线性代数习题课讲义

陈文轩

更新：August 1, 2026

目录

1 行列式 (2)

1.1 逐行/列加减

对相邻行与行/列与列之间关联度高 (如相差一定倍数) 时，可以采用逐行/列加减的方法。该方法也适用于行之间差距不大的情形。

例 1.1 计算 $\det\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & x & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{bmatrix}$

解答

$$\det\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & x & a_n\\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x\end{bmatrix} \xlongequal[\forall k=2,\cdots,n+1]{-r_1\to r_k} \det\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a_n\end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$$

例 1.2 计算 $\det\begin{bmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{bmatrix}$

解答

$$\det\begin{bmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5\\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5\\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5\\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}a^2 & 2a+1 & 2 & 2\\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2\\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2\\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2\end{bmatrix} = 0$$

例 1.3 计算 $\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2}\\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1\end{bmatrix}$

解答

$$\det\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2}\\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1\end{bmatrix} \xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-ar_{k+1}\to r_k} \det\begin{bmatrix}1-a^n & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-a^n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-a^n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1-a^n\end{bmatrix} = (1-a^n)^{n-1}$$

例 1.4 计算 Vandermonde 行列式：

$$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \det\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

解答

$$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n) \xlongequal[\forall k=n,\cdots,2]{-a_nc_{k-1}\to c_k} \det\begin{bmatrix}1 & a_1-a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_n)\\ 1 & a_2-a_n & \cdots & a_2^{n-2}(a_2-a_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}(a_k-a_n)\det\begin{bmatrix}1&1&a_1&\cdots&a_1^{n-2}\\1&1&a_2&\cdots&a_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{第一列展开}}(-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n-1}(a_k-a_n)\cdot\det\begin{bmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-2}\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_{n-1}&\cdots&a_{n-1}^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)\Delta_{n-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n-1)$$

又有 $\Delta_1=1,\Delta_2(a_1,a_2)=a_2-a_1$，故归纳有 $\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$。

以下是一些 Vandermonde 行列式的应用。

例 1.5 计算 $\det\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1+x_1&1+x_2&1+x_3&\cdots&1+x_{n+1}\\x_1+x_1^2&x_2+x_2^2&x_3+x_3^2&\cdots&x_{n+1}+x_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^n&x_2^{n-1}+x_2^n&x_3^{n-1}+x_3^n&\cdots&x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}^n\end{bmatrix}$

解答

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1+x_1&1+x_2&1+x_3&\cdots&1+x_{n+1}\\x_1+x_1^2&x_2+x_2^2&x_3+x_3^2&\cdots&x_{n+1}+x_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^n&x_2^{n-1}+x_2^n&x_3^{n-1}+x_3^n&\cdots&x_{n+1}^{n-1}+x_{n+1}^n\end{bmatrix}\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n]{-r_k\to r_{k+1}}\det\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_{n+1}\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_{n+1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^n&x_2^n&x_3^n&\cdots&x_{n+1}^n\end{bmatrix}$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)$$

例 1.6 计算 $\det\begin{bmatrix}a_1^n&a_1^{n-1}b_1&a_1^{n-2}b_1^2&\cdots&a_1b_1^{n-1}&b_1^n\\a_2^n&a_2^{n-1}b_2&a_2^{n-2}b_2^2&\cdots&a_2b_2^{n-1}&b_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n+1}^n&a_{n+1}^{n-1}b_{n+1}&a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2&\cdots&a_{n+1}b_{n+1}^{n-1}&b_{n+1}^n\end{bmatrix}$

解答

$$\det\begin{bmatrix}a_1^n&a_1^{n-1}b_1&a_1^{n-2}b_1^2&\cdots&a_1b_1^{n-1}&b_1^n\\a_2^n&a_2^{n-1}b_2&a_2^{n-2}b_2^2&\cdots&a_2b_2^{n-1}&b_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n+1}^n&a_{n+1}^{n-1}b_{n+1}&a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2&\cdots&a_{n+1}b_{n+1}^{n-1}&b_{n+1}^n\end{bmatrix}=\prod_{k=1}^{n+1}a_k^n\det\begin{bmatrix}1&\frac{b_1}{a_1}&\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2&\cdots&\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n\\1&\frac{b_2}{a_2}&\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2&\cdots&\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}&\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2&\cdots&\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n\end{bmatrix}$$

$$=\prod_{k=1}^{n+1}a_k^n\cdot\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ib_j-a_jb_i)$$

例 1.7 ((Lagrange 插值)) 设 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}$ 各不相同，$b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$，证明：存在唯一的 $n-1$ 次多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$，使得 $f(a_i)=b_i,\forall i$。

证明. 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kx^k$ 满足条件，则

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1\\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2\\ \quad\vdots\\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\ \vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

由 Vandermonde 行列式的性质知系数矩阵可逆，故解存在唯一。

例 1.8 证明：$\begin{cases}\sum_{k=1}^n x_k=0\\ \sum_{k=1}^n x_k^2=0\\ \quad\vdots\\ \sum_{k=1}^n x_k^n=0\end{cases}$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有零解。

证明. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$ 是一组非零解，$(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中互异非零的值，$(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ 是对应出现次数，则 $\sum_{j=1}^k l_j>0\Rightarrow l_j$ 不全为 0。此时原方程组即

$$\begin{cases} l_1y_1+l_2y_2+\cdots+l_ky_k=0\\ l_1y_1^2+l_2y_2^2+\cdots+l_ky_k^2=0\\ \quad\vdots\\ l_1y_1^n+l_2y_2^n+\cdots+l_ky_k^n=0\end{cases}\xRightarrow{\text{取前}k\text{个}}\begin{bmatrix}y_1&y_2&\cdots&y_k\\y_1^2&y_2^2&\cdots&y_k^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\y_1^k&y_2^k&\cdots&y_k^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\ \vdots\\l_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\Rightarrow l_1=l_2=\cdots=l_k=0,\text{矛盾。}$$

例 1.9 证明：对 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n-1}k!$ 整除 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}$。

证明. 令 $f_k(x)=x(x-1)\cdots(x-k+1)$，则 $\dfrac{f_k(x)}{k!}=\dbinom{k}{x}$。在 $m<n$ 时视 $\dbinom{m}{n}=0$。

$$\text{则 }\Delta_n=\det\begin{bmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}\xlongequal{\text{适当的列变换}}\det\begin{bmatrix}1&f_1(a_1)&f_2(a_1)&\cdots&f_{n-1}(a_1)\\1&f_1(a_2)&f_2(a_2)&\cdots&f_{n-1}(a_2)\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&f_1(a_n)&f_2(a_n)&\cdots&f_{n-1}(a_n)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta_n}{\prod_{k=1}^{n-1}k!}=\det\begin{bmatrix}1&\frac{f_1(a_1)}{1!}&\frac{f_2(a_1)}{2!}&\cdots&\frac{f_{n-1}(a_1)}{(n-1)!}\\1&\frac{f_1(a_2)}{1!}&\frac{f_2(a_2)}{2!}&\cdots&\frac{f_{n-1}(a_2)}{(n-1)!}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\frac{f_1(a_n)}{1!}&\frac{f_2(a_n)}{2!}&\cdots&\frac{f_{n-1}(a_n)}{(n-1)!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\binom{a_1}{1}&\binom{a_1}{2}&\cdots&\binom{a_1}{n-1}\\1&\binom{a_2}{1}&\binom{a_2}{2}&\cdots&\binom{a_2}{n-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\binom{a_n}{1}&\binom{a_n}{2}&\cdots&\binom{a_n}{n-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{Z}\text{，得证。}$$

1.2 拆项与递推

对于一些特殊的行列式，可以将其某一行/列拆成两项，从而简化计算或得到递推。

例 1.10 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$

证明. 记 $e = (1,1,1)^\top, \lambda = (x,y,z)^\top$，则

$$\Delta = \det(\lambda+ae, \lambda+be, \lambda+ce) = \det(\lambda, \lambda+be, \lambda+ce)+\det(ae, \lambda+be, \lambda+ce) = \det(\lambda, be, ce)+\det(ae, \lambda, \lambda) = 0.$$

例 1.11 证明：$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$

证明.

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

例 1.12 计算 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$

解答

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n} + \det \begin{bmatrix} a-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$= \det \begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a-b \end{bmatrix}_{n\times n} + (a-c)\Delta_{n-1} = c(a-b)^{n-1} + (a-c)\Delta_{n-1}$$

对 $b=c$，由于 $\Delta_1=a$，计算得 $\Delta_n=nb(a-b)^{n-1}+(a-b)^n$。

对 $b\neq c$，同理有 $\Delta_n=(a-c)^{n-1}+(a-b)\Delta_{n-1}$，联立并消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$。

例 1.13 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} a+b & a & & & \\ b & a+b & a & & \\ & b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{bmatrix}_{n\times n}$

解答

$$\Delta_n \xlongequal{\text{第一行展开}} (a+b)\Delta_{n-1}-a\det\begin{bmatrix} b & a & & & \\ & a+b & a & & \\ & b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \xlongequal{\text{第一列展开}} (a+b)\Delta_{n-1}-ab\Delta_{n-2}$$

$\Rightarrow \Delta_n-b\Delta_{n-1}=a(\Delta_{n-1}-b\Delta_{n-2})$。又 $\Delta_1=a+b,\Delta_2=a^2+b^2+ab\Rightarrow \Delta_n=a^n+b\Delta_{n-1}$。

若 $a=b$，直接计算有 $\Delta_n=(n+1)a^n$。

若 $a\neq b$，同理有 $\Delta_n=b^n+a\Delta_{n-1}$。联立消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=\sum\limits_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$。

注 $a\neq b$ 时最终答案形式上不要求 $a\neq b$，这是否意味着不必要进行分类讨论？

事实上，这类行列式被称为三对角行列式。我们有如下结论：

命题 1.1 设 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}_{n\times n}$，$x,y\in\mathbb{C}$ 是 $\lambda^2-a\lambda+bc=0$ 的根，则有 $\Delta_n=\sum\limits_{k=0}^{n}x^ky^{n-k}$。

1.3 多项式与行列式

首先回到之前的一个例题：

例 1.14 计算 $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$

解答 考虑 $f(x)=\det\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{bmatrix}\xlongequal{\text{最后一列展开}}A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$，所求即为 $-A_3$。

由代数学基本定理，$f(x)$ 所有零点为 a,b,c,d。由韦达定理，$-\dfrac{A_3}{A_4}=a+b+c+d$。

又 $A_4=\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{bmatrix}=(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)$，

故 $\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{bmatrix}=-A_3=(a+b+c+d)A_4=(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c+d)$。

重新考虑 Vandermonde 行列式，可以得到：

例 1.15 计算 $\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\det\begin{bmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}$。

解答 考虑 $f(x)=\det\begin{bmatrix}1&x&x^2&\cdots&x^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}$ 为 $n-1$ 次多项式，则 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 为 $f(x)$ 的 $n-1$ 个零点。

$\Rightarrow f(x)=C\prod\limits_{k=2}^{n}(x-a_k)$。又 $f(0)=(-1)^{n-1}C\prod\limits_{k=2}^{n}a_k$，$f(a_1)=\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$$f(0)=\det\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}=\prod_{k=2}^{n}a_k\cdot\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)。$$

$\Rightarrow C=(-1)^{n-1}\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)$，$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)\prod\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_1)$。

递推得 $\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$。

2 神秘作业题目

例 2.1 (Cauchy 行列式) 设复数列 $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n$ 满足 $x_i \neq y_j, \forall i, j$，计算

$$\det C_n(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

解答

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-r_n \to r_k} \det \begin{bmatrix} \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_1)(x_n-y_1)} & \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_2)(x_n-y_2)} & \cdots & \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_n)(x_n-y_n)} \\ \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_1)(x_n-y_1)} & \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_2)(x_n-y_2)} & \cdots & \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_n)(x_n-y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_n-y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-c_n \to c_k} \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_n-y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_n}{(x_1-y_1)(x_1-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_1-y_2)(x_1-y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{y_1-y_n}{(x_2-y_1)(x_2-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_2-y_2)(x_2-y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n-x_j)(y_j-y_n)}{(x_n-y_j)(x_j-y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n-x_j)(y_j-y_n)}{(x_n-y_j)(x_j-y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}-y_1} & \frac{1}{x_{n-1}-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1}-y_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{递推}} \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)(y_j-y_i)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(x_i-y_j)}$$

例 2.2 计算 $\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$

解答 对 $b=c$，

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & b & \cdots & b \\ 0 & b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b & b & b & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{bmatrix}$$

假设 a_i-b 中有两个为 0，则按第一列展开后每一项至少有一行全为 0，所以行列式值为 0。

假设 a_i-b 中只有一个为 0，则设 $a_r=b, 1\le r\le n$，

$$\det\begin{bmatrix} 1 & b & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} \xlongequal{\text{第一列展开}} (-1)(-1)^{r+2}\det\begin{bmatrix} b & b & \cdots & b & b \\ a_1-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{r+3}(-1)^{r-1}\cdot b\prod_{i\ne r}(a_i-b) = b\prod_{i\ne r}(a_i-b)$$

假设 a_i-b 中没有 0，则

$$\det\begin{bmatrix}1 & b & b & b & \cdots & b\\ -1 & a_1-b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2-b & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & a_3-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{\frac{b}{a_i-b}c_{i+1}\to c_1}\det\begin{bmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b}{a_i-b} & b & b & \cdots & b\\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b\end{bmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)$$

注意到 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-b)+b\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j\neq i}(a_j-b)$ 满足以上全部三种情况，故此即为最终解答。

对 $b\neq c$，令

$$D(x)=\det\begin{bmatrix}a_1-x & b-x & b-x & \cdots & b-x\\ c-x & a_2-x & b-x & \cdots & b-x\\ c-x & c-x & a_3-x & \cdots & b-x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c-x & c-x & c-x & \cdots & a_n-x\end{bmatrix}\xlongequal[i=2,\cdots,n]{-r_1\to r_i}\det\begin{bmatrix}a_1-x & b-x & b-x & \cdots & b-x\\ c-a_1 & a_2-b & 0 & \cdots & 0\\ c-a_1 & c-b & a_3-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c-a_1 & c-b & c-b & \cdots & a_n-b\end{bmatrix}$$

由第一行展开可知 $D(x)$ 是关于 x 的 1 次多项式，确定其在两点处的值即可确定其在 0 处取值，即为所求。

$$\text{注意到 } D(b)=\det\begin{bmatrix}a_1-b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ c-b & a_2-b & 0 & \cdots & 0\\ c-b & c-b & a_3-b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c-b & c-b & c-b & \cdots & a_n-b\end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b),D(c)=\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)\text{。}$$

故 $D(0)=D(b)-\dfrac{D(b)-D(c)}{b-c}b=\dfrac{b\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-c)-c\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-b)}{b-c}$。

注 当 $b\to c$ 时，由洛必达法则，$\dfrac{b\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-c)-c\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-b)}{b-c}\to b\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j\neq i}(a_j-b)+\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i-b)$，与 $b=c$ 时的结果相同。这是为什么？

评论 以下给出另一种求解 $b\neq c$ 时情形的思路。

解答

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_1-b)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + b\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[-c_1\to c_i,i=2,\cdots,n]{\text{右边行列式}} (a_1-b)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + b\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a_2-c & b-c & \cdots & b-c \\ c & 0 & a_3-c & \cdots & b-c \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ c & 0 & 0 & \cdots & a_n-c \end{bmatrix}$$

$$= (a_1-b)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + b\prod_{i=2}^{n}(a_i-c)$$

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 & b & \cdots & b \\ 0 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_1-c)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + c\det\begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a_2 & b & \cdots & b \\ 1 & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[-r_1\to r_i,i=2,\cdots,n]{\text{右边行列式}} (a_1-c)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + c\det\begin{bmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_2-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & a_3-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a_n-b \end{bmatrix}$$

$$= (a_1 - c)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + c\prod_{i=2}^{n}(a_i-b)$$

得到：$\begin{cases} \det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = (a_1-b)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + b\prod_{i=2}^{n}(a_i-c) \quad (1) \\ \det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = (a_1-c)\det\begin{bmatrix} a_2-b & b & \cdots & b \\ c & a_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a_n-b \end{bmatrix} + c\prod_{i=2}^{n}(a_i-b) \quad (2) \end{cases}$。

通过 $\dfrac{(1)\times(a_1-c)-(2)\times(a_1-b)}{b-c}$，即可得到 $\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \dfrac{b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c) - c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b)}{b-c}$。