

线性代数习题课讲义

陈文轩

更新: August 1, 2026

目录

1 线性方程组	1
1.1 唯一解, 无解, 无穷解问题	1
1.2 插值问题	2
2 行列式 (I)	3
2.1 定义法/降阶法/化为上三角	3
2.2 加边	6

1 线性方程组

1.1 唯一解, 无解, 无穷解问题

例 1.1 已知线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$
 有唯一解, 则 a 应满足什么条件?

解答

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & a & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & a+4 & 0 & 21 \\ 11 & 5 & 0 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & a + \frac{9}{11} & 0 & * \\ 11 & 5 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

因此有唯一解的条件是 $a \neq -\frac{9}{11}$ 。

例 1.2 已知线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有无穷多解, 则 λ 应满足什么条件?

解答

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

因此有无穷多解的条件是
$$\begin{cases} 2-\lambda-\lambda^2=0 \\ 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3=0 \end{cases}, \text{ 即 } \lambda=1.$$

1.2 插值问题

例 1.3 ((Hermite 插值)) 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(0) = 2, f'(0) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 1$ 。

解答 易得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} d=2 \\ c=2 \\ a+b+c+d=3 \\ 3a+2b+c=1 \end{cases} &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

例 1.4 求二次多项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(0) = 2, f(1) = 1, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。

解答 易得 $f'(x) = 2ax + b$.

$$\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

显然无解。

例 1.5 求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(0) = 2, f(1) = 1, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。

解答 易得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 。

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 1 \\ \frac{3}{4}a + b + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{4} & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

因此解为

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -t + 11 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = -12x^3 + (-t + 11)x^2 + tx + 2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2 行列式 (1)

2.1 定义法/降阶法/化为上三角

例 2.1 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 。

解答

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2r_1 \rightarrow r_3 \\ -2r_1 \rightarrow r_4}]{r_1 \rightarrow r_2} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-3r_2 \rightarrow r_3 \\ 3r_2 \rightarrow r_4}]{-r_2 \rightarrow r_1} -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -9 & -42 \\ 0 & 0 & 1 & 46 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -9 & -42 \\ 1 & 46 \end{bmatrix} = -372$$

例 2.2 计算 $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ 。

解答

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{第一行展开}} (-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第一行展开}} -(-1)^{1+3} \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \\ 13 & 12 & 10 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第一行展开}} -(-1)^{1+2} \cdot 15 \det \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 13 & 10 \end{bmatrix} = 15 \cdot 90 = 1350 \end{aligned}$$

例 2.3

计算 $\det \begin{bmatrix} x & y & & \\ & x & y & \\ & & x & \ddots \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{bmatrix}_{n \times n}$ 。

解答

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} x & y & & \\ & x & y & \\ & & x & \ddots \\ & & & \ddots & y \\ y & & & & x \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{第一列展开}} x \cdot \det \begin{bmatrix} x & y & & \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & y \\ & & & x \end{bmatrix} \\ &+ (-1)^{n+1} y \cdot \det \begin{bmatrix} y & & & \\ x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & y \end{bmatrix} = x^n + (-1)^{n+1} y^n \end{aligned}$$

注 有一定规律 (元素大量重复) 矩阵化为上三角的重要结构: $(1, 1, \dots, 1)$

例 2.4

计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$

解答

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -ar_1 \rightarrow r_2 \\ -a^2r_1 \rightarrow r_3 \\ -a^4r_1 \rightarrow r_4 \end{matrix}} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{bmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & a+d \\ (a^2+b^2)(a+b) & (a^2+c^2)(a+c) & (a^2+d^2)(a+d) \end{bmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & (a^2+c^2)(a+c) - (a^2+b^2)(a+b) & (a^2+d^2)(a+d) - (a^2+b^2)(a+b) \end{bmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \det \begin{bmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac) & (d-b)(a^2+b^2+d^2+ab+bd+ad) \end{bmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)
\end{aligned}$$

注 如果没有 $(1, 1, \dots, 1)$ ，一般先尝试逐行/逐列求和。

例 2.5 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

解答

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_4]{c_2 \leftrightarrow c_3} 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

例 2.6 计算 $\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$

解答

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} \\
&= (x+(n-1)a) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{bmatrix} \\
&= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}
\end{aligned}$$

2.2 加边

首先回忆这个典型：

例 2.7 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & & & \\ c & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d \end{bmatrix}_{n \times n}$

解答 若 $d = 0$ ，显然有 $\Delta = 0$ 。

$$\det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & d & & & \\ c & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c & & & & d \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=2, \dots, n]{-\frac{c}{d}c_k \rightarrow c_1} \det \begin{bmatrix} a - \frac{bc}{d}(n-1) & b & b & \cdots & b \\ 0 & d & & & \\ 0 & & d & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & d \end{bmatrix} = d^{n-1} \left(a - \frac{bc}{d}(n-1) \right)$$

这启发了对前面一道例题的另外一种解法。

例 2.8 计算 $\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$

解答

$$\det \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & & & \\ -1 & & x-a & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & x-a \end{bmatrix} = (x-a)^n \left(1 + \frac{an}{x-a} \right)$$

显然，两种方法的结果是一致的。

注 如果出现大量重复元素，但是找不到 $(1, 1, \dots, 1)$ 时，可以尝试加边。

先介绍一个结论：

命题 2.1 设准上三角形方阵 $A = (A_{ij})_{k \times k}$ 的每个对角块 A_{kk} 都是方阵, 则有

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^k \det A_{jj}$$

证明. 首先考虑 $k = 2$ 的情况, 设

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

考虑 $\det A$ 的完全展开式中的非零项, 若 $\prod_{i=1}^n a_{ij_i} \neq 0$, 则必然有 $(j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n)$ 是 $(r+1, r+2, \cdots, n)$ 的一个排列, 进而 $(j_1, j_2, \cdots, j_r)$ 是 $(1, 2, \cdots, r)$ 的一个排列, 故 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n) = \tau(j_1, j_2, \cdots, j_r) + \tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n)$ 。因此,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{1 \leq j_1, \cdots, j_r \leq r \\ r+1 \leq j_{r+1}, \cdots, j_n \leq n}} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_r) + \tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i} \\ &= \left(\sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_r \leq r} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_r)} \prod_{i=1}^r a_{ij_i} \right) \left(\sum_{r+1 \leq j_{r+1}, \cdots, j_n \leq n} (-1)^{\tau(j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n)} \prod_{i=r+1}^n a_{ij_i} \right) \\ &= \det A_{11} \det A_{22} \end{aligned}$$

当 $k \geq 3$ 时 A 可以分块成 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & B \end{bmatrix}$, 从而 $\det A = \det A_{11} \det B$ 。同理 B 可以继续分块, 故有 $\det A =$

$$\prod_{j=1}^k \det A_{jj}。$$

例 2.9 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix}$

解答

$$\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \\
&\stackrel{\text{前者} \quad -c_i \rightarrow c_{i-1}}{i=n+1, \dots, 2} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1(x_1 - 1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - 1) \\ 1 & x_2 - 1 & x_2(x_2 - 1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n(x_n - 1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - 1) \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \\
&= - \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} + 2 \prod_{i=1}^n x_i \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= (2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i - 1)) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

最后一步使用到 Vandermonde 行列式的性质。

除了加 $(1, 1, \dots, 1)$ 之外，还有可能需要添加其他类型的边，这需要根据行列式的特殊性质来判断。

例 2.10 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$

解答

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{bmatrix} \\
&\stackrel{\text{第四行展开}}{=} (-1)(-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & n-4 & \\ & & & & & & n-3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{命题 2.1}}} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} (n-3)! = 6(n-3)!$$

例 2.11 证明: $\det \begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj}.$

证明.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ 0 & a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{第一行展开}}{=} \det A + \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j+1+1} (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{第一列展开}}{=} \det A + \sum_{j=1}^n x_j (-1)^{j+3} \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} M_{kj} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k+4} A_{kj} \\ &= \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj} \end{aligned}$$

例 2.12 计算 $\det \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix}$

解答 $n=1, 2$ 时自行计算。 $n \geq 3$ 时

$$\det \begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 0 & a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第一项为0}]{\text{第一列展开}} \sum_{k=1}^n (-1)^k \det \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & \cdots & a_{k-1} \\ a_{k+1} & \cdots & a_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} = 0$$

例 2.13 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix}$

解答

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & & & \\ -x_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -x_n & & & & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$