



线性代数作业答案

作者：陈文轩

组织：KFRC

时间：August 1, 2026

版本：3.0.0.3210



目录

第一章 第一次作业	1
第二章 第二次作业	4
第三章 第三次作业	7
第四章 第四次作业	16
第五章 第五次作业	20
第六章 第六次作业	24
第七章 第七次作业	29
第八章 第八次作业	34
第九章 第九次作业	38
第十章 第十次作业	42
第十一章 第十一次作业	46
第十二章 第十二次作业	51
第十三章 第十三次作业	57
第十四章 第十四次作业	64
第十五章 第十五次作业	69

第一章 第一次作业

作业 1.1 (Ch2 T1)

解方程组：

1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$



解

1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow[r_4 - r_1]{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 4x_3 = 3 \\ 4x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{r_2 + r_4} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_3 = 5 \\ 4x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 0 = 1 \\ 4x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

故方程组无解。

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ 6x_2 - 14x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

令 $x_3 = t$, 则 $x_4 = \frac{1-3t}{2}$, $x_2 = \frac{25t+1}{12}$, $x_1 = \frac{7-5t}{12}$, 故通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7-5t}{12}, \frac{25t+1}{12}, t, \frac{1-3t}{2} \right).$$

或令 $x_4 = t$, 解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{18}t, \frac{7}{9} - \frac{25}{18}t, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t, t \right)$

6.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_2+2r_1 \\ r_3+3r_1 \\ r_4+4r_1 \end{smallmatrix}} \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 17x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 0 \\ 16x_2 - 11x_3 + 7x_4 = 0 \\ 43x_2 - 23x_3 + 21x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 17r_3-16r_2 \\ 17r_4-43r_2 \end{smallmatrix}} \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 17x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 0 \\ 21x_3 + 7x_4 = 0 \\ 168x_3 + 56x_4 = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{r_4-8r_3} \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 17x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

令 $x_3 = t$, 则 $x_4 = -3t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = t$, 故通解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, 2, 1, -3)$ 。

7.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_2-r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-2r_1 \end{smallmatrix}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -6x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} r_3-3r_2 \\ r_4+r_2 \end{smallmatrix}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 12x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 0 \\ -4x_3 + 12x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_3+3r_4} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 45x_4 - 15x_5 = 0 \\ -4x_3 + 12x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

由第三行得 $3x_4 - x_5 = 0$, 即 $x_4 = \frac{x_5}{3}$; 代入第四行得 $x_3 = 0$ 。令 $x_5 = 6t$, 则 $x_4 = 2t$, $x_2 = 5t$, $x_1 = 7t$, 故通解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(7, 5, 0, 2, 6)$ 。

作业 1.2 (Ch2 T2)

当 a 为何值时, 下列线性方程组有解? 有解时写出它的通解。

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

解

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a-6)x_1 - 6x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-\frac{2}{3}r_2} \begin{cases} -\frac{5}{3}x_1 + x_3 = \frac{4}{3} \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a+8)x_1 = 4 \end{cases}$$

可见有解当且仅当 $a \neq -8$, 通解为 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3a+24}, \frac{4a+52}{3a+24} \right)$ 。

2.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_2 + x_3 = a+3 \end{cases} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = a+1 \end{cases}$$

可见有解当且仅当 $a = -1$ 。当 $a = -1$ 时, 令 $x_2 = t$, 则 $x_3 = 2 - 7t$, $x_1 = 18t - 5$, 故通解为 $(x_1, x_2, x_3) = (18t - 5, t, 2 - 7t)$ 。

作业 1.3 (Ch3 T3)

当 a 为何值时, 下列线性方程组有唯一解? 当 a 为何值时, 下列线性方程组无解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - (a+1)x_3 = 6 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - (a+1)x_3 = 6 \\ -(3a+2)x_3 = 18 \end{cases}$$

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 第三行变为 $0 = 18$, 故方程组无解; 当 $a \neq -\frac{2}{3}$ 时, 第三行可唯一确定 x_3 , 再由第二行唯一确定 x_2 , 最后由第一行唯一确定 x_1 , 故方程组有唯一解。

第二章 第二次作业

作业 2.1

求四次多项式 $f(x)$ 满足 $f(0) = 7, f(1) = 3, f(2) = 7, f'(1) = -2, f'(2) = 14$ 。

解 设 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, 则 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow \begin{cases} e = 7 \\ a + b + c + d + e = 3 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 7 \\ 4a + 3b + 2c + d = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 14 \end{cases}$

解方程组得到 $a = 1, b = -2, c = 3, d = -6, e = 7, f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$ 。

作业 2.2

设平面上有三个不共线的点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ 。请给出并证明该三点构成的三角形面积 S 可以用二阶行列式表示

解 记 $\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \mathbf{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1), \theta$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角, 并将 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 视为第三分量为 0 的 $\mathbb{R}^3$ 中向量, 则有:

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right|$$

对于变量轮换的情形同理。

注 该公式与 $S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|$ 是等价的。

作业 2.3 (Ch3 T1)

计算下列矩阵的行列式:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}
 (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_1 \rightarrow r_2]{-2r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2 \rightarrow r_3]{r_2 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\frac{6}{5}r_3 \rightarrow r_4]{\frac{6}{5}r_3 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 1 \times (-3) \times \frac{5}{3} \times 10 = -40
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_2]{3r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{15}{4}r_2 \rightarrow r_3]{-\frac{1}{4}r_2 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[-\frac{3}{13}r_3 \rightarrow r_4]{-\frac{3}{13}r_3 \rightarrow r_4} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{13} \end{bmatrix} = 1 \times (-4) \times \left(-\frac{13}{4}\right) \times \left(-\frac{20}{13}\right) = -20
 \end{aligned}$$

$$(3) \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_3]{-r_1 \rightarrow r_2} \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y-x & y-x & y-x \\ z-x & z-x & z-x \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (4) \det \begin{bmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= (-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} & & a_{2,n-1} \\ & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix} = \cdots \\
 &= (-1)^{n+1} (-1)^n \cdots (-1)^4 a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-2,3} \det \begin{bmatrix} a_{n-1,2} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix} \\
 &= (-1)^{\sum_{k=3}^{n+1} k} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j=1}^n a_{j,n-j+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[-c_1 \rightarrow c_2]{-c_1 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2c_2 \rightarrow c_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_2]{-r_1 \rightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ (b+a)(b-a) & 2(b-a) & 0 \\ (c+a)(c-a) & 2(c-a) & 0 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\text{提取公因式}]{\text{第一行展开}} 2(b-a)(c-a) \det \begin{bmatrix} b+a & 2 \\ c+a & 2 \end{bmatrix} = -4(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{第五行展开}} e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第四行展开}} d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{第三行展开}} c_3 d_4 e_5 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 d_4 e_5
 \end{aligned}$$

作业 2.4 (Ch3 T2)

将行列式 $\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$ 展开为关于 x 的多项式。

解

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} &= (x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix} \\
 &= (x-2) \left((x-2) \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) - \left(\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= (x-2) \left((x-2) \left((x-2)^2 - 1 \right) - (x-2) \right) - \left((x-2)^2 - 1 \right) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5
 \end{aligned}$$

作业 2.5 (Ch3 T3)

A 为 n 阶矩阵, λ 为常数, 证明: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ 。

证明. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $\lambda A = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$, 由行列式的性质 2, 有:

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n) = \dots = \lambda^n \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lambda^n \det A$$

证毕。

□

□

作业 2.6 (Ch3 T4)

证明: 奇数阶反对称方阵的行列式是 0。

证明. 设 A 是 n 阶反对称方阵, 即 $A^T = -A$ 。则 $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, 故 $\det A = 0$ 。 □

第三章 第三次作业

作业 3.1

计算 $\det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

解 对 $b = c$,

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

假设 $a_i - b$ 中有两个为 0, 则按第一列展开后每一项至少有一行全为 0, 所以行列式值为 0。

假设 $a_i - b$ 中只有一个为 0, 则设 $a_r = b, 1 \leq r \leq n$,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列展开}} (-1)(-1)^{r+2} \det \begin{bmatrix} b & b & \cdots & b & b \\ a_1 - b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{r+3}(-1)^{r-1} \cdot b \prod_{i \neq r} (a_i - b) = b \prod_{i \neq r} (a_i - b)$$

假设 $a_i - b$ 中没有 0, 则

$$\det \begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{b}{a_i - b} C_{i+1} \rightarrow C_1 \\ i=1, \dots, n}]{\det} \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{a_i - b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{b}{a_i - b} \right) \prod_{i=1}^n (a_i - b)$$

注意到 $\prod_{i=1}^n (a_i - b) + b \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (a_j - b)$ 满足以上全部三种情况, 故此即为最终解答。

对 $b \neq c$, 令

$$D(x) = \det \begin{bmatrix} a_1 - x & b - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & c - x & a_3 - x & \cdots & b - x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - x & c - x & c - x & \cdots & a_n - x \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{-r_1 \rightarrow r_i} \det \begin{bmatrix} a_1 - x & b - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - a_1 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ c - a_1 & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - a_1 & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

由第一行展开可知 $D(x)$ 是关于 x 的 1 次多项式，确定其在两点处的值即可确定其在 0 处取值，即为所求。

$$\text{注意到 } D(b) = \det \begin{bmatrix} a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c - b & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ c - b & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c - b & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i - b), D(c) = \prod_{i=1}^n (a_i - c).$$

$$\text{故 } D(0) = D(b) - \frac{D(b) - D(c)}{b - c} b = \frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c}.$$

 **笔记** 当 $b \rightarrow c$ 时，由洛必达法则， $\frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c} \rightarrow b \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (a_j - b) + \prod_{i=1}^n (a_i - b)$ ，与 $b = c$ 时的结果相同。这是为什么？

注 以下给出另一种求解 $b \neq c$ 时情形的思路。

解

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\ &= (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[-c_1 \rightarrow c_i, i=2, \dots, n]{\text{右边行列式}} (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2 - c & b - c & \cdots & b - c \\ c & 0 & a_3 - c & \cdots & b - c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_n - c \end{bmatrix} \\ &= (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \prod_{i=2}^n (a_i - c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 - c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 & b & \cdots & b \\ 0 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& = (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a_2 & b & \cdots & b \\ 1 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow[-r_1 \rightarrow r_i, i=2, \dots, n]{\text{右边行列式}} (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c - b & a_3 - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c - b & c - b & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} \\
& = (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \prod_{i=2}^n (a_i - b) \\
& \text{得到: } \left\{ \begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} &= (a_1 - b) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + b \prod_{i=2}^n (a_i - c) \quad (1) \\ \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} &= (a_1 - c) \det \begin{bmatrix} a_2 - b & b & \cdots & b \\ c & a_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} + c \prod_{i=2}^n (a_i - b) \quad (2) \end{aligned} \right. \\
& \text{通过 } \frac{(1) \times (a_1 - c) - (2) \times (a_1 - b)}{b - c}, \text{ 即可得到 } \det \begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \frac{b \prod_{i=1}^n (a_i - c) - c \prod_{i=1}^n (a_i - b)}{b - c}.
\end{aligned}$$

作业 3.2 (Cauchy 行列式)

设复数列 $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n$ 满足 $x_i \neq y_j, \forall i, j$, 计算

$$\det C_n(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\substack{-r_n \rightarrow r_k \\ k=1, \dots, n-1}}{=} \det \begin{bmatrix} \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_1}{(x_1 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_1)(x_n - y_1)} & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_2)(x_n - y_2)} & \cdots & \frac{x_n - x_2}{(x_2 - y_n)(x_n - y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \frac{1}{x_n - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_n} \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \frac{1}{x_{n-1} - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_n} \end{bmatrix} \\ & \stackrel{\substack{-c_n \rightarrow c_k \\ k=1, \dots, n-1}}{=} \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_n} \\ \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_n - y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_n}{(x_1 - y_1)(x_1 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_1 - y_2)(x_1 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_1 - y_{n-1})(x_1 - y_n)} \\ \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_1)(x_2 - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_2 - y_2)(x_2 - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_2 - y_{n-1})(x_2 - y_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_1 - y_n}{(x_{n-1} - y_1)(x_{n-1} - y_n)} & \frac{y_2 - y_n}{(x_{n-1} - y_2)(x_{n-1} - y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1} - y_n}{(x_{n-1} - y_{n-1})(x_{n-1} - y_n)} \end{bmatrix} \\ & = \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n - x_j)(y_j - y_n)}{(x_n - y_j)(x_j - y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \frac{1}{x_{n-1} - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i - y_j)}$$

作业 3.3 (Ch3 T5)

证明: $\det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$

证明.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{a_{21}r_3 + a_{22}r_4 \rightarrow r_2}]{\substack{a_{11}r_3 + a_{12}r_4 \rightarrow r_1}} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{c_1 \leftrightarrow c_3}]{\substack{c_2 \leftrightarrow c_4}} \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & -1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

□

作业 3.4 (Ch3 T16)

使用 Cramer 法则求解线性方程组

1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

◆

解

1. 系数行列式为

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} = 12 \neq 0,$$

故方程组有唯一解。再计算

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 12, \quad D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} = 12, \quad D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = 12.$$

由 Cramer 法则,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

2. 系数行列式为

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} = 27 \neq 0.$$

再计算

$$\begin{aligned} D_1 &= \det \begin{bmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} = 81, & D_2 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix} = -108, \\ D_3 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -27, & D_4 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} = 27. \end{aligned}$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -4, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

作业 3.5 (Ch3 T18)

证明: n 个变元, n 个方程的齐次线性方程组有非零解当且仅当系数矩阵的行列式为零。

证明. 设齐次线性方程组为 $Ax = b = 0$, 其中 A 为 n 阶系数矩阵, X 为 $n \times 1$ 列向量。

必要性: 若 $\det A \neq 0$, 则可以使用 Cramer 法则, 由于 $b = 0$, D_i 对应矩阵中有一列是零, 故 $D_i = 0, \forall i \Rightarrow x = 0$, 即只有零解, 矛盾。故 $\det A = 0$ 。

充分性: 对 A 施加初等行变换, 得到阶梯形矩阵 U , 则 $\det A = 0 \Rightarrow \det U = 0$, 所以 U 按照定义至少第 n 行为 0, 因此 x_n 为自由变量, 设 $x_n = t \neq 0$, 则可以从下往上依次解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ (可能需要添加其他自由变量), 从而得到非零解。□

作业 3.6 (Ch3 T19)

计算下列矩阵的行列式:

$$\begin{aligned}
1. & \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix} \\
2. & \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix} \\
3. & \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}_{n \times n} \\
4. & \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



解

$$\begin{aligned}
1. \text{ 设 } D_k &= \begin{bmatrix} a_{n-k+1} & & & b_{n-k+1} \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_{n-k+1} & & & d_{n-k+1} \end{bmatrix}, \text{ 则 } D_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_1 & & & d_1 \end{bmatrix} \\
\det D_n &\stackrel{\text{第一行展开}}{=} a_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_2 & & & d_2 & 0 \\ 0 & & & 0 & d_1 \end{bmatrix} - b_1 \det \begin{bmatrix} 0 & a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & c_2 & & & d_2 \\ c_1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{最后一行展开}} a_1 d_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix} - b_1 c_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & \ddots & & \\ & & a_n & b_n \\ & & c_n & d_n \\ & \ddots & & \ddots \\ c_2 & & & d_2 \end{bmatrix} \\
& = (a_1 d_1 - b_1 c_1) \det D_{n-1} = \cdots = \prod_{j=1}^n (a_j d_j - b_j c_j)
\end{aligned}$$

2. 题目所给矩阵中出现大量 1，故使用加边方法处理。

先考虑 a_i 均不为 0 的情形。

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{j=2,3,\dots,n+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{a_i} c_{i+1} \rightarrow c_1 \\ i=1,2,\dots,n}} \det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \\
& = \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n a_j
\end{aligned}$$

若存在 j 使得 $a_j = 0$ ，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall t \in (-\delta, \delta), a_i + t \neq 0$ 。此时考虑

$$\det \begin{bmatrix} 1+a_1+t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2+t & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n+t \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^n (a_j + t) + \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (a_j + t)$$

由行列式对矩阵元素的连续性，可令 $t \rightarrow 0$ ，此时行列式值仍然为 $\prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n a_j$ 。

$$\text{最终结果为} \begin{cases} \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n a_j & a_i \neq 0, \forall i \\ \prod_{j=1, j \neq k}^n a_j & \text{仅有一个 } a_k = 0 \\ 0 & \text{至少有两个 } a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
3. \text{ 设 } \Delta_k &= \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix}_{k \times k}, \\
\Delta_n &\stackrel{\text{第一行展开}}{=} 2 \cos \theta \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 2 \cos \theta & 1 & \\ & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} \\
&\stackrel{\text{第一列展开}}{=} 2 \cos \theta \Delta_{n-1} + \det \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ & & 1 & 2 \cos \theta & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix} = 2 \cos \theta \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}
\end{aligned}$$

对 $\theta = k\pi$, 归纳可得 $\Delta_n = (-1)^{nk}(n+1)$ 。

否则假设 $\Delta_n - \lambda \Delta_{n-1} = \mu(\Delta_{n-1} - \lambda \Delta_{n-2}) = \mu^{n-2}(\Delta_2 - \lambda \Delta_1) \Leftrightarrow \Delta_n - \mu \Delta_{n-1} = \lambda(\Delta_{n-1} - \mu \Delta_{n-2}) = \lambda^{n-2}(\Delta_2 - \mu \Delta_1)$, 此时有 $\Delta_n = \frac{\mu^{n-1}(\Delta_2 - \lambda \Delta_1) - \lambda^{n-1}(\Delta_2 - \mu \Delta_1)}{\mu - \lambda}$ 。

易得 $\lambda\mu = 1, \lambda + \mu = 2 \cos \theta$ 。对应 λ, μ 是方程 $x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = 0$ 的解。

$\Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \mu = e^{-i\theta}$ (交换顺序不影响结果)。又有 $\Delta_1 = 2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}, \Delta_2 = 4 \cos^2 \theta - 1 = e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{e^{-(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) - e^{(n-1)i\theta}(e^{2i\theta} + e^0 + e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k (e^{-i\theta})^{n-k} = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

同时注意到 $\theta = k\pi$ 时表达式仍然满足 $\Delta_n = \sum_{k=0}^n e^{i(2k-n)\theta}$, 故此即为最终答案。

4. 假设 $a_2 a_3 \cdots a_n \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{bmatrix} &\stackrel{\substack{-\frac{b_k}{a_k} r_k \rightarrow r_1 \\ k=2, \dots, n}}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = \left(a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) \prod_{j=2}^n a_j \\
&= \prod_{j=1}^n a_j - \sum_{i=2}^n b_i c_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n a_j
\end{aligned}$$

由连续性, 当某些 $a_i = 0$ 时, 行列式值仍然为 $\prod_{j=1}^n a_j - \sum_{i=2}^n b_i c_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n a_j$ 。

第四章 第四次作业

作业 4.1 (Ch4 T3)

设 $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, 计算 AB, BC, ABC, B^2, AC, CA 。



解

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 11 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$ABC = (AB)C = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -61 \\ 12 & 93 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -15 & -4 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -13 & 7 & 12 \\ 1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

作业 4.2 (Ch4 T5)

计算 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$



解 直接计算即可。结果为 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j$ 。

作业 4.3 (Ch4 T6)

举例求满足条件的 2 阶实方阵 A , 若不存在则证明。

$$(1) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) A^3 = I_2 \text{ 且 } A \neq I_2.$$

解 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为实数。则 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow a^2 + bc = d^2 + bc = 0, ab + bd = ac + cd = 1$ 。从第一个等式可以得到 $a = d$ 或 $a = -d$ 。
 若 $a = d$, 则 $ac + dc = 2ac = 1, ab + bd = 2ab = 1 \Rightarrow a \neq 0, ab = ac = \frac{1}{2} \Rightarrow b = c$ 。
 代入第一个方程可以得到 $a^2 + b^2 = 0$, 从而 $a = b = 0$, 与 $ab = \frac{1}{2}$ 矛盾。
 若 $a = -d$, 则 $ab + bd = ab - ba = 0$ 与 $ab + bd = 1$ 矛盾, 故不存在这样的实矩阵 A 。

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

笔记 (3) 中的矩阵为 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 的旋转矩阵。具体可以参考课本 180 页。

作业 4.4 (Ch4 T7)

计算下列矩阵的 k 次方幂。

$$(1) A := \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad (2) B := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$(4) C := \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6) D := \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

解 (1) 使用归纳。假设 $A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -\sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$ 。对 $k = 1$ 显然成立。若对 $k \leq n$ 成立,

$$\begin{aligned} \text{则 } A^{n+1} &= A^n A = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos nx \cos x - \sin nx \sin x & \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \\ -\sin nx \cos x - \cos nx \sin x & \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)x & \sin(n+1)x \\ -\sin(n+1)x & \cos(n+1)x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故归纳成立。

(2) 对 a, b 不全为 0, 记 $\theta = \arctan \frac{b}{a}$, 则 $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

$$\begin{aligned} \text{从而 } B &= \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B^k &= (a^2 + b^2)^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 记 } N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } C = aI + N, \text{ 观察到 } N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

归纳可得 $N^k = (\delta_{i,j-k})_{n \times n}$, 显然 $\forall k \geq n, N^k = 0$. 故 $C^k = (aI + N)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^{\min(k, n-1)} \binom{k}{i} a^{k-i} N^i$.

$$\text{以下对 } a < b \text{ 记 } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \text{ 则 } C^k = \begin{bmatrix} \binom{k}{0} a^k & \binom{k}{1} a^{k-1} & \binom{k}{2} a^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1} a^{k-n+1} \\ & \binom{k}{0} a^k & \binom{k}{1} a^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2} a^{k-n+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0} a^k & \binom{k}{1} a^{k-1} \\ & & & & \binom{k}{0} a^k \end{bmatrix}$$

(6) 注意到 $D = \alpha\beta$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

$$\text{故 } D^k = \alpha\beta\alpha\beta \cdots \alpha\beta = \alpha(\beta\alpha)^{k-1}\beta = \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} \alpha\beta = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^{k-1} D.$$

作业 4.5 (Ch4 T10)

设 A, B 是 n 阶对称阵, 且 $AB = BA$, 证明: AB 是对称阵。

证明. $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA = AB$, 故 AB 是对称阵。□

 **笔记** 这题可以加强为: 设 A, B 是 n 阶方阵, 则 $AB = BA$ 当且仅当 AB 是对称阵。

作业 4.6 (Ch4 T11)

证明: 两个上(下)三角方阵的乘积仍是上(下)三角。

证明. 只证明对上三角阵的情形。对 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$, 且 $\forall i > j, a_{ij} = b_{ij} = 0$. 记 $C = (c_{ij})_{n \times n} = AB$, 则 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. 当 $i > j$ 时, $\forall 1 \leq k \leq n$, 都有 $i > k$ 或 $k > j$, 故求和中每一项都是 0 $\Rightarrow c_{ij} = 0$. 故 C 是上三角阵。□

作业 4.7 (Ch4 T12)

证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵。

证明. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是满足题意的矩阵, 则对 $\forall j, k, AE_{jk} = E_{jk}A$. 左边得到的矩阵的第 k 列是 A 的第 j 列, 其余列为 0, 右边得到的矩阵的第 j 行是 A 的第 k 行, 其余行为 0. 当 $i \neq j$ 时, 可以得到 $a_{ik} = a_{ji} = 0$. 因此 A 的非对角元为 0, 即 A 是对角矩阵。

设 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 由 $AS_{ij} = S_{ij}A$ 有 $\lambda_i = \lambda_j, \forall i, j$, 故 $A = \lambda_1 I_n$ 即 A 是数量阵。□

作业 4.8 (Ch4 T19)

求所有满足 $A^2 = O, B^2 = I, C^H C = I$ 的 2 阶复方阵 A, B, C 。

解 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$. 此时有 $a^2 + bc = bc + d^2 = 0, ab + bd = ac + cd = 0$.

从第一个等式可以得到 $a = d$ 或 $a = -d$. 若 $a + d \neq 0$, 则 $b = c = 0$, 从而 $a = d = 0$, 此时 $A = O$.

否则 $a = -d$, 则第二个等式自动符合, 且由第一个等式可得 $bc = -a^2$ 。

因此所有满足 $A^2 = O$ 的 2 阶复方阵 A 形如 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{C}, bc = -a^2$ 。

(2) 设 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $a^2 + bc = bc + d^2 = 1, ab + bd = ac + cd = 0$ 。

若 $a + d \neq 0$, 则 $b = c = 0$, 从而 $a^2 = d^2 = 1$, 此时 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

否则 $a = -d$, 则第二个等式自动符合, 且 $bc = 1 - a^2$ 。此时 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{C}, a^2 + bc = 1$ 。

(3) 设 $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [v_1 v_2]$, 则 $C^H C = \begin{bmatrix} v_1^H v_1 & v_2^H v_1 \\ v_1^H v_2 & v_2^H v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & v_2^H v_1 \\ v_1^H v_2 & |v_2|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0 \\ |b|^2 + |d|^2 = 1 \end{cases}$ 。

从第一个条件开始, 假设 $|a|^2 + |c|^2 = 1$, 则第二个条件是齐次方程组, 通解为 $b = -\lambda \bar{c}, d = \lambda \bar{a}, \lambda \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ 。

代入第三个条件, 得到 $|\lambda|^2(|c|^2 + |a|^2) = |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ 。

此时 $C = \begin{bmatrix} a & -\bar{c}e^{i\theta} \\ c & \bar{a}e^{i\theta} \end{bmatrix}$, 其中 $a, c \in \mathbb{C}, |a|^2 + |c|^2 = 1, \theta \in \mathbb{R}$ 。

作业 4.9 (Ch4 T20)

证明: 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$ 。

证明. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n}$,

$$\text{则 } \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lk} a_{kl} = 0 \neq n = \text{tr}(I_n)$$

因此, 不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$ 。

作业 4.10

求次数最低的首一多项式 $f(x)$ 使得对 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 满足 $f(A) = O$ 。

解 记 $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ 。由于 $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & O \\ O & A_{22}^n \end{bmatrix}$, 故对多项式 $f(x)$,

有 $f(A) = \begin{bmatrix} f(A_{11}) & O \\ O & f(A_{22}) \end{bmatrix}$ 。此时只需要求 $f(A_{11}) = O, f(A_{22}) = O$ 的最低次多项式, 取最小公倍数即可。

对 A_{11} , 先令其对角线元素为 0, 得到 $f_1(x) = (x-1)^k$, 验证满足 $f_1(A_{11}) = O$ 的最小 k 为 2, 故 $f_1(x) = (x-1)^2$ 。

对 A_{22} , 先令其对角线元素为 0, 得到 $f_2(x) = (x-2)^k$, 验证满足 $f_2(A_{22}) = O$ 的最小 k 为 2, 故 $f_2(x) = (x-2)^2$ 。

故符合条件的 $f(x) = \text{lcm}(f_1(x), f_2(x)) = (x-1)^2(x-2)^2$ 。

第五章 第五次作业

作业 5.1 (Ch4 T15)

设方阵 A 满足 $A^k = O$, 其中 k 是正整数, 证明: $I + A$ 可逆, 并求 $(I + A)^{-1}$.

证明. 注意到 $(I_n + A)(I_n - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}) = I_n + (-1)^{k-1}A^k = I_n$, 故 $I + A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = I - A + A^2 + \cdots + (-1)^{k-1}A^{k-1}$. $\square$

作业 5.2 (Ch4 T16)

设方阵 A 满足 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$, 证明: $I - A$ 可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$.

证明. 注意到 $I = 2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = (I - A)(6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I)$,
故 $I - A$ 可逆, $(I - A)^{-1} = 6A^4 + A^3 - 3A^2 + 2I$. $\square$

作业 5.3 (Ch4 T23)

求解下列矩阵方程:

$$(1) \quad X \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

解 (1) 记 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -7 & -9 \\ -36 & -29 & -46 \\ -41 & -32 & -51 \end{bmatrix}$

(2) 计算可得 $\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & x_{23} - x_{12} \\ x_{31} & x_{32} - x_{21} & x_{33} - x_{22} \\ x_{11} & x_{12} - x_{31} & x_{13} - x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 14 \\ 1 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$

作业 5.4 (Ch4 T24)

设 A, B 是 n 阶方阵, λ 是数, 证明: (1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$; (2) $(AB)^* = B^*A^*$; (3) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$.

解 对于矩阵 A, B 均为可逆矩阵, 我们有 $AA^* = \det A \cdot I_n, BB^* = \det B \cdot I_n$ 为此我们有

(1) 每一个矩阵的代数余子式都是原矩阵的一个 $n-1$ 阶子式, $n-1$ 阶子式的每一项均乘上一个 λ , 行列式的值会变为原来的 λ^{n-1} 倍, 故 (1) 得证。

(2)

$$(AB)^* = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (B^{-1} \det B)(A^{-1} \det A) = B^*A^*$$

(3)

$$\det A^* \cdot \det A = \det(A \cdot A^*) = \det(\det A \cdot I_n) = (\det A)^n \Rightarrow \det A^* = (\det A)^{n-1}$$

对于 AB 中有不可逆矩阵的情形, 可以使用扰动法或借助行列式与矩阵乘法的连续性来证明。

作业 5.5 (Ch4 T25)

设方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A^* .

解 利用公式 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 以及可逆矩阵逆矩阵的唯一性可以得到

$$A^* = \det A \cdot A^{-1}, \det A = (\det A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}$$

最终可以得到

$$A^* = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

作业 5.6 (Ch4 T26)

设方阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A .

解 显然 A^* 是可逆矩阵, 故 A 可逆, 由 24 题有 $\det A^* = (\det A)^{n-1}$.

在本题中 n 取 4, $\det A^* = -8$, 故 $\det A = -2$, 再由 $AA^* = \det A \cdot I_n$ 有

$$A = \det A \cdot (A^*)^{-1} = (-2) \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{4} \\ & -1 & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -\frac{1}{2} \\ & 2 & & \\ & -1 & & \\ -2 & & & \end{bmatrix}$$

作业 5.7 (Ch4 T27)

设 n 阶方阵 A 的每行, 每列元素之和都是 0, 证明: A^* 的所有元素都相等。

解 根据矩阵的每一项的平等地位特征, 只需在这个条件下证明 $A_{11} = A_{21}$ 即可。

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} + a_{33} + \cdots + a_{3n} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} + a_{n3} + \cdots + a_{nn} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_{21} \end{aligned}$$

利用同样的方法可以证明 $A_{i,j} = A_{i+1,j} = A_{i,j+1}$, 即完成了证明。

作业 5.8 (Ch4 T28)

设 A 是方阵, 证明: 线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $\det(A) = 0$ 。

证明. 设齐次线性方程组为 $Ax = b = 0$, 其中 A 为 n 阶系数矩阵, X 为 $n \times 1$ 列向量。

必要性: 若 $\det A \neq 0$, 则可以使用 Cramer 法则, 由于 $b = 0$, D_i 对应矩阵中有一列是零, 故 $D_i = 0, \forall i \Rightarrow x = 0$, 即只有零解, 矛盾。故 $\det A = 0$ 。

充分性: 对 A 施加初等行变换, 得到阶梯形矩阵 U , 则 $\det A = 0 \Rightarrow \det U = 0$, 所以 U 按照定义至少第 n 行为 0, 因此 x_n 为自由变量, 设 $x_n = t \neq 0$, 则可以从下往上依次解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ (可能需要添加其他自由变量), 从而得到非零解。□

作业 5.9 (Ch4 T35)

将单位矩阵做一系列 (有限次) 行与行的对换得到的矩阵称为置换矩阵, 证明:

1. 将单位矩阵做一系列的列与列的对换得到的矩阵也为置换矩阵;
2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位阵的行 (或列) 得到;
3. 置换矩阵的乘积仍为置换矩阵;
4. 置换矩阵的逆、转置也是置换矩阵。

证明. 由题意, $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}$, 使得 $P = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k} I = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$ 。此即置换矩阵的等价定义。

对于列变换 $S_{p_1 q_1}, \dots, S_{p_r q_r}$, 则 $P' = I S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r} = S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$, 故做列对换得到的矩阵也是置换矩阵。

由 S_{ij} 性质可知, 置换矩阵每行, 每列恰有一个 1, 其余元素为 0, 因此置换矩阵可以通过按某种次序排列单位阵的行 (或列) 得到。

设 P_1, P_2 是置换矩阵, 则 $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}, \{p_1, \dots, p_r\}, \{q_1, \dots, q_r\}$, 使得 $P_1 = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$, $P_2 = S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$ 。此时 $P_1 P_2 = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k} S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r}$, 故置换矩阵的乘积仍为置换矩阵。

设 P 是置换矩阵, 则 $\exists \{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}$, 使得 $P = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}$ 。由 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}, S_{ij}^T = S_{ij}$ 可知 $P^{-1} = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}, P^T = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}$, 故置换矩阵的逆、转置也是置换矩阵。□

作业 5.10 (Ch4 T42)

计算下列矩阵的秩

$$2. \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & -40 & -80 & 50 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -28 & -56 & 35 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故该矩阵的秩为 2。

作业 5.11 (Ch4 T43)

对于 a, b 的各种取值, 讨论实矩阵 $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix}$ 的秩。



解 对 A 进行初等行变换, 有 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{bmatrix}$ 。

因此: 当 $a \neq 6, b \neq 6$ 时, $\text{rank}(A) = 3$; 当 $a = 6, b = 6$ 时, $\text{rank}(A) = 1$; 当 $a = 6, b \neq 6$ 或 $a \neq 6, b = 6$ 时, $\text{rank}(A) = 2$ 。

第六章 第六次作业

作业 6.1 (Ch4 T22)

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的 LU 分解, 并基于 A 的 LU 分解求解线性方程组 $Ax = b$, 其中 $b = (1, -2, 1)^T$.

解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -r_1 \rightarrow r_3 \\ -\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_2 \\ -r_1 \rightarrow r_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{3}r_2 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = U$$

因此可取

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

从而

$$A = LU.$$

令 $Ux = y$, 则原方程组化为

$$Ly = b, \quad Ux = y.$$

先解 $Ly = b$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -r_1 \rightarrow r_3 \\ -\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_2 \\ -r_1 \rightarrow r_3 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{4}{3}r_2 \rightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} \end{array} \right],$$

故

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

再解 $Ux = y$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{3}{7}r_3 \rightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{14} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{2}{3}r_2 \rightarrow r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{14} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right],$$

故

$$x = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

作业 6.2 (Ch4 T30)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 A^n 与 A^{-1}

解 直接计算可得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对 A 按 2×2 进行分块得到 $A = \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix}$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。易得 $B^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

使用归纳证明: $A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix}$ 。对 $n=1$ 显然成立, 若对 $n \leq k$ 成立,

则 $A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} B^k & O \\ kB^{k-1} & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ kB^k + B^k & B^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ (k+1)B^k & B^{k+1} \end{bmatrix}$ 。

故归纳成立。 $A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & -n(n-1) & 1 & -n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}$

作业 6.3 (Ch4 T36)

计算下列矩阵的逆矩阵

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}$, 其中 A_i 可逆。

5.
$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix}$$



解 (1) 直接给出:

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{168} & \frac{23}{168} & \frac{2}{7} & \frac{13}{56} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{65}{336} & \frac{1}{336} & \frac{1}{14} & \frac{3}{112} \end{bmatrix}$$

(2) 直接给出:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(3) 观察易直接构造出逆矩阵为:

$$\begin{bmatrix} & & -1 & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & \ddots \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \text{ 直接与原矩阵相乘可验证结果等于 } I_n.$$

(4) 由分块矩阵乘法法则直接得出其逆为:

$$\begin{bmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & A_{k-1}^{-1} & \\ & \ddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}, \text{ 相乘即得主对角线全为 } I \text{ 其余为 } O.$$

(5) 由之前练习可以得到 $\det A = \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \prod_{i=1}^n a_i$, 因此 A 可逆当且仅当至多一个 $a_i = 0$. 假设 $a_i \neq 0$. 此时

记 $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$, 则 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} + \mathbb{1}\mathbb{1}^\top$, 记 $B = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, $u = v = \mathbb{1}$, 由 Sherman-Morrison

公式 (39 题) 可得

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^\top B^{-1}}{1 + v^\top B^{-1}u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}{1 + \mathbb{1}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \mathbb{1}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right)}, & i = j \\ -\frac{1}{a_i a_j \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right)}, & i \neq j \end{pmatrix}_{n \times n}$$

对于 a_i 有一个为 0 的情形, 由于 $X_k \rightarrow X$ 时 $X_k^{-1} \rightarrow X^{-1}$ ($X \rightarrow X^{-1}$ 是连续映射), 因此可以取 $a_i \rightarrow 0$ 的极限得到逆矩阵。以下假设 $a_k = 0, i, j \neq k$, 记 $S = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$, 则有:

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{kk} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k^2 S} \right) = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{a_k S - 1}{a_k^2 S} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{a_k (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i})}{a_k^2 (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}) + a_k} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \frac{1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}}{2a_k (1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}) + 1} \\ &= \frac{1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i}}{1 + 0} = 1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i} \\ (A^{-1})_{ii} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i^2 S} \right) = \frac{1}{a_i} \\ (A^{-1})_{ik} &= (A^{-1})_{ki} = \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_k S} \right) = \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_k + a_i + a_i a_k \sum_{l \neq k} \frac{1}{a_l}} \right) = -\frac{1}{a_i} \\ (A^{-1})_{ij} &= \lim_{a_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a_i a_j S} \right) = 0 \end{aligned}$$

作业 6.4 (Ch4 T38)

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 证明 $\det(A - aa^T) = (1 - a^T A^{-1} a) \det A$.



证明. 令 $M = \begin{bmatrix} A & a \\ a^T & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det M = \det A \det(1 - a^T A^{-1} a) = \det 1 \det(A - a(1)^{-1} a^T)$, 即 $(1 - a^T A^{-1} a) \det A = \det(A - aa^T)$. □

作业 6.5 (Ch4 T39)

证明 Sherman-Morrison 公式: 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆, $u, v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 则 $A + uv^T$ 可逆当且仅当 $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, 并且此时

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$



证明. 令 $M = \begin{bmatrix} A & u \\ -v^T & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det M = \det A \det(1 - (-v^T) A^{-1} u) = \det 1 \det(A - u(1)^{-1} (-v)^T)$, 即 $(1 + v^T A^{-1} u) \det A = \det(A + uv^T)$, 因此 $A + uv^T$ 可逆当且仅当 $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. 以下验证结论成立:

$$\begin{aligned} (A + uv^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right) &= AA^{-1} + uv^T A^{-1} - \frac{uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} - \frac{uv^T A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \\ &= I_n + uv^T A^{-1} - \frac{uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} - \frac{u(v^T A^{-1} u)v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} = I_n + \left(1 - \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u} - \frac{v^T A^{-1} u}{1 + v^T A^{-1} u} \right) uv^T A^{-1} = I_n \end{aligned}$$



作业 6.6 (Ch4 T41)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明:

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB)$$

证明. 进行分块矩阵的初等变换有:

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

利用性质对于同阶方阵 $U, V, \det(UV) = \det(U) \det(V)$, 对上面的等式取行列式, 并且利用到每个第三类变换阵的行列式值都是 1, 即可得

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB)$$

□

作业 6.7 (Ch4 T45)

设 A 是 n 阶方阵, 证明: $\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{rank}(A) = n - 1 \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n - 2 \end{cases}$

证明. 若 $\text{rank}(A) = n$, 则 A 可逆, 又由 $A^*A = \det A I_n$ 有 A^* 可逆, 故 $\text{rank}(A^*) = n$ 。

若 $\text{rank}(A) = n - 1$, 则 A 有非零 $n - 1$ 阶子式, 故 $\text{rank}(A^*) \geq 1$ 。又由 Sylvester 不等式,

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A^*) \leq \text{rank}(AA^*) + n = n \Rightarrow \text{rank}(A^*) \leq 1$, 故 $\text{rank}(A^*) = 1$ 。

若 $\text{rank}(A) \leq n - 2$, 则 A 没有非零 $n - 1$ 阶子式, 故 $A^* = O, (\text{rank})(A^*) = 0$ 。

□

作业 6.8 (Ch4 T48)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I_n$, 证明: $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) = n$ 。

证明. 首先有 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq \text{rank}((I_n - A) + (I_n + A)) = n$ 。又由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \leq \text{rank}((I_n - A)(I_n + A)) + n = n$, 故 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) = n$ 。

□

第七章 第七次作业

作业 7.1 (Ch5 T3)

在 $\mathbb{F}^4$ 中, 判断向量 b 能否写成 a_1, a_2, a_3 的线性组合, 若能, 请写出一种表示方式:

1. $a_1 = (-1, 3, 0, -5), a_2 = (2, 0, 7, -3), a_3 = (-4, 1, -2, 6), b = (8, 3, -1, -25)$;
2. $a_1 = (3, -5, 2, -4)^T, a_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, a_3 = (3, 11, -5, 10)^T, b = (2, -30, 13, -26)^T$ 。

解

1. 能。 $b = 2a_1 - a_2 - 3a_3$ 。
2. 能。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 11 & -30 \\ 2 & -3 & -5 & 13 \\ -4 & 6 & 10 & -26 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 16/3 & 16 & -80/3 \\ 0 & -7/3 & -7 & 35/3 \\ 0 & 14/3 & 14 & -70/3 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令第 3 个未知数为 0, 解得 $b = -a_1 - 5a_2$ 。这也是一种表示方式。

作业 7.2 (Ch5 T4)

设 $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 1, 1, 1)$ 。证明: $\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合, 且表示唯一。

证明. 设 $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵行列式非零, 故方程组的解唯一, 即表示唯一。□

作业 7.3 (Ch5 T10)

判断下列向量组是否线性相关:

1. $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$;
2. $a_1 = (3, 1, 2, -4), a_2 = (1, 0, 5, 2), a_3 = (-1, 2, 0, 3)$;
3. $a_1 = (-2, 1, 0, 3), a_2 = (1, -3, 2, 4), a_3 = (3, 0, 2, -1), a_4 = (2, -2, 4, 6)$;
4. $a_1 = (1, -1, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0), a_3 = (0, 0, 1, -1), a_4 = (-1, 0, 0, 1)$ 。

解

1. 线性无关。(由向量构成的行列式不为 0)
2. 线性无关。
3. 线性相关。
4. 线性相关。

作业 7.4 (Ch5 T19)

求下列向量组的极大线性无关组和秩.

1. $a_1 = (3, -2, 0), a_2 = (27, -18, 0), a_3 = (-1, 5, 8);$
2. $a_1 = (1, -1, 2, 4), a_2 = (0, 3, 1, 2), a_3 = (3, 0, 7, 14), a_4 = (1, -1, 2, 0);$
3. $a_1 = (0, 1, 2, 3), a_2 = (1, 2, 3, 4), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (4, 3, 2, 1), a_5 = (6, 5, 4, 3)。$

解

$$1. \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -11 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 3, 极大线性无关组可取为 $\{a_1, a_3\}$ 。

2.

$$(a_1^\top, a_2^\top, a_3^\top, a_4^\top) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_2, -2r_1 \rightarrow r_3, -4r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_3 \rightarrow r_2, -2r_3 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}r_4 \rightarrow r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 3, 极大线性无关组为 $\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}$ 。

3.

$$(a_1^\top, a_2^\top, a_3^\top, a_4^\top, a_5^\top) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2 \rightarrow r_3, -3r_2 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & -8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1 \rightarrow r_2, r_1 \rightarrow r_3, 2r_1 \rightarrow r_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见其秩为 2, 极大线性无关组为它们中的任意两个构成的向量组。

作业 7.5 (Ch5 T25)

求下列矩阵秩以及行空间, 列空间, 零空间的一组基。

$$1. \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2. \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

解

$$1. \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -11 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此秩为 3, 行空间的一组基为 $\{(0, -11, 6, 1), (1, 3, -2, 0), (0, -6, 0, 5)\}$, 列空间的一组基为 $\{(3, -1, 2, 4)^\top, (-2, -3, 0, 1)^\top, (0, 2, -4, -2)^\top\}$, $Ax = 0$ 通解为 $x = t(8, 30, 49, 36)^\top, t \in \mathbb{R}$, 零空间的一组基为 $(8, 30, 49, 36)^\top$.

2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 4 & -4 \\ 0 & -18 & 12 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 20/3 & -20/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此秩为 3. 行空间的一组基为 $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$, 列空间的一组基为 $\{(3, 1, -1, 4)^\top, (6, 4, 10, -2)^\top, (1, -1, 5, 8)^\top\}$. $Ax = 0$ 的通解为 $x = t(-2, 0, 1, 1)^\top$, 零空间的一组基为 $(-2, 0, 1, 1)^\top$.

作业 7.6 (Ch5 T27)

证明: $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s)$

证明. 设 $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 的极大无关组是 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ 的极大无关组是 $\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q}\}$, 则 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle = \mathbb{F}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p} \rangle$, $\mathbb{F}\langle b_1, b_2, \dots, b_s \rangle = \mathbb{F}\langle b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q} \rangle$, 故 $\mathbb{F}\langle a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s \rangle = \mathbb{F}\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}, b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q} \rangle$, 因此 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq p + q$. 又 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) = p$, $\text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s) = q$, 故 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s)$. $\square$

作业 7.7 (Ch5 T29)

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 的秩为 r , 证明: A 的不为 0 的 $r \times r$ 子式所在行/列构成 A 的行/列向量的一个极大无关组.

证明. 设 A 的不为 0 的 $r \times r$ 子式所在行/列为 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行与 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列, 组成矩阵为 $\tilde{A}$, 设 A 的行向量为 $a_1, a_2, \dots, a_m$, $\tilde{A}$ 的行向量为 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$, 则 $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r\}$ 线性无关, 此时 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ 作为 $\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r\}$ 的加长向量组仍线性无关. 再证明其极大性. 从 A 的剩余 $m-r$ 行中任取一行 a_k , 再选取第 j 列, 和 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行与 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列组成新的值为 0 的 $(r+1) \times (r+1)$ 子式, 新加入的行与列均是最后一个, 设对应矩阵为 $\hat{A}$ (若选取列满足 $j = j_t$ 时则认为 $\hat{A}$ 有两个相同的列), 按照原矩阵的第 j 列展开, 有 $0 = \det \hat{A} = \sum_{l=1}^r a_{ilj} \hat{A}_{l,r+1} + a_{kj} \hat{A}_{r+1,r+1}$, 注意到此时代数余子式 $\hat{A}_{lj}$ 与 j 无关, 记作 c_l , 此时 $\forall 1 \leq j \leq n$, 有 $c_1 a_{i_1,j} + c_2 a_{i_2,j} + \dots + c_r a_{i_r,j} + c_{r+1} a_{kj} = 0$, 对应到矩阵的行得到 $c_1 a_{i_1} + c_2 a_{i_2} + \dots + c_r a_{i_r} + c_{r+1} a_k = 0$, 且 $c_{r+1} = \det \tilde{A} \neq 0$, 故 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, a_k$ 线性相关, 因此 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ 是极大无关组. 列向量组的证明考虑 $A^\top$ 的行向量组即可. $\square$

作业 7.8 (Ch5 T31)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 向量组 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 有关系式

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$$

证明: $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当 T 为可逆方阵。

证明. $\Rightarrow$: 若 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基, 则 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为满秩方阵, 故 $T = (b_1, b_2, \dots, b_n)(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}$ 是可逆方阵。

$\Leftarrow$: 若 T 为可逆方阵, 则 $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$ 作为可逆方阵乘积显然可逆, 从而列向量组满秩, 是 $\mathbb{F}^n$ 的基。□

作业 7.9 (Ch5 T32)

证明以下命题:

1. 设 $V \subset \mathbb{F}^n$ 是 r 维子空间, 则 V 中任意 $r+1$ 个向量线性相关。
2. 设 $V \subset \mathbb{F}^n$ 是 r 维子空间, 则 V 中任意 r 个线性无关的向量组是 V 的基。
3. 设 U, V 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 且 $U \subset V$, 则 $\dim U \leq \dim V$ 。
4. 设 U, V 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 且 $U \subset V$, 若 $\dim U = \dim V$, 则 $U = V$ 。

证明. 1. 由于 V 是 r 维子空间, 其基由 r 个向量组成, 因此 V 中极大线性无关组所含向量个数为 r 。故 V 中任意 $r+1$ 个向量必然线性相关。

2. V 中这 r 个线性无关的向量作为 V 的无关组, 由于向量个数等于 V 的维数 r , 故这 r 个向量一定是 V 的极大线性无关组, 从而构成 V 的基。

3. 设 $\dim U = k, \dim V = m$ 。设 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 是 U 的一组基, 因 $U \subset V$, 这 k 个向量也是 V 中的向量且线性无关。由于 V 中最多有 m 个线性无关的向量, 因此必定有 $k \leq m$, 即 $\dim U \leq \dim V$ 。

4. 设 $\dim U = \dim V = r$ 。取 U 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 因 $U \subset V$, 它们也是 V 中的 r 个线性无关的向量。由 (2) 可知, 它们也是 V 的一组基。由于 U 和 V 有相同的一组基, 它们所张成的空间也相同, 故 $U = V$ 。□

作业 7.10 (Ch5 T39)

求下列齐次线性方程组的基础解系与通解

$$1. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

解

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 \rightarrow r_3 \\ -3r_1 \rightarrow r_4}]{\substack{5r_1 \rightarrow r_2 \\ r_1 \rightarrow r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 + r_4 \rightarrow r_4}]{r_3 - r_2 \rightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见基础解系向量个数 $4 - 2 = 2$, 即可取 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ 为基础解系, 通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{F}.$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见基础解系向量个数为 $5 - 3 = 2$ 。令 x_4, x_5 为自由变量, 由阶梯形矩阵化简可得通解: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$$t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{F}。基础解系为 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

第八章 第八次作业

作业 8.1 (Ch5 T15)

证明：非零向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关的充要条件是每个 a_i 都不能由它前面的向量线性表示。



证明. 必要性：设 a_i 可以由它前面的向量线性表示，即存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ 使得 $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j a_j$ ，则 $a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j a_j = 0$ 是一个非零解，矛盾。

充分性是显然的。



作业 8.2 (Ch5 T16)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关， $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$ 。如 $\lambda_i \neq 0$ ，则用 b 代替 a_i 后，向量组 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_s$ 线性无关。



证明.

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$$

根据 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关，可知

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$$

从而向量组 $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_s$ 线性无关。



作业 8.3 (Ch5 T17)

设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关，且 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 可以由向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性表示，则 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 也线性无关。



证明. 根据线性表示关系可知存在矩阵 $B \in \mathbb{F}^{r \times r}$ （未必可逆）使得

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B$$

$$\text{从而由线性无关性，方程 } \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

仅有零解。这表明 $Bx = 0$ 也仅有零解, B 一定可逆 (否则 $Bx = 0$ 已有非零解, 它也是原方程的非零解)。因此 B^{-1} 给出了 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 关于 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 的线性表示, 这两个向量组是等价的, 故 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 是线性无关的。□

作业 8.4 (Ch5 T34)

以向量组 $a_1 = (3, 1, 0), a_2 = (6, 3, 2), a_3 = (1, 3, 5)$ 为基, 求 $\beta = (2, -1, 2)$ 的坐标。

解 设 β 的坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 则

$$\beta = \sum_{i=1}^3 x_i a_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (-76, 41, -16)$ 。

作业 8.5 (Ch5 T35)

设 $a_1 = (3, 2, -1, 4), a_2 = (2, 3, 0, -1)$ 。

1. 将 a_1, a_2 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;
2. 给出标准基在该组基下的表示;
3. 求 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标。

解 题目给出的为行向量, 以下写法是为了和矩阵乘法相容。

1. 设扩充后的基为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 考虑对 $\begin{bmatrix} a_1^\top & a_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ 。

可见其任意两行都线性无关, 从而保证行向量无关性即可, 可取 $a_3 = (1, 0, 0, 0), a_4 = (0, 1, 0, 0)$ 。

2. 标准基在该组基下的表示为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix}$ 。

右边矩阵各列即各个标准基的坐标。

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 41 \\ 53 \end{bmatrix}$, 即 $\beta = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标为 $(-4, -14, 41, 53)$ 。

作业 8.6 (Ch5 T41)

判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间:

1. V 是实数对 (x, y) 的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$, 定义 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \lambda(x, y) = (x, y)$ 。
2. V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$ 。定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法。
3. V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合, 数域 $F = \mathbb{R}$ 。定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法。
4. V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘。

解

1. 否。若是, 注意到任意 (x, y) , 根据数乘分配律 $(x, y) = 2(x, y) = (x, y) + (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$, 这表明该空间若视为线性空间, 则只能是零空间, 但本题的空间是不平凡的。
2. 是。依照定义逐条验证即可。
3. 否。若是, 则注意到 $f = 1, g = -1$ 为两个 V 中的元素, 但 $f + g = 0$ 不是。
4. 否。若是, 则注意到可逆方阵 $A, -A$ 为两个 V 中的元素, 但 $A + (-A) = O$ 不是。

作业 8.7 (Ch5 T42)

设 V 是所有实函数在实数域上构成的线性空间, 判断 V 中下列函数组是否线性相关。

1. $1, x, \sin x$
2. $1, x, e^x$
3. $1, \cos 2x, \cos^2 x$
4. $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$
5. $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$

解

1. 否。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 \sin x = 0$ 。令 $x = 0, \pi$, 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 从而 λ_3 也为 0, 因此线性无关。
2. 否。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得 $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x = 0$ 。令 $x \rightarrow -\infty$, 可得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 从而 λ_3 也为 0, 因此线性无关。
3. 是。存在线性组合系数 $1, 1, -2$ 使得 $1 \cdot 1 + 1 \cdot \cos 2x + (-2) \cdot \cos^2 x = 0$, 因此线性相关。
4. 是。存在线性组合系数 $2, 6, 1, -1$ 使得 $2 \cdot 1 + 6 \cdot x^2 + 1 \cdot (x-1)^3 + (-1) \cdot (x+1)^3 = 0$, 因此线性相关。
5. 否。设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 使得 $\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx = 0$, 注意到

$$\lambda_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ix (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx) dx = 0$$

因此该向量组线性无关。

作业 8.8 (Ch5 T44)

设 $F_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间。

1. 证明: $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}$ 构成 $F_n[x]$ 的一组基;
2. 求 S 到基 $T = \{1, x, \dots, x^n\}$ 的过渡矩阵;
3. 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in F_n[x]$ 在基 S 下的坐标。

解

1. 显然 $\dim F_n[x] = n+1$, 故仅需证明 S 线性无关。设 $P(x) = \sum_{i=0}^n c_i (x-i)^i = 0$, 则 $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n c_i \frac{i!}{(i-k)!} (x-1)^{i-k}$, 从而 $P^{(k)}(1) = c_k k! = 0 \Rightarrow c_k = 0, \forall k$, 故 S 线性无关。

2. 设过渡矩阵为 $P, Q = P^{-1} = (q_{ij})_{(n+1) \times (n+1)}$, 则有 q_{ij} 为 $(x-1)^{j-1}$ 的 $i-1$ 次项系数, 为 $\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i}$, 其中

$$1 \leq i, j \leq n+1, \text{ 故 } Q = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(-1)^0 & \binom{1}{0}(-1)^1 & \binom{2}{0}(-1)^2 & \cdots & \binom{n}{0}(-1)^n \\ 0 & \binom{1}{1}(-1)^0 & \binom{2}{1}(-1)^1 & \cdots & \binom{n}{1}(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(-1)^0 & \cdots & \binom{n}{2}(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n}(-1)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{对应 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 即求 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 在 $x=1$ 处的 Taylor 展开 $p(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x-1)^i$ 系数 $\{b_i\}$, 其有显式表达式 $b_i = \frac{p^{(i)}(1)}{i!} = \sum_{j=i}^n a_j \frac{j!}{(j-i)!i!} = \sum_{j=i}^n a_j \binom{j}{i}$, 其中 $0 \leq i \leq n$ 。

第九章 第九次作业

作业 9.1 (Ch5 T40)

已知 $\mathbb{F}^5$ 中向量 $a_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^\top, a_2 = (1, 3, 2, 1, 2)^\top$, 求找一个齐次线性方程组使得 a_1 与 a_2 为该方程组的基础解系。

解 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times 5}$ 为该方程组的系数矩阵, 则有 $Ax = 0 \Leftrightarrow PAx = 0$, 其中 P 为任意可逆方阵, 则根据 Gauss 消元法可取 P 使得 PA 仅有前 $r = \text{rank}(A)$ 行非零, 即可不妨设 A 为行满秩的, 且 A 的行秩满足 $5 - r = 2$, 即 $r = 3$ 。现考虑 $A(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2)^\top A^\top = 0$, 此时 $A^\top$ 的列秩为 3, 而根据方程 $(a_1, a_2)^\top x = 0$ 的基础解系中解向量个数为 $5 - 2 = 3$, 从而可求解它的基础解系, 得到三个线性无关的向量构成 $A^\top$ 的列向量。于是可取

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 这是一个满足条件的系数矩阵。}$$

作业 9.2 (Ch5 T45)

V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对称方阵全体, 定义加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘。证明: V 为线性空间, 并求它的一组基和维数。

证明. 只用验证 V 为 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的子空间, 而对任意矩阵 $A, B \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$(\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda(A)_{ij} + \mu(B)_{ij} = \lambda(A)_{ji} + \mu(B)_{ji} = (\lambda A + \mu B)_{ji}$$

从而可得 V 对向量的加法和数乘封闭, 其为 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的子空间, 且对 $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) + \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}$$

可由向量组 $\{E_{ii} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 线性表示, 且 $A = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$, 这表明线性表示唯一, 故它们构成了 V 的一组基, 维数为 $\frac{n^2+n}{2}$ 。□

作业 9.3 (Ch5 T47)

$V = \mathbb{F}^{n \times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间, 令 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有满足 $\text{tr}(A) = 0$ 的 n 阶矩阵 A 的全体。证明: W 为 V 的线性子空间, 并求 W 的一组基和维数。

解 $\forall A, B \in W, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \text{tr}(\lambda A) + \text{tr}(\mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) = 0$$

从而 $\lambda A + \mu B \in W$, 故 W 对矩阵的加法和数乘封闭, 其为 V 的子空间。而对于 $\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in W$, 有 $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$, 从而

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} (E_{ii} - E_{nn}) a_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} a_{ij}$$

这表明了 A 可被向量组 $\{E_{ii} - E_{nn} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{E_{ij} \mid i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 线性表示, 且它们是线性无关的, 从而它为一组基, 维数为 $n^2 - 1$ 。

作业 9.4 (Ch6 T13)

求下列矩阵的全部特征值和全部特征向量：

$$2. A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$4. B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6. D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解

$$2. p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$$

$\Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$, 即特征值为 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 。

对 $\lambda_1 = e^{i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_1 I - A)x = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, 解方程组 $(\lambda_2 I - A)x = \begin{bmatrix} -i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

因此全部特征值和特征向量为 $\lambda_1 = e^{i\theta}, x_1 = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0, \lambda_2 = e^{-i\theta}, x_2 = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

$$4. p_B(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^3, \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \text{ 即特征值为 } 2 \text{ (三重)}。$$

解方程组 $(2I - B)x = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2$ 不同时为 0。

$$5. p_C(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2, \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \text{ 即特征值为 } 4 \text{ 和 } 1 \text{ (二重)}。$$

对 $\lambda_1 = 4$, 解方程组 $(4I - C)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程组 $(1I - C)x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 故特征向量为

$$t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \text{ 不同时为 } 0。$$

$$6. p_D(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda^2-2),$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \sqrt{2}, \lambda_4 = -\sqrt{2}$, 即特征值为 2 (二重), $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 。

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解方程组 $(2I - D)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 故特征向量为

$$t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_1, t_2 \text{ 不同时为 } 0。$$

对 $\lambda_3 = \sqrt{2}$, 解方程组 $(\sqrt{2}I - D)x = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$, 故特征向

量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

对 $\lambda_4 = -\sqrt{2}$, 解方程组 $(-\sqrt{2}I - D)x = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -\sqrt{2}-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -\sqrt{2}-1 \end{bmatrix} x = 0$, 得 $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

故特征向量为 $t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \neq 0$ 。

作业 9.5 (Ch6 T15)

设 A 是可逆方阵, 证明: 若 λ 是 A 的特征值, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且对应的特征向量相同。



证明. 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 两边同乘以 A^{-1} , 得 $x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$. 故 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且对应的特征向量为 x . □

作业 9.6 (Ch6 T16)

设 A 为方阵, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: 如果 λ_0 是 A 的特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值; 且如果 x 是属于 λ_0 的特征向量, 则 x 也是矩阵 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。



证明. 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 对 A 的特征值 λ_0 , 其特征向量为 x , 则有 $Ax = \lambda_0 x \Rightarrow A^m x = A^{m-1} \lambda_0 x = \cdots = \lambda_0^m x$. 此时 $f(A)x = \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i \right) x = \sum_{i=0}^n a_i A^i x = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i x = \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i \right) x = f(\lambda_0)x$, 即 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量. $\square$

作业 9.7 (Ch6 T17)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $3A + 2I$ 的特征值与行列式.

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 故 $3A + 2I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 5, \tilde{\lambda}_3 = 8$, $\det(3A + 2I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 200$.

作业 9.8 (Ch6 T18)

1. 若 $A^2 = I$, 证明: A 的特征值只能是 ± 1 ;
2. 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^\top = -A$, 证明 A 的特征值为零或纯虚数.

证明. 1. 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $0 = (A^2 - I)x = A^2 x - x = (\lambda^2 - 1)x = 0$, 由 $x \neq 0$ 即有 $\lambda = \pm 1$.

2. 设 λ 是 A 的特征值, 对应特征向量为 x , 则 $Ax = \lambda x$, 取共轭转置, $\bar{\lambda}x^H = x^H A^\top = -x^H A \Rightarrow \bar{\lambda}x^H x = -x^H A^\top x = -x^H \lambda x \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})x^H x = 0$. 又由 $x \neq 0$ 有 $x^H x = |x|^2 \neq 0$, 故 $\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$, 即 λ 是零或纯虚数. $\square$

作业 9.9 (Ch6 T19)

设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明: $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

证明. 若 $x_1 + x_2$ 是 A 的特征向量, 则存在特征值 λ , 使得 $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$. 又由 $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$ 可得 $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. 故 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0$. 由于 x_1, x_2 线性无关, 故 $\lambda_1 - \lambda = 0, \lambda_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, 与 λ_1, λ_2 不同矛盾. 因此 $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量. $\square$

第十章 第十次作业

作业 10.1 (Ch6 T1)

判断下面所定义的变换 $\mathcal{A}$, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

(1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathcal{A}(x, y)^\top = (x + y, x^2)^\top$;

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (3x - 2y + z, 0, x + 2y)^\top$;

(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (x - y, z, x + 1)^\top$.

解 容易判断 (1)(3) 不是线性变换, (2) 是线性变换。

作业 10.2 (Ch6 T20)

设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 证明: $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$ 。

证明. 显然 A^2 的全部特征值为 $\lambda_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, 故 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_{ji}$. $\square$

作业 10.3 (Ch6 T21)

判断以下矩阵 A, B 是否相似? 请说明理由。

$$(2)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

解 由于 $(A - I)^2 \neq O, (B - I)^2 = O$, 故 A, B 不相似。

作业 10.4 (Ch6 T24)

设 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 证明: $\text{diag}(A, C)$ 与 $\text{diag}(B, D)$ 相似。反之是否成立?

解 设 P, Q 分别为可逆矩阵, 使得 $B = PAP^{-1}, D = QCQ^{-1}$, 则有 $\text{diag}(B, D) = \text{diag}(P, Q) \text{diag}(A, C) \text{diag}(P^{-1}, Q^{-1})$, 故 $\text{diag}(A, C)$ 与 $\text{diag}(B, D)$ 相似。

反之不成立, 例如 $A = [1], B = [2], C = [2], D = [1]$, 则 $\text{diag}(A, C) \sim \text{diag}(B, D)$, 但 $A \not\sim B, C \not\sim D$ 。

作业 10.5 (Ch6 T26)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x, y 应满足的条件。

解 $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$ 。

A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。

A 有三个线性无关的特征向量当且仅当 A 可对角化, 即特征值 $\lambda = 1$ 的几何重数为 2, 从而 $\text{rank}(I - A) = 3 - 2 = 1$ 。

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。为使其秩为 1, 第二行必须是第一行的倍数, 即 $-x = -(-y)$, 从而 $x + y = 0$ 。

作业 10.6 (Ch6 T27)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似。

1. 求 x 和 y 的值;
2. 求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = B$ 。

解

1. 由于 A 和 B 相似, 它们的迹与行列式均相等, 或者直接利用它们的特征多项式相等。 B 是对角阵, 其

特征值为 $-1, 2, y$ 。 A 的特征多项式为 $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 2)[(\lambda - x)(\lambda - 1) - 2] =$

$(\lambda + 2)(\lambda^2 - (x+1)\lambda + x - 2)$ 。可见 A 有一个特征值为 -2 。由于 A 与 B 相似, 特征值相同, 因此 B 的特征值必定包含 -2 , 故 $y = -2$ 。若 $y = -2$, 则 A 剩余的特征值必须为 -1 和 2 , 所以 $\lambda^2 - (x+1)\lambda + x - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2$ 。比较系数得到 $x + 1 = 1$ 且 $x - 2 = -2$, 解得 $x = 0, y = -2$ 。

2. 由第一问知 $x = 0$, 此时 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。 $B = \text{diag}(-1, 2, -2)$ 。为寻找相似变换矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = B$, 我们

需要按 B 对角线元素的顺序 ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$) 求 A 的特征向量。对于 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(-I - A)v = 0$:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} v = 0 \implies v_1 = 0, v_2 + 2v_3 = 0$, 取 $v_3 = 1$, 得特征向量 $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。对于 $\lambda_2 = 2$, 求解

$(2I - A)v = 0$: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \implies v_1 = 0, v_2 - v_3 = 0$, 取 $v_3 = 1$, 得特征向量 $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。对于 $\lambda_3 = -2$,

求解 $(-2I - A)v = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} v = 0 \implies v_1 + v_2 + v_3 = 0$ 且 $3v_1 + v_2 + 3v_3 = 0$, 解得 $v_2 = 0, v_1 + v_3 = 0$,

取 $v_1 = 1$, 得特征向量 $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。因此, 可逆矩阵 $T = [p_1, p_2, p_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

作业 10.7 (Ch6 T28)

设 n 阶矩阵 $A \neq 0$ 满足 $A^m = O$, 其中 $m \geq 2$ 是正整数。

1. 求 A 的特征值;
2. 证明 A 不能相似于对角阵;
3. 证明 $\det(I + A) = 1$ 。

解

1. 设 λ 是 A 的特征值, 存在非零向量 x 使得 $Ax = \lambda x$ 。则 $A^m x = \lambda^m x = 0$ 。由于 $x \neq 0$, $\lambda^m = 0$, 解得 $\lambda = 0$ 。故 A 的特征值全为 0。
2. 假设 A 相似于对角阵 Λ , 由于 A 的特征值全为 0, 必有 $\Lambda = O$ 。从而 $A = P\Lambda P^{-1} = O$, 这与已知 $A \neq O$ 矛盾。故 A 不能相似于对角阵。
3. 由于 A 的特征值全为 0, $I+A$ 的特征值全为 $1+0=1$ 。矩阵的行列式等于其所有特征值之积, 故 $\det(I+A) = 1^n = 1$ 。

作业 10.8 (Ch6 T29)

判断下面矩阵 A 是否可对角化? 若可以, 求变换矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是对角阵。

$$1. A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

解

$$1. A \text{ 的特征多项式为 } \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 2)[\lambda(\lambda - 1) - 2] = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ 。由于这三个特征值各不相同, 因此 A 可对角化。对应特征向量的求解:

$$\text{对于 } \lambda_1 = -2, \text{ 解 } (-2I - A)x = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{对于 } \lambda_2 = -1, \text{ 解 } (-I - A)x = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{对于 } \lambda_3 = 2, \text{ 解 } (2I - A)x = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} x = 0, \text{ 得 } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{因此, 变换矩阵 } T = [p_1, p_2, p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 使得 } T^{-1}AT = \text{diag}(-2, -1, 2) \text{ 是对角阵.}$$

$$3. A \text{ 的特征多项式为 } \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 & 8 \\ 4 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 2)[(\lambda - 3)(\lambda + 1) - (-4)] = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) =$$

$(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ 。 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。对于 $\lambda = 1$, 考察矩阵 $I - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。通过初等行变换可以看出, 其秩为 2 (第一行和第三行线性相关, 与第二行线性无关)。因此该特征值对应的几何重数为 $3 - 2 = 1$, 小于其代数重数 2。故该矩阵 A 不能对角化。

作业 10.9 (Ch6 T31)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I$, 证明 A 相似于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$, 其中 $0 \leq r \leq n$ 。

证明. A 满足多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$. 由于 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ 只有单根, 所以 A 的极小多项式无重根, 从而 A 可对角化。

A 的特征值只能是 1 或 -1 . 设特征值 1 的重数为 $r (0 \leq r \leq n)$, 则特征值 -1 的重数为 $n - r$. 因此 A 相似于对角阵 $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$. □

作业 10.10 (Ch6 T32)

设 A 是 3 阶实方阵, 若 A 不相似与上三角阵, 问 A 是否一定复相似与对角阵?

解 一定. A 是 3 阶实矩阵, 其特征多项式是 3 次实系数多项式, 故至少有一个实根. 又因 A 不能实相似于上三角阵, 说明 A 的特征值不全为实数, 因此剩余两个特征值是一对共轭的非实复数。

这意味着 A 的三个特征值 (一个实数, 两个非实复数) 互不相同. 因为无重根, 所以 A 在复数域上一定可对角化, 即复相似于对角阵。

作业 10.11 (Ch6 T33)

设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $f(\lambda)$ 为多项式, 证明: $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$, 由此 $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$.

证明. 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PTP^{-1}$, 其中 T 是上三角矩阵, 且 T 的对角线元素为 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

由于 $f(\lambda)$ 是多项式, 可以直接作用于矩阵 A , 直接计算可以得到 $f(A) = f(PTP^{-1}) = Pf(T)P^{-1}$.

由于 T 是上三角矩阵, 多项式 $f(T)$ 也将是上三角矩阵. 具体地, $f(T)$ 的对角线元素为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$,

$$\text{即 } f(T) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

由于 $f(A) = Pf(T)P^{-1}$, 且 $f(T)$ 是上三角矩阵, 其对角线元素为 $f(\lambda_i)$, 可以得出 $f(A)$ 的特征值也是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$.

方阵的行列式等于其特征值的乘积. 因此, $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$. □

作业 10.12 (Ch6 T34)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 求方阵 $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值与行列式。

解 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, $A^3 - 2A + 3I$ 的特征值为 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = 2, \tilde{\lambda}_3 = 7$, $\det(A^3 - 2A + 3I) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 28$.

作业 10.13 (Ch6 T35)

判断下边定义的变换, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

1. 取定 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 对每个 $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 定义 $\mathcal{A}(X) = AX - XB$;
2. 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}(x) = \alpha$, 其中 α 是 V 中的一个固定向量。

解

1. 线性变换. 对于任意 $X, Y \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 和 $k \in \mathbb{F}$, 有 $\mathcal{A}(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)B = (AX - XB) + (AY - YB) = \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y)$; 且 $\mathcal{A}(kX) = A(kX) - (kX)B = k(AX - XB) = k\mathcal{A}(X)$.
2. 当且仅当 $\alpha = 0$ 时为线性变换; 当 $\alpha \neq 0$ 时不是线性变换, 因为此时 $\mathcal{A}(0) = \alpha \neq 0$, 不满足线性变换保零元的性质。

第十一章 第十一次作业

作业 11.1 (Ch6 T36)

求下列线性变换在指定的基下的矩阵:

3. 给定 2 阶实方阵 A , 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathcal{A}(x) = Ax - xA$ 在基

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

下的矩阵.



解 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 分别计算基底在变换 $\mathcal{A}$ 下的像:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = -a_{12}e_2 + a_{21}e_3, \\ \mathcal{A}(e_2) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = -a_{21}e_1 + (a_{11} - a_{22})e_2 + a_{21}e_4, \\ \mathcal{A}(e_3) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix} = a_{12}e_1 + (a_{22} - a_{11})e_3 - a_{12}e_4, \\ \mathcal{A}(e_4) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{12}e_2 - a_{21}e_3. \end{aligned}$$

因此, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 11.2 (Ch6 T38)

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 将

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^\top, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^\top$$

变换到

$$\beta_1 = (2, 3, 5)^\top, \quad \beta_2 = (1, 0, 0)^\top, \quad \beta_3 = (0, 1, -1)^\top.$$

求 $\mathcal{A}$ 在自然基和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。



解 设自然基为 e_1, e_2, e_3 . 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 容易求出 P 的逆矩阵

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $\mathcal{A}([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 即在自然基下, 若设变换矩阵为 M , 有 $MP = B$. 因此 $\mathcal{A}$ 在自然基下的矩阵为

$$M = BP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

而在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下, $\mathcal{A}$ 的矩阵 M_α 满足 $[\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]M_\alpha$. 显然 $B = PM_\alpha$, 故其矩阵为

$$M_\alpha = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 11.3 (Ch6 T39)

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (1, 1)$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (-1, 1)$ 下的矩阵。



解 设过渡矩阵为 T , 即 $[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2]T$. 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [\beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 则

$$T = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由变换公式, $M_\beta = T^{-1}M_\alpha T$, 其中 $M_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 从而 $\mathcal{A}$ 在基 β 下的矩阵为

$$M_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

作业 11.4 (Ch6 T40)

设 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵:

1. $\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2$;
2. $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$.



解

1. 基之间的过渡矩阵 T 满足 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]T$, 即 $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 此为置换矩阵, 其逆为 $T^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。因此 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为

$$M_1 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 过渡矩阵 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。在此基下矩阵为

$$M_2 = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

作业 11.5 (Ch6 T41)

在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 0, 1)^T, & \alpha_2 &= (2, 1, 0)^T, & \alpha_3 &= (1, 1, 1)^T; \\ \beta_1 &= (2, 3, 1)^T, & \beta_2 &= (7, 9, 5)^T, & \beta_3 &= (3, 4, 3)^T. \end{aligned}$$

定义线性变换 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$)。

1. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵;
2. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵。

解

1. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ 。容易算得 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。由于 $\mathcal{A}([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下矩阵为 M_α , 则由 $[\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]M_\alpha$ 得到 $B = AM_\alpha$, 从而

$$M_\alpha = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. 设由基 α 到基 β 的过渡矩阵为 T , 即 $B = AT$, 可得 $T = A^{-1}B = M_\alpha$ 。由相似变换公式, $\mathcal{A}$ 在 β 基下的矩阵 $M_\beta = T^{-1}M_\alpha T = M_\alpha^{-1}M_\alpha M_\alpha = M_\alpha$ 。故

$$M_\beta = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

作业 11.6 (Ch6 T42)

设 V 为 n 维线性空间, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 为线性变换。若存在 $\alpha \in V$, 使得 $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0$, 但是 $\mathcal{A}^n(\alpha) = 0$ 。证明:

$\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

证明. 令 $\alpha_i = \mathcal{A}^{n-i}(\alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 首先证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关: 设存在常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = c_1\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) + c_2\mathcal{A}^{n-2}(\alpha) + \cdots + c_n\alpha = 0.$$

等式两边同取 $\mathcal{A}^{n-1}$, 由于对于 $k \geq n$, $\mathcal{A}^k(\alpha) = 0$, 故除了最后项 $c_n\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)$ 对应外均消去, 得到 $c_n\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) = 0$. 因为 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 必然 $c_n = 0$. 以此类推, 对等式不断作用 $\mathcal{A}^{n-k}$, 即可依次证得 $c_{n-1} = 0, \dots, c_1 = 0$. 因此这 n 个向量线性无关, 构成 V 的一组基. 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下, $\mathcal{A}(\alpha_1) = \mathcal{A}^n(\alpha) = 0$, 且当 $i > 1$ 时 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \mathcal{A}^{n-i+1}(\alpha) = \alpha_{i-1}$, 所以

$$[\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)] = [0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

命题得证. □

作业 11.7 (Ch6 T43)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基, 证明: 对于任意 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in V$, 存在线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

证明. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 对于任意 $x \in V$, 存在唯一的坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得 $x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$. 定义变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 为 $\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i$. 该映射良定义. 接着证明 $\mathcal{A}$ 是线性变换: 对任意 $x, y \in V, k \in \mathbb{F}$, 设 $x = \sum x_i \alpha_i, y = \sum y_i \alpha_i$, 则 $kx + y = \sum (kx_i + y_i) \alpha_i$. 有 $\mathcal{A}(kx + y) = \sum (kx_i + y_i) \beta_i = k \sum x_i \beta_i + \sum y_i \beta_i = k\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$. 故 $\mathcal{A}$ 为线性变换. 又由于 $\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_i + \cdots + 0\alpha_n$, 故 $\mathcal{A}(\alpha_i) = 1\beta_i = \beta_i$. 命题得证. □

作业 11.8 (Ch6 T44)

设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间, 线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 满足

$$\mathcal{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathcal{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathcal{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求 $\mathcal{A}$ 的特征值和特征向量.

解 取基底为 $1, x, x^2$. 计算基底在该变换下的像, 转化为坐标表示:

$$\mathcal{A}(1) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

$$\mathcal{A}(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\mathcal{A}(x^2) = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2$$

故 $\mathcal{A}$ 在此基下的表示矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。求 A 的特征值, 解特征方程: $|\lambda I - A| = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} =$

$(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 - (\lambda - 2) - 3(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0$ 。特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ 。

对应特征向量的求解: 对于 $\lambda_1 = 2$, 解 $(A - 2I)v = 0$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$ 。可取 $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 对应多项式为

$x^2 - 3x$ 。对于 $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$, 解 $(A - \lambda_2 I)v = 0$, 化简可得 $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 对应多项式为 $x^2 + x + \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 。对于 $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$,

解 $(A - \lambda_3 I)v = 0$, 可得 $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 对应多项式为 $x^2 + x + \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ 。

作业 11.9 (Ch6 T45)

设 $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

1. 证明: V 的变换 $\mathcal{A}: x \rightarrow x^T$ 是线性变换;
2. 求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量。 $\mathcal{A}$ 是否可对角化?

解

1. 对于任意 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及 $k \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}(kX + Y) = (kX + Y)^T = kX^T + Y^T = k\mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y).$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性变换。

2. 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, $X \neq O$ 为对应特征向量, 则 $\mathcal{A}(X) = \lambda X$, 即 $X^T = \lambda X$ 。两边再取转置, 可得 $(X^T)^T = (\lambda X)^T \implies X = \lambda X^T = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$ 。由于 $X \neq O$, 必有 $\lambda^2 = 1$, 所以特征值为 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$ 。
对于 $\lambda = 1$, 特征向量满足 $X^T = X$, 即 X 是所有的非零对称矩阵; 对于 $\lambda = -1$, 特征向量满足 $X^T = -X$, 即 X 是所有的非零反对称矩阵。

由于任意矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 都可以唯一分解为对称阵与反对称阵之和 ($X = \frac{X+X^T}{2} + \frac{X-X^T}{2}$), 故对称矩阵子空间与反对称矩阵子空间直和即为全空间 V 。这说明几何重数等于代数重数之和为 $n^2 = \dim(V)$, 因此 $\mathcal{A}$ 是可以对角化的。

第十二章 第十二次作业

作业 12.1 (Ch7 T3)

设 x, y 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个向量, 它们之间的夹角为 θ 。证明:

1. (余弦定理) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$ 。
2. (平行四边形定理) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ 。
3. (菱形对角线定理) 若 $\|x\| = \|y\|$, 则 $(x + y) \perp (x - y)$ 。

证明. 1. 由内积定义,

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle.$$

又因为 x, y 的夹角为 θ , 所以

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta.$$

代入得

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos \theta.$$

2. 直接计算:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= (\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) + (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

3. 若 $\|x\| = \|y\|$, 则

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$

因此 $(x + y) \perp (x - y)$ 。

□

作业 12.2 (Ch7 T5)

用 Schmidt 正交化方法构造标准正交向量组:

1. $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$;
2. $(1, 1, 1, 2), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$ 。

解 设两问中给出的向量依次为 a_1, a_2, a_3 。

1. 先对

$$a_1 = (0, 0, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 1)$$

做 Gram-Schmidt 正交化。

取

$$b_1 = a_1 = (0, 0, 1).$$

则

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = (0, 1, 1) - 1 \cdot (0, 0, 1) = (0, 1, 0).$$

再有

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = (1, 1, 1) - (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, 0, 0).$$

这三个向量已经都是单位向量，因此一组标准正交向量组为

$$(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).$$

2. 对

$$a_1 = (1, 1, 1, 2), \quad a_2 = (1, 1, -5, 3), \quad a_3 = (3, 2, 8, -7)$$

做 Gram-Schmidt 正交化。

先取

$$b_1 = a_1 = (1, 1, 1, 2).$$

因为

$$\langle a_2, b_1 \rangle = 3, \quad \langle b_1, b_1 \rangle = 7,$$

所以

$$a_2 - \frac{3}{7} b_1 = \frac{1}{7} (4, 4, -38, 15).$$

去掉公因子后可取

$$b_2 = (4, 4, -38, 15).$$

再由 Gram-Schmidt 公式可得第三个正交向量可取为

$$b_3 = (986, 743, -133, -798).$$

直接计算可得

$$\langle b_1, b_1 \rangle = 7, \quad \langle b_2, b_2 \rangle = 1701, \quad \langle b_3, b_3 \rangle = 2178738 = 81 \cdot 26898.$$

因而标准化后得到一组标准正交向量组

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} (1, 1, 1, 2),$$

$$u_2 = \frac{1}{9\sqrt{21}} (4, 4, -38, 15),$$

$$u_3 = \frac{1}{9\sqrt{26898}} (986, 743, -133, -798).$$

作业 12.3 (Ch7 T6)

设在 $\mathbb{R}^3$ 中，基 a_1, a_2, a_3 的度量矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

试求 $\mathbb{R}^3$ 中由 a_1, a_2, a_3 表示的一组标准正交基。



解 设所求标准正交基为 e_1, e_2, e_3 ，并用基 a_1, a_2, a_3 来表示它们。

由题设度量矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可知

$$\langle a_1, a_1 \rangle = 1, \quad \langle a_2, a_2 \rangle = 2, \quad \langle a_3, a_3 \rangle = 2,$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = 0, \quad \langle a_2, a_3 \rangle = 0, \quad \langle a_1, a_3 \rangle = -1.$$

取

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, \quad e_3 = a_1 + a_3.$$

则

$$\|e_1\|^2 = \langle a_1, a_1 \rangle = 1, \quad \|e_2\|^2 = \frac{1}{2}\langle a_2, a_2 \rangle = 1, \quad \|e_3\|^2 = \langle a_1 + a_3, a_1 + a_3 \rangle = 1 + 2 - 2 = 1.$$

又

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_1, a_2 \rangle = 0,$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle a_1, a_1 + a_3 \rangle = 1 - 1 = 0,$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_2, a_1 + a_3 \rangle = 0.$$

所以 e_1, e_2, e_3 是一组标准正交基。

因而所求一组标准正交基为

$$a_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, \quad a_1 + a_3.$$

作业 12.4 (Ch7 T8)

验证下列向量是正交的，并添加向量改造为标准正交基：

2. $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$ 。

解 先验证正交性：

$$(1, 1, 1, 2) \cdot (1, 2, 3, -3) = 1 + 2 + 3 - 6 = 0.$$

先添加与它们都正交的向量 $v_3 = (1, -2, 1, 0)$ ，因为

$$(1, 1, 1, 2) \cdot (1, -2, 1, 0) = 0, \quad (1, 2, 3, -3) \cdot (1, -2, 1, 0) = 0.$$

再取向量 $v_4 = (-25, -4, 17, 6)$ ，直接验证可得它与前面三个向量都正交。

于是可得一组两两正交的向量组

$$(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3), (1, -2, 1, 0), (-25, -4, 17, 6).$$

又

$$\|(1, 1, 1, 2)\| = \sqrt{7}, \quad \|(1, 2, 3, -3)\| = \sqrt{23}, \quad \|(1, -2, 1, 0)\| = \sqrt{6}, \quad \|(-25, -4, 17, 6)\| = \sqrt{966}.$$

因而一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2), \quad \frac{1}{\sqrt{23}}(1, 2, 3, -3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{966}}(-25, -4, 17, 6).$$

作业 12.5 (Ch7 T11)

设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, $x_1, x_2, \dots, x_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意 k 个向量, 试证: $x_1, x_2, \dots, x_k$ 两两正交的充分必要条件是

$$\sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$$

证明. 由于 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 所以每个向量 x_i 都可唯一写成

$$x_i = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

因而对任意 $i \neq j$, 有

$$\langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \sum_{t=1}^n \langle x_j, e_t \rangle e_t \right\rangle = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_t \rangle \langle e_s, e_t \rangle.$$

因为 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是标准正交基, 故

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 1, & s = t, \\ 0, & s \neq t. \end{cases}$$

所以上式化为

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle.$$

因此, $x_1, x_2, \dots, x_k$ 两两正交当且仅当对任意 $i \neq j$ 都有

$$\sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle = 0.$$

□

作业 12.6 (Ch7 T12)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。证明:

1. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle$ 。
2. 对任意 $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2$ 。

证明. 因为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一组标准正交基, 所以任意 $a \in \mathbb{R}^n$ 都有展开式

$$a = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle a_i.$$

1. 对任意 $a, b \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle a_i, b \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle a_i, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle.$$

2. 令 $b = a$, 由第 1 问立得

$$\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2.$$

□

作业 12.7 (Ch7 T13)

证明二阶正交矩阵必取下面两种形式之一：

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

证明. 设二阶正交矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

因为 A 是正交矩阵, 所以它的两行向量是两条互相正交的单位向量。

第一行 (a, b) 是单位向量, 因此存在 $\theta \in [-\pi, \pi)$, 使得

$$(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

第二行 (c, d) 与第一行正交, 所以

$$c \cos \theta + d \sin \theta = 0.$$

解得

$$(c, d) = t(\sin \theta, -\cos \theta).$$

又第二行也是单位向量, 于是 $t = \pm 1$ 。

当 $t = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix};$$

当 $t = -1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

因此二阶正交矩阵必取题中两种形式之一。 □

作业 12.8 (Ch7 T14)

写出所有 3 阶正交矩阵, 它的元素是 0 或 1。

解 设三阶正交矩阵为 $Q = (q_{ij})$, 且每个元素都只能是 0 或 1。

因为 Q 是正交矩阵, 所以它的每一行都是单位向量, 且任意两行正交。对于只含 0, 1 的行向量来说, 其平方和等于该行中 1 的个数。要成为单位向量, 每一行必须恰有一个 1。同理, 每一列也必须恰有一个 1。

因而 Q 恰好是三阶置换矩阵, 所以全部可能的矩阵就是 $3! = 6$ 个:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

作业 12.9 (Ch7 T19)

给定三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。求 A 的 QR 分解。

解 设 A 的列向量分别为

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用 Gram-Schmidt 方法正交化。

先取

$$u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

再有

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

因而

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

又

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令

$$Q = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

则

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{21}{\sqrt{105}} & \frac{6}{\sqrt{105}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

因而 A 的 QR 分解为

$$A = QR.$$

第十三章 第十三次作业

作业 13.1 (Ch7 T24)

设 a 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量。定义线性变换: $\mathcal{A}b = b - 2\langle a, b \rangle a$ 。证明: $\mathcal{A}$ 为正交变换, 并找 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵。

解 先证 $\mathcal{A}$ 为正交变换。对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\mathcal{A}(x) = x - 2\langle a, x \rangle a.$$

因为 $\|a\| = 1$, 所以

$$\|\mathcal{A}(x)\|^2 = \langle x - 2\langle a, x \rangle a, x - 2\langle a, x \rangle a \rangle = \|x\|^2 - 4\langle a, x \rangle^2 + 4\langle a, x \rangle^2 \|a\|^2 = \|x\|^2.$$

因而 $\mathcal{A}$ 保持长度, 所以是正交变换。

再找一组使它对角化的标准正交基。取 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基

$$a, e_2, e_3, \dots, e_n,$$

其中 $e_2, e_3, \dots, e_n \in a^\perp$ 。则

$$\mathcal{A}(a) = a - 2\langle a, a \rangle a = -a,$$

而对 $i = 2, 3, \dots, n$, 因为 $\langle a, e_i \rangle = 0$, 所以

$$\mathcal{A}(e_i) = e_i.$$

故在基

$$a, e_2, e_3, \dots, e_n$$

下, $\mathcal{A}$ 的矩阵为

$$\text{diag}(-1, 1, \dots, 1).$$

作业 13.2 (Ch7 T26)

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。由此求 A^k , k 是自然数。

解 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

是实对称矩阵, 所以可正交对角化。

计算特征多项式得

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

因而特征值为

$$5, \quad 2, \quad -1.$$

分别可取对应特征向量为

$$x_1 = (1, -2, 2)^T, \quad x_2 = (-2, 1, 2)^T, \quad x_3 = (2, 2, 1)^T.$$

它们两两正交，且都有长度 3，所以单位化后得

$$e_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \quad e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T, \quad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T.$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

则 P 为正交矩阵，且

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(5, 2, -1).$$

于是

$$A^k = P \text{diag}(5^k, 2^k, (-1)^k) P^T.$$

计算可得

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{5^k + 4 \cdot 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{-2 \cdot 5^k - 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{2 \cdot 5^k - 4 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} \\ \frac{-2 \cdot 5^k - 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{4 \cdot 5^k + 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{-4 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} \\ \frac{2 \cdot 5^k - 4 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} & \frac{-4 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} & \frac{4 \cdot 5^k + 4 \cdot 2^k + (-1)^k}{9} \end{bmatrix}.$$

作业 13.3 (Ch7 T27)

证明：下列三个条件中只要有二个成立，另一个也必成立。

1. A 是对称的；
2. A 是正交的；
3. $A^2 = I$ 。

证明. 分别证明三种情形。

1. 若 A 是对称的且 A 是正交的，则

$$A^2 = AA^T = I.$$

2. 若 A 是正交的且 $A^2 = I$ ，则

$$A^{-1} = A,$$

而正交矩阵满足 $A^{-1} = A^T$ ，故

$$A = A^T,$$

即 A 是对称的。

3. 若 A 是对称的且 $A^2 = I$ ，则

$$A = A^{-1}.$$

又因为 $A = A^T$ ，所以

$$A^T = A^{-1},$$

从而

$$AA^T = I,$$

即 A 是正交的。

因此三个条件中只要有二个成立，另一个也必成立。 □

作业 13.4 (Ch7 T28(4))

求正交阵 T ，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解 对

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

有特征值

$$5, 2, -1.$$

对应单位特征向量可取

$$e_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T, \quad e_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T.$$

令

$$T = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = T^T AT = \text{diag}(5, 2, -1).$$

作业 13.5 (Ch7 T29)

设 A 为 n 阶实对称方阵，且 $A^2 = A$ 。证明：存在正交方阵 T 使得 $T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O)$ 。这里 $r = \text{rank}(A)$ 。 ◆

证明. 由

$$A^2 = A$$

得

$$A(A - I) = 0.$$

所以 A 的任一特征值 λ 必满足

$$\lambda^2 = \lambda,$$

即

$$\lambda = 0 \quad \text{或} \quad 1.$$

又因为 A 是实对称矩阵，所以由实对称矩阵的正交对角化定理，存在正交矩阵 T ，使得

$$T^{-1}AT = T^T AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中每个 λ_i 都是 0 或 1。

设其中有 r 个特征值等于 1, 其余 $n-r$ 个等于 0, 则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O).$$

由于对角矩阵的秩等于其非零对角元个数, 所以

$$r = \text{rank}(A).$$

故存在正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O),$$

其中 $r = \text{rank}(A)$ 。 □

作业 13.6 (Ch8 T1)

将下列二次型表示成矩阵形式

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$;
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$;
3. $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_1x_4 + 6x_2x_3 + 7x_2x_4 + 10x_3x_4$;
4. $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+2})^2$.

解

1. 只要把交叉项系数平分到对称矩阵的非对角元上即可, 因此

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} x.$$

2.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

3.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

4. 展开得

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i^2 - 2x_ix_{i+2} + x_{i+2}^2).$$

因而对应的对称矩阵是一个只在主对角线与第 2 条上、下副对角线非零的矩阵:

$$Q(x) = x^T Ax,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

更具体地说, A 的主对角元为

$$1, 1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1,$$

并且

$$a_{i,i+2} = a_{i+2,i} = -1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

其余元素全为 0。

作业 13.7 (Ch8 T2)

写出下列对称矩阵对应的二次型

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



解 设 $x = (x_1, x_2, \dots)^\top$, 则二次型由公式

$$Q(x) = x^\top A x$$

直接展开得到。

1.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

2.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2bx_1x_2 + 2bx_2x_3.$$

3.

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$$

作业 13.8 (Ch8 T6)

试证: 在实数域上, 对称矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 不相合。



证明. 设这两个矩阵在实数域上相合, 则存在可逆实矩阵

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

使得

$$P^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

左边就是

$$P^T P = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

因而应有

$$b^2 + d^2 = -1,$$

这在实数域上显然不可能。

所以不存在这样的可逆实矩阵 P , 故

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

在实数域上不相合。 □

作业 13.9 (Ch8 T7)

证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和。 ♣

证明. 因为 A 是实对称矩阵, 且 $\text{rank}(A) = r$, 所以存在正交矩阵 P , 使得

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P^T,$$

其中

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \neq 0.$$

记 p_i 为 P 的第 i 列, 则

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i p_i^T.$$

对每个 i , 矩阵

$$A_i = \lambda_i p_i p_i^T$$

显然是对称矩阵。

又因为 $p_i p_i^T$ 的列空间由向量 p_i 张成, 所以 $\text{rank}(p_i p_i^T) = 1$, 从而

$$\text{rank}(A_i) = 1.$$

因此 A 可以表示成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_r.$$

□

作业 13.10 (Ch8 T8)

设 A 是一个 n 阶方阵, 证明:

1. A 是反对称阵, 当且仅当对任一个 n 维向量 x , 有 $x^T A x = 0$;
2. 如果 A 为对称阵, 且对任一个 n 维向量 x , 有 $x^T A x = 0$, 那么 $A = 0$.

证明. 1. 先证必要性. 若 A 是反对称阵, 即 $A^T = -A$, 则对任意向量 x , 有

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T x = x^T (-A) x = -x^T A x.$$

所以

$$x^T A x = 0.$$

再证充分性. 若对任意向量 x 都有 $x^T A x = 0$, 取标准基向量 e_i , 得

$$e_i^T A e_i = a_{ii} = 0.$$

再取 $x = e_i + e_j$, 则

$$0 = (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}.$$

因而

$$a_{ji} = -a_{ij},$$

即 $A^T = -A$, 故 A 为反对称阵。

2. 由题设 A 是对称阵, 且对任意向量 x 有 $x^T A x = 0$. 由第 1 问可知, A 又是反对称阵, 因此

$$A^T = A = -A.$$

故

$$A = 0.$$

□

第十四章 第十四次作业

作业 14.1 (Ch8 T3(1))

用配方法将下列二次型化为标准形，并求相应的可逆线性变换

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

解

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

令

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_2 - x_3,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2.$$

由

$$x_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_3 = \frac{y_2 - y_3}{2},$$

得

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2.$$

因而相应可逆线性变换可写为

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} y.$$

作业 14.2 (Ch8 T3(4))

用配方法将下列二次型化为标准形，并求相应的可逆线性变换

$$Q = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

解

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 4\left(x_2 - \frac{x_3}{2}\right)^2 - 5x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 - \frac{x_3}{2}, \quad y_3 = x_3,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2.$$

逆变换为

$$x_1 = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}y_3, \quad x_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \quad x_3 = y_3.$$

作业 14.3 (Ch8 T4(1))

用初等变换法将下列二次型化成标准形，并求相应的可逆线性变换

$$Q = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$



解 由同步初等变换可把

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

化为对角阵

$$\text{diag} \left(2, \frac{5}{2}, -\frac{2}{5} \right).$$

因而标准形为

$$Q = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2.$$

对应的可逆线性变换可取

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y.$$

作业 14.4 (Ch8 T4(3))

用初等变换法将下列二次型化成标准形，并求相应的可逆线性变换

$$Q = x^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$



解 对应二次型为

$$Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

令

$$u = x_2 + x_3, \quad v = x_2 - x_3,$$

则

$$Q = 2x_1u - \frac{u^2 - v^2}{2} = 2x_1^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}(u - 2x_1)^2.$$

令

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_3, \quad y_3 = x_2 + x_3 - 2x_1,$$

则标准形为

$$Q = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

逆变换为

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 + \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_3 = y_1 + \frac{y_3 - y_2}{2}.$$

作业 14.5 (Ch8 T5(1))

求正交变换化下列实二次型为标准形

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$



解 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

它的特征值为

$$9, 0, 0.$$

可取对应标准正交特征向量为

$$e_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^\top, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^\top, \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 4, 5)^\top.$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3),$$

则

$$P^\top AP = \text{diag}(9, 0, 0),$$

故标准形为

$$Q = 9y_1^2.$$

作业 14.6 (Ch8 T5(3))

求正交变换化下列实二次型为标准形

$$Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$



解 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

它的特征值为

$$6, -3, -3.$$

可取标准正交特征向量为

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^\top, \\ e_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^\top, \quad e_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^\top.$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3),$$

则

$$P^\top AP = \text{diag}(6, -3, -3),$$

因而标准形为

$$Q = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2.$$

作业 14.7 (Ch8 T11(3))

确定以下二次曲线的类型、形状与位置。

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$



解 方程为

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

先把二次项写成平方:

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2.$$

取正交变换

$$u = \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, \quad v = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}},$$

则逆变换为

$$x = \frac{2u + v}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{-u + 2v}{\sqrt{5}}.$$

代入原方程得

$$5u^2 + 2\sqrt{5}u - 6\sqrt{5}v + 7 = 0.$$

再配方, 得

$$5\left(u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 6\sqrt{5}\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

令

$$U = u + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad V = v - \frac{1}{\sqrt{5}},$$

则最简形式为

$$U^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}V.$$

所以它是一条抛物线, 顶点对应于

$$U = 0, \quad V = 0,$$

即原坐标中的顶点为

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

它的轴方向与 v 轴一致, 因此轴方向向量可取

$$(1, 2).$$

作业 14.8 (Ch8 T13)

在三维空间直角坐标系中, 给定曲面方程

$$2x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 20 = 0.$$

利用正交变换将其化为标准型。该方程表示什么曲面?



解 记二次型对应的实对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

计算特征多项式。 A 的迹为 $\text{tr}(A) = 11$ ，二阶顺序主子式之和为

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 7 + 6 + 11 = 24,$$

行列式为

$$\det A = 2(20 - 9) + 1(-5 - 6) + 2(-3 - 8) = -11.$$

因而特征方程为

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 24\lambda + 11 = 0.$$

作代换 $\lambda = t + \frac{11}{3}$ ，消去二次项，得到降阶三次方程

$$t^3 - \frac{49}{3}t + \frac{11}{27} = 0.$$

令 $t = \frac{14}{3} \cos \varphi$ ，代入得

$$\cos 3\varphi = -\frac{11}{686}.$$

记

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{11}{686}\right),$$

则三个特征值为

$$\lambda_k = \frac{11}{3} + \frac{14}{3} \cos\left(\varphi_0 + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

下面用顺序主子式判断特征值的正负号。 A 的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 7 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -11 < 0.$$

序列 $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 的符号为 $+, +, +, -$ ，恰有一次变号，因此 A 恰有一个负特征值、两个正特征值。

由实对称矩阵的正交对角化定理，存在正交矩阵 P ，使得在正交变换 $x = Py$ 下原方程化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 20,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ， $\lambda_3 < 0$ 。化为

$$\frac{y_1^2}{20/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{20/\lambda_2} - \frac{y_3^2}{20/|\lambda_3|} = 1.$$

因为有两个正系数和一个负系数，所以该曲面是单叶双曲面。

第十五章 第十五次作业

作业 15.1 (Ch8 T14(1)(2))

判断下列二次型是否是正定二次型

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.



解 用 Sylvester 判别法判断。

1. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \det A = 0.$$

因此它不是正定二次型，而是半正定二次型。

2. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

第一顺序主子式

$$\Delta_1 = -5 < 0,$$

故不可能正定。

作业 15.2 (Ch8 T16)

问参数 t 满足什么条件时，下列二次型正定？

1. $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_1x_3$
2. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + tx_1x_2 + tx_1x_3 + x_2x_3$



解 用 Sylvester 判别法。

1. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其顺序主子式为

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det A = 1 - \frac{t^2}{4}.$$

因而正定当且仅当

$$1 - \frac{t^2}{4} > 0,$$

即

$$-2 < t < 2.$$

2. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 \end{bmatrix} = 2 - \frac{t^2}{4},$$

$$\Delta_3 = \det A = \frac{23 - 4t^2}{4}.$$

因而正定当且仅当

$$2 - \frac{t^2}{4} > 0, \quad \frac{23 - 4t^2}{4} > 0.$$

其中后一个条件更强, 于是

$$-\frac{\sqrt{23}}{2} < t < \frac{\sqrt{23}}{2}.$$

作业 15.3 (Ch8 T17)

证明: 对任意实数 x, y , 二元二次多项式 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$ 恒大于零.

证明. 题中式子实际上是三元二次型

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz.$$

它对应的对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

计算顺序主子式:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 5 > 0.$$

由 Sylvester 判别法可知, A 是正定矩阵, 因此对应二次型正定。

所以对任意不全为零的实数 x, y, z , 都有

$$f(x, y, z) > 0.$$

□

作业 15.4 (Ch8 T18)

设 $Q = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 + 2cx_1x_3$, 问 a, b, c 满足什么条件时, Q 为正定?

解 该二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}.$$

用 Sylvester 判别法, 只需考察顺序主子式:

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = ab, \quad \Delta_3 = \det A = b(a^2 - c^2).$$

因而 Q 正定当且仅当

$$a > 0, \quad ab > 0, \quad b(a^2 - c^2) > 0.$$

这等价于

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a^2 - c^2 > 0.$$

最后一个条件又等价于

$$-a < c < a.$$

所以所求条件为

$$a > 0, \quad b > 0, \quad -a < c < a.$$

作业 15.5 (Ch8 T19)

试证: 二次型 $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 负定的充分必要条件是 A 的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零。

证明. 设 A_k 表示 A 的 k 阶顺序主子矩阵, 记

$$\Delta_k = \det(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

二次型

$$Q(x) = x^T A x$$

负定, 当且仅当二次型

$$-Q(x) = x^T (-A) x$$

正定。

由 Sylvester 判别法, $-Q$ 正定当且仅当矩阵 $-A$ 的各阶顺序主子式全大于零, 即

$$\det((-A)_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

但

$$(-A)_k = -A_k,$$

所以

$$\det((-A)_k) = (-1)^k \det(A_k) = (-1)^k \Delta_k.$$

因而条件

$$\det((-A)_k) > 0$$

等价于

$$(-1)^k \Delta_k > 0.$$

这就是说:

$$\Delta_k < 0 \quad (k \text{ 为奇数}), \quad \Delta_k > 0 \quad (k \text{ 为偶数}).$$

故二次型 Q 负定的充分必要条件就是 A 的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零。 $\square$

作业 15.6 (Ch8 T21)

在 $Q = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$ 中, 问

1. 哪些 λ 的值使得 Q 为正定?
2. 哪些 λ 的值使得 Q 为负定?
3. 当 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = -1$ 时, Q 为什么类型?

解 二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det A = \lambda^3 - 3\lambda - 2.$$

又

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

1. Q 正定当且仅当

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

由此得

$$\lambda > 0, \quad |\lambda| > 1, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 > 0.$$

综合可得

$$\lambda > 2.$$

2. Q 负定当且仅当

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0.$$

故

$$\lambda < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 < 0.$$

综合可得

$$\lambda < -1.$$

3. 当 $\lambda = 2$ 时,

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 0,$$

所以 Q 为半正定型。

当 $\lambda = -1$ 时,

$$-Q$$

对应矩阵的顺序主子式为

$$1 > 0, \quad 0, \quad 0,$$

故 $-Q$ 半正定, 因此 Q 为半负定型。

作业 15.7 (Ch8 T23)

设 A 为 n 阶可逆实对称阵, 证明:

1. 若 A 正定, 则 A^{-1} 亦正定.
2. 若 A 正定, 则 A 的伴随矩阵 A^* 也是正定矩阵.

证明. 1. 若 A 正定, 则对任意非零向量 x , 令 $y = A^{-1}x$, 则 $y \neq 0$, 并且

$$x^T A^{-1} x = (Ay)^T y = y^T A y > 0.$$

故 A^{-1} 也正定。

2. 由第 1 问知 A^{-1} 正定。又因为

$$A^* = \det(A) A^{-1},$$

且正定矩阵的行列式大于零, 所以 $\det(A) > 0$ 。正数倍的正定矩阵仍正定, 因此 A^* 也是正定矩阵。

□

作业 15.8 (Ch8 T24)

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 $A^2 = I$, 证明 $A + I$ 为正定矩阵或半正定矩阵。

证明. 因为 A 是实对称矩阵, 故存在正交矩阵 P , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

又由 $A^2 = I$, 知每个特征值满足

$$\lambda_i^2 = 1,$$

所以

$$\lambda_i = \pm 1.$$

因而

$$P^T (A + I) P = \text{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1).$$

这些对角元都等于 0 或 2, 从而全都非负。故 $A + I$ 至少是半正定矩阵; 若没有特征值 -1 , 则所有对角元都等于 2, 这时 $A + I$ 还是正定矩阵。

因此 $A + I$ 为正定矩阵或半正定矩阵。

□

作业 15.9 (Ch8 T26)

设 A, B 均为 n 阶实对称阵, 其中 A 为正定阵, 证明: 当实数 t 充分大后, $tA + B$ 亦正定。

证明. 因为 $A \succ 0$, 存在正定平方根 $A^{1/2}$ 。令

$$C = A^{-1/2} B A^{-1/2}.$$

由于 B 对称, C 也是实对称矩阵。于是

$$tA + B = A^{1/2} (tI + C) A^{1/2}.$$

设 C 的最小特征值为 $\lambda_{\min}(C)$ 。当

$$t > -\lambda_{\min}(C)$$

时, 矩阵 $tI + C$ 的全部特征值都大于零, 从而 $tI + C \succ 0$. 于是对任意非零向量 x , 令 $y = A^{1/2}x$, 则

$$x^T(tA + B)x = y^T(tI + C)y > 0.$$

故当 t 充分大时, $tA + B$ 亦正定。 □

作业 15.10 (Ch8 T28)

设 A 为 n 阶实对称阵, 且 $A > 0$. 求证: $\det(A) \leq \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)\right)^n$. ♣

证明. 设 A 的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \lambda_i > 0.$$

则

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

由正数的算术平均数与几何平均数不等式,

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}.$$

两边取 n 次方即得

$$\det(A) \leq \left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{n}\right)^n.$$

□