排列依次构造 Jordan 链, 以一个矩阵 A 具有一个 $J_3(a)$ 与两个 $J_2(a)$ 为例, 记 $N = A - aI$, 以下是计算方法:

1. 取 $x_{13} \in \ker(N^3) \setminus \ker(N^2)$, 此时有一个 Jordan 链 $x_{13}, Nx_{13} := x_{12}, N^2x_{13} := x_{11}$, 也即求出了最大的 Jordan 块 $J_3(a)$ 对应的三个向量;
2. 取 $x_{22}, x_{32} \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)$, 且满足 x_{22}, x_{32} 与 x_{11} 线性无关, 此时有两个 Jordan 链 $x_{22}, Nx_{22} := x_{21}$ 与 $x_{32}, Nx_{32} := x_{31}$, 也即求出了两个 $J_2(a)$ 对应的四个向量;
3. 以上七个向量线性无关, 可以与其他向量一起组成矩阵 P 。

作业 11.5 (Ch7 T1)

已知 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, 3, 1, -1), \alpha_3 = (-1, -1, -2, 2)$ 。求:

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的长度和彼此间的夹角。
2. 与它们都正交的向量。

解

1. $\|\alpha_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{7}, \|\alpha_2\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}, \|\alpha_3\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{10}, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 6, \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = -9, \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = 1, \theta_{1,2} = \arccos \frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_1\| \|\alpha_2\|} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{35}, \theta_{2,3} = \arccos \frac{\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle}{\|\alpha_2\| \|\alpha_3\|} = \arccos \frac{-3\sqrt{6}}{10}, \theta_{3,1} = \arccos \frac{\langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_3\| \|\alpha_1\|} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}。$

2. 设 (x_1, x_2, x_3, x_4) 与它们都正交, 则 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$, 解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}。$

作业 11.6 (Ch7 T3)

设 x, y 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量, 它们之间的夹角为 θ , 证明:

1. (余弦定理) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$;
2. (平行四边形定理) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;
3. (菱形对角线定理) 若 $\|x\| = \|y\|$, 则 $(x + y) \perp (x - y)$ 。

证明. 1. $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$;

2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;

3. 若 $\|x\| = \|y\|$, 则 $\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0$, 即 $(x + y) \perp (x - y)$ 。

□

作业 11.7 (Ch7 T4)

设 $a_1, \dots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基, $a \in \mathbb{R}^n$, 证明: $a = 0$ 当且仅当 $\langle a, a_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ 。

证明. 充分性显然成立, 必要性: 设 $a = \sum_{i=1}^n k_i a_i$, 则 $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \langle a, \sum_{i=1}^n k_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^n k_i \langle a, a_i \rangle = 0$, 故 $a = 0$ 。 □

作业 11.8 (Ch7 T9)

若 b 与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都正交, 证明: b 与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的任意线性组合都正交。

证明. 设 $c = \sum_{i=1}^n k_i a_i$, 则 $\langle b, c \rangle = \langle b, \sum_{i=1}^n k_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^n k_i \langle b, a_i \rangle = 0$, 故 b 与 c 正交。

□

作业 11.9 (Ch7 T11)

设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, $x_1, x_2, \dots, x_k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意 k 个向量, 证明: $x_1, x_2, \dots, x_k$ 两两正交的充分必要条件是 $\sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle = 0, \forall i \neq j$ 。

证明. 由 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 有 $x_i = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \forall i = 1, 2, \dots, k$, 因此两两正交等价于

$$0 = \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \sum_{t=1}^n \langle x_j, e_t \rangle e_t \right\rangle = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle, \forall i \neq j.$$

□

作业 11.10

证明: 在内积 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ 下, 函数集 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ 是 $C[-\pi, \pi]$ 的一个正交集。

证明. $\langle 1, \cos kx \rangle = \langle 1, \sin kx \rangle = 0$ 是显然的, 故只需证明 $\forall m \neq n, \langle \cos mx, \cos nx \rangle = \langle \sin mx, \sin nx \rangle = 0$ 以及 $\forall p, q, \langle \cos px, \sin qx \rangle = 0$ 。

$$1. \langle \cos mx, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = 0;$$

$$2. \langle \sin mx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx = 0;$$

$$3. \langle \cos px, \sin qx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin qx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(p+q)x + \sin(p-q)x] dx = 0.$$

因此函数集 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ 是 $C[-\pi, \pi]$ 的一个正交集。

□

第十二章 第十二次作业

作业 12.1 (Ch7 T12)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。证明:

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle$ 。
2. $\forall a \in \mathbb{R}^n, \|a\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2$ 。

证明. 根据等式 $a = \sum_{s=1}^n \langle a, a_s \rangle a_s$, 利用内积的线性性直接计算即可。

1. $\langle a, b \rangle = \langle \sum_{s=1}^n \langle a, a_s \rangle a_s, b \rangle = \sum_{s=1}^n \langle a, a_s \rangle \langle a_s, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle$;
2. $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \langle \sum_{s=1}^n \langle a, a_s \rangle a_s, a \rangle = \sum_{s=1}^n \langle a, a_s \rangle \langle a_s, a \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2$ 。

□

作业 12.2 (Ch7 T13)

证明二阶正交矩阵必取下面两种形式之一:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

证明. 正交阵的行向量为相互正交的单位向量, 因此第一行的向量必定有形式 $(\cos \theta, \sin \theta)$, $-\pi \leq \theta < \pi$ 。求解线性方程组 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$, 可得 $(x_1, x_2) = t(\sin \theta, -\cos \theta)$ 为和它正交的向量, 因此它们构成了一个正交基, 且当 $t = \pm 1$ 时它们是标准正交基, 分别作为行向量构成的矩阵对应了题中的两种形式。

□

作业 12.3 (Ch7 T14)

写出所有的三阶正交阵, 它的元素为 0 或 1。

解 设正交阵行向量组为 e_1, e_2, e_3 , 则

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^\top & e_2^\top & e_3^\top \end{bmatrix} = I,$$

而根据每个向量的元素都为 0 或 1, 它们满足自身和自身内积为它们所含 1 的个数, 因此它们都是单位向量, 且需要 $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ 。故全部所求的矩阵即由单位向量排列构成。它们分别是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 12.4 (Ch7 T16)

若 a 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量, 证明: 矩阵 $Q = I - 2aa^\top$ 是正交矩阵, 当 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top$ 时, 具体求出 Q 。

解 $QQ^\top = (I - 2aa^\top)(I - 2aa^\top)^\top = (I - 2aa^\top)(I - 2aa^\top) = I - 4aa^\top + 4a(a^\top a)a^\top = I$, 其中用到了 $\|a\|^2 = a^\top a = 1$ 。

因此 Q 是正交矩阵。当 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top$ 时, $Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

作业 12.5 (Ch7 T18)

设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 证明:

1. A 的伴随矩阵 A^* 也是正交矩阵;
2. AB 也是正交矩阵;
3. A^{-1} 也是正交矩阵;
4. A 的行列式为 1 或 -1 。

证明. 1. $AA^T = I$, 两边取伴随矩阵得 $A^{*\top}A^* = I$, 因此 A^* 也是正交矩阵;
 2. $(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AIA^T = AA^T = I$, 因此 AB 也是正交矩阵;
 3. 由 $AA^T = I$ 可知 $A^T = A^{-1}$, 因此 A^{-1} 也是正交矩阵;
 4. 由 $\det(AA^T) = \det(I)$ 可知 $\det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2 = 1$, 故 $\det(A) = \pm 1$.

□

作业 12.6 (Ch7 T19)

给定三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求它的 QR 分解。

解 先用 Gram-Schmidt 正交化将 A 的列向量化为标准正交向量组:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{35} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

从而可写出 A 的 QR 分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{21}{\sqrt{105}} & \frac{6}{\sqrt{105}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

作业 12.7 (Ch7 T20)

设 $W = \text{span}((1, 1, 0), (1, -2, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$,

1. 求 W 的一组标准正交基;
2. 求 $W^\perp$ 的标准正交基;
3. 求 $v = (0, 0, 2)$ 在 W 上的正交投影。

解

1. 令 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, -2, 1)$ 。对它们进行 Gram-Schmidt 正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0), \quad e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (1, -2, 1) - \frac{-1}{2}(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(3, -3, 2), \quad e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3, -3, 2).$$

故 W 的一组标准正交基为 e_1, e_2 。

2. $W^\perp$ 中的向量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 满足 $\langle x, \alpha_1 \rangle = 0$ 且 $\langle x, \alpha_2 \rangle = 0$ 。即
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
。解得基础解系 $\xi =$

$(-1, 1, 3)$ 。将其单位化即得 $W^\perp$ 的标准正交基 $e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1, 1, 3)$ 。

3. v 在 W 上的正交投影为 $P_W(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 = 0 \cdot e_1 + \frac{4}{\sqrt{22}} e_2 = \frac{2}{11}(3, -3, 2)$ 。

作业 12.8 (Ch7 T21)

在三维直角坐标系中, 已知点 A, B, C, D 的坐标分别为 $(1, 1, 0), (3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 2, 4)$, 求四面体的顶点 A 到底面 BCD 的距离。

解 设 BCD 所在平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$, 则由点 B, C, D 的坐标可得方程组
$$\begin{cases} 3a + b + 2c + d = 0 \\ b + 3c + d = 0 \\ 2a + 2b + 4c + d = 0 \end{cases}$$
, 解得 $(a, b, c, d) = (1, -5, 3, -4)t$ 。故平面方程为 $x - 5y + 3z - 4 = 0$ 。点 $A(1, 1, 0)$ 到该平面的距离为 $d_{A \rightarrow BCD} = \frac{|1 - 5 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{35}} = \frac{8\sqrt{35}}{35}$ 。

 **笔记** 以下是另一种方法。

令 $a = \overrightarrow{BA} = (-2, 0, -2)$, $b = \overrightarrow{BC} = (-3, 0, 1)$, $c = \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 2)$ 。底面面积为 $S = \frac{1}{2} \|b \times c\| = \frac{\sqrt{35}}{2}$, 四面体体积为 $V = \frac{1}{6} |a \cdot (b \times c)| = \frac{4}{3}$ 。故所求距离为 $h = \frac{3V}{S} = \frac{4}{\sqrt{35}/2} = \frac{8\sqrt{35}}{35}$ 。

作业 12.9 (Ch7 T24)

设 a 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量, 定义线性变换: $\mathcal{A}(b) = b - 2\langle a, b \rangle a$ 。证明: $\mathcal{A}$ 为正交变换, 并找 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵。

解 $\|\mathcal{A}(x)\|^2 = \langle \mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x) \rangle = \langle x - 2\langle a, x \rangle a, x - 2\langle a, x \rangle a \rangle = \langle x, x \rangle - 4\langle a, x \rangle \langle a, x \rangle + 4\langle a, x \rangle^2 \langle a, a \rangle^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$, 因此 $\mathcal{A}$ 保模长, 是正交变换。

任取一组包含 $\pm a$ 的标准正交基即使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵。

作业 12.10

计算 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ 的特征子空间。

解 与作业10.2类似, 特征值为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$ 。对应的特征子空间分别为 $V_1 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^\top \right)$ 和 $V_{-1} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^\top \right)$ 。

作业 12.11

计算正交矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的实相似标准形。



解 $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 1$, 对应 $\lambda = 1, \omega_3, \omega_3^2$, 旋转块的旋转角度为 120° 。因此相似标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。

第十三章 第十三次作业

作业 13.1 (Ch7 T28)

求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

◆

解 (2) $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$, 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ 。

属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $x_1 = (-1, 1, 0)^\top, x_2 = (-1, 0, 1)^\top$, 经 Gram-Schmidt 正交化并单位化后得到 $e_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, e_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^\top$ 。

属于特征值 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量为 $x_3 = (1, 1, 1)^\top$, 单位化后得到 $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top$ 。

因此, 所求正交矩阵为 $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 。

(4) $p_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, 特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ 。

属于特征值 $\lambda_1 = 5$ 的特征向量为 $x_1 = (2, -2, 1)^\top$, 单位化后得到 $e_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top$ 。

属于特征值 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量为 $x_2 = (2, 1, -2)^\top$, 单位化后得到 $e_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)^\top$ 。

属于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $x_3 = (1, 2, 2)^\top$, 单位化后得到 $e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^\top$ 。

因此, 所求正交矩阵为 $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

作业 13.2 (Ch7 T29)

设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$ 。证明: A 可正交相似对角化为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $r = \text{rank}(A)$ 。

◆

证明. 由 $A^2 = A$ 可知 $A(A - I) = 0$, 故 A 的特征值只能为 0 或 1, 且 $r = \text{rank}(A)$ 即为特征值 1 的重数。由实对称矩阵正交相似对角化可知, A 可正交相似对角化为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。□

作业 13.3 (Ch7 T30)

设 A 是 n 阶实对称矩阵, $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A 的最大特征值。证明: $\lambda_{\max}(A) = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^\top Ax}{x^\top x}$ 。

◆

证明. 设 A 的特征值为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}(A)$, 对应的单位正交特征向量组为 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 。则任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ 可表示为 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, 其中 $\alpha_i = e_i^\top x$, 则 $x^\top x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$, 且 $x^\top Ax = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right)^\top A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq$

$\lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_{\max}(A) x^\top x$, 因此 $\frac{x^\top A x}{x^\top x} \leq \lambda_{\max}(A)$, 即 $\sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^\top A x}{x^\top x} \leq \lambda_{\max}(A)$ 。再证明上界可以取到: 取 $x = e_n$, 则 $\frac{e_n^\top A e_n}{e_n^\top e_n} = \lambda_{\max}(A)$, 故 $\sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^\top A x}{x^\top x} = \lambda_{\max}(A)$ 。 $\square$

作业 13.4 (Ch7 T31)

设 V 是 n 阶实方阵全体构成的线性空间。对 $A, B \in V$, 定义 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\top)$

1. 证明: $\langle A, B \rangle$ 构成内积, 从而 V 在该内积下成为欧氏空间。
2. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$, 求 A 的模长。
3. 基本矩阵 E_{ij} 是否构成 V 的一组标准正交基? 请说明理由。

证明. 1. 对称性: $\forall A, B \in V$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\top) = \text{tr}(AB^\top)^\top = \text{tr}(BA^\top) = \langle B, A \rangle$ 。

正定性: $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$, $\langle A, A \rangle = \text{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$, 取等当且仅当 a_{ij} 全为 0, 即 $A = 0$ 。

线性性: $\forall A, B, C \in V$, $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}((\lambda A + \mu B)C^\top) = \lambda \text{tr}(AC^\top) + \mu \text{tr}(BC^\top) = \text{tr}(BA^\top) = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$

$$2. \|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

3. 显然有 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 线性无关, 且 $\dim V = n^2 = \#\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, 故 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 是 V 的一组基。计算得到 $\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \text{tr}(E_{ij}E_{kl}^\top) = \text{tr}(E_{ij}E_{lk}) = \delta_{ik} \text{tr}(E_{jl}) = \delta_{ik} \delta_{jl}$, 故 $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ 是标准正交基。

$\square$

作业 13.5 (Ch7 T33)

设 $\mathbb{R}_n[x]$ 是所有次数不超过 n 的实系数多项式构成的线性空间, 内积为 $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ 。令

$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$, 证明: $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的正交基。称 $P_n(x)$ 为 Legendre 多项式。

证明. $P_n(x)$ 是一个 $2n$ 次多项式 $f_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ 的 n 阶导数, 其次数为 n , 故 $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ 线性无关, 构成 $\mathbb{R}_n[x]$ 的基。显然 $\forall 0 \leq k < n, f_n^{(k)}(1) = f_n^{(k)}(-1) = 0$ 。以下证明 $P_n(x)$ 与任意次数小于 n 的多项式 $Q(x)$ 正交, 记 $C_n = \frac{1}{2^n n!}$:

$$\begin{aligned} C_n \langle P_n(x), Q(x) \rangle &= \int_{-1}^1 f_n^{(n)}(x) Q(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) df_n^{(n-1)}(x) = f_n^{(n-1)}(x) Q(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f_n^{(n-1)}(x) Q^{(1)}(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 f_n^{(n-1)}(x) Q^{(1)}(x) dx = - \int_{-1}^1 Q^{(1)}(x) df_n^{(n-2)}(x) = - f_n^{(n-2)}(x) Q(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 f_n^{(n-2)}(x) Q^{(2)}(x) dx \\ &= \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 f_n(x) Q^{(n)}(x) dx = 0 \end{aligned}$$

故 $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的正交基。 $\square$

作业 13.6

证明: $\forall A \succ 0$, 存在唯一 $B \succ 0$, 使得 $B^2 = A$ 。

证明. 由 $A \succ 0$ 可知 A 是实对称矩阵, 故存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ 。令 $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, 则 $B = PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ 满足 $B^2 = A$ 且 $B \succ 0$ 。

若存在另一矩阵 $C \succ 0$, 使得 $C^2 = A$, 则 $CA = A^2 = AC$, 故 C 与 A 可同时正交相似对角化, 即具有相同的特征向量。设 v 是 A 的一个特征向量, $Av = \lambda v$, 则 $\exists \mu$ 使得 $Cv = \mu v$, 且 $\mu > 0$ 。由 $C^2v = Av$ 可知 $\mu = \sqrt{\lambda}$, 因此 C 的每个特征值均与 B 相同, 且具有相同的特征向量, 故 $C = B$ 。综上所述, 所求矩阵 B 存在且唯一。 $\square$

作业 13.7

对有限维内积空间 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上任意一个线性映射 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 证明存在唯一的线性映射 $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $\langle \mathcal{A}(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \mathcal{A}^*(\beta) \rangle$, 且 $\mathcal{A}^*$ 在任意标准正交基下的矩阵为 A^H , 其中 A 为 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵。

◆

证明. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在该组基下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中由 $\mathcal{A}(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ 可知 $a_{ij} = \langle \mathcal{A}(e_j), e_i \rangle$. 现定义线性映射 $\mathcal{B}$ 满足其在该组基下的矩阵为 A^H , 即 $\mathcal{B}(e_j) = \sum_{i=1}^n \overline{a_{ji}} e_i$. 则 $\mathcal{B}$ 唯一存在, $\forall \alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j e_j, \beta = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, 则 $\langle \mathcal{A}(\alpha), \beta \rangle = \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}(e_j), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_i} a_{ij}$, 同理 $\langle \alpha, \mathcal{B}(\beta) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \mathcal{B} \left(\sum_{i=1}^n y_i e_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{i=1}^n y_i \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}} e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_i} \overline{\overline{a_{ji}}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_i} a_{ij}$, 因此 $\langle \mathcal{A}(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \mathcal{B}(\beta) \rangle$. 由于等式对任意的 $\alpha, \beta \in V$ 均成立, 且线性映射由其在一组基下的矩阵唯一确定, 故 $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$ 唯一存在, 且其在该组基下的矩阵为 A^H . $\square$

作业 13.8 (Ch8 T1)

将下列二次型表示成矩阵形式:

$$(1) Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3;$$

$$(3) Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_1x_4 + 6x_2x_3 + 7x_2x_4 + 10x_3x_4.$$

◆

$$\text{解 } (1) Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$(3) Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

作业 13.9 (Ch8 T2)

写出下列对称矩阵对应的二次型:

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

◆

$$\text{解 } (3) Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$$

作业 13.10

1. 设 V 是有限维实内积空间, $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 是线性函数. 证明: 存在唯一的向量 $\beta \in V$, 使得 $\forall \alpha \in V$, 有 $f(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$.
2. 设 V 是有限维复内积空间, $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ 是线性函数. 此时 (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请举出反例.

◆

证明. 1. 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基, 则任意 $\alpha \in V$ 可表示为 $\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle e_i$. 定义 $\beta =$

$\sum_{i=1}^n f(e_i)e_i$, 则 $\forall \alpha \in V$, $f(\alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle f(e_i) = \left\langle \alpha, \sum_{i=1}^n f(e_i)e_i \right\rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ 。若存在另一向量 β' 使得 $\forall \alpha \in V$, $f(\alpha) = \langle \alpha, \beta' \rangle$, 则 $\forall \alpha \in V$, $\langle \alpha, \beta - \beta' \rangle = 0$, 取 $\alpha = \beta - \beta'$ 可知 $\beta - \beta' = 0$, 即 $\beta = \beta'$ 。综上所述, 所求向量 β 存在且唯一。

2. 结论仍然成立。将 β 定义改为 $\beta = \sum_{i=1}^n \overline{f(e_i)}e_i$ 即可。证明过程与 (1) 类似, 此处不再赘述。

□

第十四章 第十四次作业

作业 14.1 (Ch8 T5)

求正交变换化下列实二次型为标准形:

$$(3) Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 特征值和特征向量为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3, x_1 = a(1, 1, 1)^T, x_2 = b(-1, 0, 1)^T, x_3 = c(-1, 1, 0)^T$.

把 x_1 归一化, 对 x_2, x_3 进行 G-S 正交化, 得到 $e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, e_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^T$.

此时 $P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$ 即为所求, 对 $x = Py, \tilde{Q}(y) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$.

作业 14.2 (Ch8 T6)

证明: 在实数域上, 对称矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 不相合。

证明. 设存在可逆实矩阵 P , 使得 $P^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则有 $P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 记 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

要求 $b^2 + d^2 = -1$ 显然不可能成立, 故不存在这样的可逆矩阵 P , 两矩阵不相合。□

作业 14.3 (Ch8 T8)

设 A 是一个 n 阶方阵, 证明:

1. A 是反对称阵, 当且仅当对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T Ax = 0$;
2. 若 A 是对称阵, 且对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T Ax = 0$, 则 $A = O$ 。

证明. 1. 充分性: A 反对称, 则 $A^T = -A$, 则 $x^T Ax = (x^T Ax)^T = x^T A^T x = x^T (-A)x = -x^T Ax$, 故 $x^T Ax = 0$.
必要性: 对任意 i, j , 取 $x = e_i + e_j$, 则有 $(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) = 0$, 即 $a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji} = 0$, 又取 $x = e_i - e_j$, 则有 $(e_i - e_j)^T A(e_i - e_j) = 0$, 即 $a_{ii} + a_{jj} - a_{ij} - a_{ji} = 0$, 联立可得 $a_{ij} + a_{ji} = 0$, 故 A 反对称。
2. 取 $x = e_i$, 则有 $e_i^T A e_i = a_{ii} = 0$, 再取 $x = e_i + e_j$, 则有 $(e_i + e_j)^T A(e_i + e_j) = 0$, 即 $a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji} = 0$, 联立可得 $a_{ij} + a_{ji} = 0$, 由于 A 对称, 故 $a_{ij} = a_{ji}$, 故 $a_{ij} = 0$, 综上所述, $A = O$ 。□

作业 14.4 (Ch8 T14)

判断下列二次型是否正定

$$(2) Q(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$$

$$(4) Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + x_1x_3.$$

解 (2) 对应矩阵为 $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, 顺序主子式为 $-5, 26, -80$, 故不为正定矩阵。

(4) 对应矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 5 & -3 \\ \frac{1}{2} & -3 & 9 \end{bmatrix}$, 顺序主子式为 $1, 1, -\frac{29}{4}$, 故不为正定矩阵。

作业 14.5 (Ch8 T15)

判断下列矩阵是否是正定矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

解 (1) 顺序主子式为 $2, \frac{15}{4}, -5$, 故不为正定矩阵。

(2) 顺序主子式为 $1, 1, -1$, 故不为正定矩阵。

 笔记 16, 18 这两题均归结为考察顺序主子式进而判断范围的题目, 详细过程可以参照 21, 这里给出答案。

作业 14.6 (Ch8 T16)

参数 t 满足什么条件时下列二次型正定?

(1) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_1x_3$;

(2) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + tx_1x_2 + tx_1x_3 + x_2x_3$

解 (1) $t \in (-2, 2)$, (2) $t \in \left(-\frac{\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}}{2}\right)$ 。

作业 14.7 (Ch8 T18)

设 $Q = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 + 2cx_1x_3$, 问 a, b, c 满足什么条件时, Q 为正定?

解 $a > 0, b > 0, -a < c < a$ 时 Q 正定。

作业 14.8 (Ch8 T20)

设有 n 元实二次型 $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为实数, 问 Q 何时为正定?

解 显然这个二次型至少是半正定的, 要使其正定, 需要消去非零向量 x 使得 $Q(x) = 0$ 的可能性, 即需要线性方

程组对应矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{bmatrix}$ 可逆 (为处理方便, 使用一个并非对称矩阵的版本)。按第一列展

开行列式, 有 $\det A = 1 + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i$, 故 Q 为正定的充分必要条件为 $\prod_{i=1}^n a_i \neq (-1)^n$ 。

作业 14.9 (Ch8 T21)

在 $Q = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$ 中, 问:

- 哪些 λ 的值使得 Q 为正定?
- 哪些 λ 的值使得 Q 为负定?
- 当 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = -1$ 时, Q 为什么类型?

解 二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$

1. 需要所有的顺序主子式行列式大于 0, 故有 $\lambda > 0, \lambda^2 - 1 > 0, \lambda^3 - 3\lambda - 2 > 0$ 解得 $\lambda > 2$;
2. 需要注意, 判断负定的时候不是所有的顺序主子式都小于 0, 而是只有奇数阶的顺序主子式行列式小于 0, 因为 $-A$ 的正定性发现加上负号后偶数阶的主子式行列式是不发生变化的。故有 $\lambda < 0, \lambda^2 - 1 > 0, \lambda^3 - 3\lambda - 2 < 0$, 解得 $\lambda < -1$;
3. 当 $\lambda = 2, -1$ 时, 代入计算主子式的行列式可得 $\lambda = 2$ 时为半正定, $\lambda = -1$ 时为半负定。

作业 14.10 (Ch8 T23)

设 A 是 n 阶可逆实对称矩阵, 证明:

1. 若 A 正定, 则 A^{-1} 也正定;
2. 若 A 正定, 则 A 的伴随矩阵 A^* 也正定。

证明. 1. 由于 A 正定, 故 A 的所有特征值均大于 0, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$, 均大于 0, 故 A^{-1} 正定。
2. 由于 A^{-1} 正定, $\det A > 0$, 故 $A^* = (\det A)A^{-1}$ 也正定。

□

作业 14.11 (Ch8 T25)

设 A, B 是两个 n 阶实对称正定矩阵, 证明:

1. $A + B$ 正定;
2. AB 正定当且仅当 $AB = BA$ 。

证明. 1. 对任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^T(A+B)x = x^T Ax + x^T Bx > 0$, 故 $A+B$ 正定。
2. 充分性: 由于 A, B 对称且可交换, 故 AB 也对称, 且 A, B 可以同时对角化。设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^{-1}AP = D_1, P^{-1}BP = D_2$, 其中 D_1, D_2 均为对角矩阵, 由 A, B 正定可知 D_1, D_2 的对角线元素均大于 0, 则 $P^{-1}ABP = D_1 D_2$, 其对角线元素也均大于 0, 特征值全正, 故 AB 正定。
必要性: AB 作为正定矩阵必然对称, 即 $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$ 。

□

作业 14.12 (Ch8 T26)

A, B 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A > 0$, 证明: 对充分大的实数 t , 有 $tA + B > 0$ 。

证明. 由于 A 正定, B 对称, 故可以把 A, B 同时相合为对角矩阵, 设 P 为可逆矩阵, 使得 $P^T A P = D_1, P^T B P = D_2$, 其中 $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), D_2 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, 且 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。则有 $P^T(tA+B)P = tD_1 + D_2 = \text{diag}(t\lambda_1 + \mu_1, t\lambda_2 + \mu_2, \dots, t\lambda_n + \mu_n)$, 当 $t > \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \right\}$ 时, $t\lambda_i + \mu_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 故 $tA + B$ 正定。 □

作业 14.13 (Ch8 T27)

设 A 为 n 阶对称正定矩阵, 证明: 存在下三角阵 P 使得 $A = PP^T$, 进一步证明: 存在对角线元均为 1 的下三角阵 L 和对角阵 D , 使得 $A = LDL^T$.

解 A 正定时存在可逆矩阵 S , 使得 $A = S^T S$, 对 S 使用 QR 分解, 得 $S = QR$, 其中 Q 为正交矩阵, R 为上三角矩阵, 由 A 可逆, 其对角元非零, 不妨设为正, 故 $A = S^T S = R^T Q^T QR = R^T R$, 记 $P = R^T$ 即为所求下三角矩阵. 令 $D = \text{diag}(p_{11}^2, p_{22}^2, \dots, p_{nn}^2)$, $L = PD^{-\frac{1}{2}}$, 则 L 为对角线元均为 1 的下三角矩阵, 且 $A = PP^T = LDL^T$.

作业 14.14 (Ch8 T28)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A \succ 0$, 求证: $\det A \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr} A\right)^n$.

证明. 由于 A 是对称矩阵且正定, 故 A 的所有特征值均大于 0, 已知 $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, $\text{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, 由均值不等式立刻可以得出结论. $\square$

作业 14.15 (Ch8 T29)

证明: 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶正定方阵, 则 $\det A \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

证明. 先证明 Hadamard 不等式:

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 行向量为 $r_1, r_2, \dots, r_n$, 则 $\det A \leq \|r_1\| \|r_2\| \cdots \|r_n\|$, 其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数, 等号成立的充分必要条件是 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 两两正交.

证明: 使用 Gram-Schmidt 正交化过程, 将 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 正交化为 $u_1, u_2, \dots, u_n$, 设其组成的矩阵为 U , 则 $\det A = \det U$, 由于正交化过程中每一步都是正交投影的减法, 故 $\|u_i\| \leq \|r_i\|$, 等号成立的充分必要条件是 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 两两正交. 又 $UU^T = \text{diag}(\|u_1\|^2, \|u_2\|^2, \dots, \|u_n\|^2)$, 故 $\det A^2 = \det(UU^T) = \|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \cdots \|u_n\|^2 \leq \|r_1\|^2 \|r_2\|^2 \cdots \|r_n\|^2$, 取正平方根即得不等式.

由于 A 是正定矩阵, 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PP^T$, 设 P 的行向量为 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 则 $a_{ii} = p_i^T p_i = \|p_i\|^2$, 由 Hadamard 不等式可得 $\det A = \det(P^T P) = (\det P)^2 \leq \|p_1\|^2 \|p_2\|^2 \cdots \|p_n\|^2 = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. $\square$

作业 14.16 (Ch8 T30)

设 A 是 n 阶对称矩阵, 证明下列命题等价

1. A 半正定;
2. 存在实矩阵 P , 使得 $A = P^T P$;
3. A 的各阶主子式非负.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 由于 A 半正定, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 记 $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, 则有 $A = Q D Q^T = Q D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} Q^T = \left(D^{\frac{1}{2}} Q^T\right)^T \left(D^{\frac{1}{2}} Q^T\right)$, 取 $P = D^{\frac{1}{2}} Q^T$ 即得.

(2) $\Rightarrow$ (3): 对任意 k 阶主子式 A_k , 有 $A_k = P_k^T P_k$, 其中 P_k 是由 P 中对应的列组成的矩阵, 则 $\det A_k = (\det P_k)^2 \geq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 对 n 做归纳. $n = 1$ 时显然成立. 设结论对 $n-1$ 阶成立. 将 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & r^T \\ r & B \end{bmatrix}$, 其中 B 为 $(n-1) \times (n-1)$ 对称矩阵. 由 (3) 知 $a_{11} \geq 0$ 且 B 的各阶主子式也非负 (因为它们也是 A 的主子式), 故由归纳假设 $B \succeq 0$.

- $a_{11} = 0$, 则对任意 $i \geq 2$, 对应的 2×2 主子式为 $\det \begin{bmatrix} 0 & r_i \\ r_i & b_{ii} \end{bmatrix} = -r_i^2 \geq 0$ 推出 $r_i = 0$, 故 $r = 0$, 从而 $A = \text{diag}(0, B) \succeq 0$ 。
- $a_{11} > 0$, 令 Schur 补 $S := B - \frac{1}{a_{11}}rr^T$ 。对任意指标集 $J \subset \{2, \dots, n\}$, 由分块行列式公式 $\det A_{\{1\} \cup J} = a_{11} \det(S_J)$, 其中 S_J 为 S 的对应主子矩阵。由于左边是 A 的主子式, 非负; 且 $a_{11} > 0$, 故 $\det(S_J) \geq 0$ 。因此 S 的各阶主子式也非负, 由归纳假设 $S \succeq 0$ 。对任意 $x = (x_1, y)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, 有 $x^T Ax = a_{11}x_1^2 + 2x_1r^Ty + y^TBy = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}r^Ty\right)^2 + y^TSy \geq 0$, 故 $A \succeq 0$ 。

□

作业 14.17 (Ch8 T31)

在二次型 $Q = x^T Ax$ 中, 实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 且 $\det A = 0$, 证明: Q 半正定。

◆

证明. 设 $A = \begin{bmatrix} B & b \\ b^T & c \end{bmatrix}$, 其中 B 为 $(n-1) \times (n-1)$ 对称矩阵, 由题设知 B 的各阶主子式均大于 0, 故 B 正定。由 Schur 补知 $\det A = \det B \cdot (c - b^T B^{-1}b) = 0$, 故 $c = b^T B^{-1}b$ 。对任意 $x = (y, t)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, 有 $Q = y^TBy + 2tb^Ty + ct^2 = y^TBy + 2tb^Ty + t^2b^TB^{-1}b = (y + tB^{-1}b)^TB(y + tB^{-1}b) \geq 0$, 故 Q 半正定。

□

作业 14.18 (Ch8 T32)

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V$ 是 A 的奇异值分解, 令 $A^+ = V^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H$ 是 A 的广义逆, 证明: $AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+, (AA^+)^H = AA^+, (A^+A)^H = A^+A$ 。

◆

证明. • $AA^+A = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} VV^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V = A$;

• $A^+AA^+ = V^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} VV^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H = V^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H = A^+$;

• $(AA^+)^H = \left(U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} VV^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H \right)^H = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} VV^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H = AA^+$;

• $(A^+A)^H = \left(V^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V \right)^H = V^H \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^H U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V = A^+A$ 。

□

作业 14.19 (Ch8 T33)

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 证明: $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{\max}$, 其中 $\sigma_{\max}$ 是 A 的最大奇异值, 称 $\|A\|_2$ 为 A 的谱范数。

◆

证明. 设 A 的奇异值分解为 $A = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V^H$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ 。对任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\left\| U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V^H x \right\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V^H x \right\|_2}{\|V^H x\|_2}$, 记 $y = V^H x$, 则有 $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} y \right\|_2}{\|y\|_2} =$

$$\frac{\sqrt{\sigma_1^2 y_1^2 + \sigma_2^2 y_2^2 + \cdots + \sigma_r^2 y_r^2}}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}} \leq \sigma_1, \text{ 等号成立当且仅当 } y = k e_1, k \neq 0, \text{ 即 } x = k v_1, k \neq 0, \text{ 其中 } v_1 \text{ 是 } V \text{ 的第一列。}$$

综上所述, $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{\max}.$

□