

线性代数习题课讲义

陈文轩

更新: August 1, 2026

目录

1 补充：利用矩阵结构的求逆技巧	1
2 秩与相抵的基本概念	2
3 秩不等式	3
4 初等变换与秩	4

1 补充：利用矩阵结构的求逆技巧

定理 1.1 (Schur 补) 设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中 A 和 D 均为方阵, 且 A 可逆, 定义 Schur 补为 $S = D - CA^{-1}B$, 则 $\det M = \det A \det S$, 且当 S 可逆时, M 也可逆, 其逆矩阵为

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

对 D 可逆的情况亦然。

Schur 补还有一个直接的推论

推论 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times m}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$ 。

证明.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_n & \lambda A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^n \det \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA),$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_n & \lambda A \\ B & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^m \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_m \end{bmatrix} = \lambda^m \det(\lambda I_n - AB)$$

定理 1.2 (Sherman-Morrison 秩 1 修正) 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 可逆, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, 则 $A + \alpha\beta^T$ 可逆的充分必要条件是 $1 + \beta^T A^{-1} \alpha \neq 0$, 且此时

$$(A + \alpha\beta^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \alpha \beta^T A^{-1}}{1 + \beta^T A^{-1} \alpha}$$

定理 1.3 (Woodbury 秩 k 修正) 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 可逆, $U, V \in \mathbb{F}^{n \times k}$, 则 $A + UV^T$ 可逆的充分必要条件是 $I_k + V^T A^{-1} U$ 可逆, 且此时

$$(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (I_k + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}$$

进一步地, 若 $C \in \mathbb{F}^{k \times k}$ 可逆, 则 $A + UCV^T$ 可逆的充分必要条件是 $C^{-1} + V^T A^{-1} U$ 可逆, 且此时

$$(A + UCV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (C^{-1} + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}$$

2 秩与相抵的基本概念

在开始之前, 先回顾一些秩的定义和性质。

定义 2.1 设 A 至少有一个 r 阶非零子式, 且所有 $r+1$ 阶子式均为零, 则称 r 为 A 的秩。当 $A = O$ 时, A 不含任何非零子式, 定义其秩为 0。

还有一个等价的定义:

定义 2.2 对于 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。此时, 称 r 为 A 的秩。

显然 $m \times n$ 矩阵 A 的非零子式的最高阶数 $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ 。如果 $m = n$, 当 $\text{rank}(A)$ 达到最大值 n 时称 A 为满秩方阵。 A 是满秩方阵 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆。当 $\text{rank} A = m < n$ 时, 称 A 为行满秩矩阵, 它的行向量组线性无关。当 $\text{rank} A = n < m$ 时, 称 A 为列满秩矩阵, 它的列向量组线性无关。以下给出相抵的定义:

定义 2.3 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 若 A 可通过有限次初等变换变为 B , 则称 A 与 B 相抵。

定理 2.1 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 A 与 B 相抵的充分必要条件是存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $B = PAQ$ 。

矩阵的相抵是一个等价关系, 因此其满足以下性质:

命题 2.2 设 $A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则

1. 反身性: A 与 A 相抵;
2. 对称性: 若 A 与 B 相抵, 则 B 与 A 相抵;
3. 传递性: 若 A 与 B 相抵, 且 B 与 C 相抵, 则 A 与 C 相抵。

因此, 可以将矩阵集 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 划分为若干个相抵等价类, 每一个 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 属于其中唯一的一类, 同一类的矩阵互相相抵, 不同类的矩阵不相抵。从每一类中任选一个矩阵作为该类的代表元, 则这些代表元构成了矩阵集 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 的一个划分。以选取最简单的矩阵 $S_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 为例, 每个矩阵都可以通过初等变换化为某个 S_r , 因此选取这些 S_r 作为等价类的代表元, 称为矩阵的相抵标准形。

定理 2.3 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 A 与 B 相抵的充分必要条件是 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。

秩满足以下性质:

- 命题 2.4**
1. $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$.
 2. $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.
 3. 若 P 为可逆矩阵, 则 $\text{rank}(PA) = \text{rank}(AP) = \text{rank}(A)$.
 4. $\text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$
 5. $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

3 秩不等式

定理 3.1 (Frobenius)

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$$

证明.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) &\leq \text{rank} \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix} = \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) \end{aligned}$$

特别的, 取 $B = I_n$, 就可以得到:

推论 (Sylvester)

$$\text{rank}(AC) + n \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

例 3.1 ((2014-2015 期中)) 证明: 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 且 $AB = O$, 则 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

证明. 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(AB) + n = n$

例 3.2 ((2012-2013 期中)) 证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = I_n$

证明. 首先有 $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq \text{rank}((I_n - A) + (I_n + A)) = n$ 。考虑等号成立条件:

($\Leftarrow$) 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \leq \text{rank}((I_n - A)(I_n + A)) + n = n$ 。

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} I_n - A & O \\ O & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & I_n - A \\ O & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & 2I_n \\ & I_n + A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_n - A & 2I_n \\ \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & 2I_n \\ \frac{1}{2}(I_n - A^2) & O \end{bmatrix}$$

此时由 $\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - A & O \\ O & I_n + A \end{bmatrix} = n$ 即有 $I_n - A^2 = O$, 即 $A^2 = I_n$ 。

例 3.3 证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = A$

证明. 首先有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}((I_n - A) + A) = n$ 。考虑等号成立条件:

($\Leftarrow$) 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \leq \text{rank}(A(I_n - A)) + n = n$ 。

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n - A \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix}$$

此时由 $\text{rank} \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} = n$ 即有 $A - A^2 = O$, 即 $A^2 = A$ 。

练习 3.4 (2013-2014 期中) 证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(2I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = 2A$

例 3.5 (2019-2020 期中) 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $A^2 = O$, 证明: $\text{rank}(A) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 并对每个 n 给出一个 n 阶方阵 A 使得 $A^2 = O$ 且 $\text{rank}(A) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

证明. 不等式是显然的, 只给出构造。记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 取 $A = \text{diag}(J, \dots, J)$ or $A = \text{diag}(J, \dots, J, 0)$ 即可。

例 3.6 A 是 n 阶方阵, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+1})$, 证明: $\forall m > N, \text{rank}(A^m) = \text{rank}(A^N)$

证明. 只证明 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+1}) = \text{rank}(A^{N+2})$, 剩余递推即可。

一方面, 由 Frobenius 不等式, $\text{rank}(A^N A) + \text{rank}(A A^N) \leq \text{rank}(A A^N A) + \text{rank}(A^N) \Rightarrow \text{rank}(A^N) \leq \text{rank}(A^{N+2})$

另一方面, $\text{rank}(A^{N+2}) = \text{rank}(A^N A^2) \leq \text{rank}(A^N)$, 因此 $\text{rank}(A^N) = \text{rank}(A^{N+2})$ 。

4 初等变换与秩

例 4.1 (2011-2012 期中) 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 则 $I_n - BA, I_m - AB, \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ 的秩有什么关系?

解答 $\begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & O \\ B & I_n - BA \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{bmatrix}$

故 $n + \text{rank}(I_m - AB) = m + \text{rank}(I_n - BA) = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$

例 4.2 求下列矩阵的秩:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 1 - a_1 b_1 & -a_1 b_2 & \cdots & -a_1 b_n \\ -a_2 b_1 & 1 - a_2 b_2 & \cdots & -a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n b_1 & -a_n b_2 & \cdots & 1 - a_n b_n \end{bmatrix}$

(3) $C = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$

解答 (1) 记 $A = \begin{bmatrix} I_m & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\text{rank}(A) = m + \text{rank}(1 - \beta^T \alpha)$ 。若 $\beta^T \alpha = 1$, 则 $\text{rank}(A) = m + 1$, 否则 $\text{rank}(A) = m$ 。

(2) $B = I_n - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = I_n - \alpha \beta^T$, 此时 $1 + \text{rank}(B) = n + \text{rank}(1 - \beta^T \alpha)$ 。

(3) $C = (a - b)I_n + \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 。若 $a = b = 0$, 则 $\text{rank}(C) = 0$; 若 $a = b \neq 0$, 则 $\text{rank}(C) = 1$ 。

对 $a \neq b, C = (a - b) \left(I_n - \begin{bmatrix} -\frac{b}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} \\ \vdots \\ -\frac{b}{a-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right)$, 若 $b = -\frac{a}{n-1}$, 则 $\text{rank}(C) = n - 1$, 否则 $\text{rank}(C) = n$ 。

例 4.3 ((2014-2015 期中)(满秩分解)) 证明: 若 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\text{rank}(A) = r$ 等价于存在列满秩矩阵 $B \in \mathbb{F}^{m \times r}$ 与行满秩矩阵 $C \in \mathbb{F}^{r \times n}$ 使得 $A = BC$ 。

证明. 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q$ 。

取 $B = P \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q$ 即可。

例 4.4 ((2016-2017 期中)) A 是 n 阶方阵, $\text{rank}(A) = 1, c = \text{tr}(A)$, 证明: $A^2 = cA$, 并求 $\det(I + A)$

解答 对 A 作满秩分解 $A = \beta\alpha^T$, 其中 α, β 是列向量, 则 $A^2 = \beta\alpha^T\beta\alpha^T = \beta(\alpha^T\beta)\alpha^T = cA$ 。

其中 $c = \text{tr}(A) = \text{tr}(\beta\alpha^T) = \text{tr}(\alpha^T\beta) = \alpha^T\beta$. $\det(I + A) = \det(I + \beta\alpha^T) = \det(1 + \alpha^T\beta) = 1 + c$.

例 4.5 ((2015-2016 期中)) 判断: 若 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 则 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$

证明. 错误。 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ 满足 $AB \neq O, BA = O$ 。

例 4.6 设 A, B 为 n 阶方阵, $A^2 = A, B^2 = B, I - A - B$ 可逆, 证明 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

证明. 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) = \text{rank}(I - A - B) - n + \text{rank}(A) \leq \text{rank}(A - A^2 - BA) = \text{rank}(BA)$

而 $\text{rank}(BA) \leq \text{rank}(B)$, 得到 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$ 。同理 $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$, 故 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。

如果注意力足够好, 则有更简单的做法:

证明. 注意到 $(I - A - B)B = -AB = A(I - A - B)$, 由左乘或右乘可逆矩阵不改变秩, 有 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$

例 4.7 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 证明: $A^2 = A$ 时 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ 。

证明. 记 $r = \text{rank}(A)$, 则 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), s.t. A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$, 此时 $A^2 = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A$ 。

消去可逆矩阵, $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。对 QP 作分块 $\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, 代入前式, 得到

$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \Rightarrow R_{11} = I_r$, 此时

$\text{tr}(A) = \text{tr}\left(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q\right) = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP\right) = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}\right) = \text{tr} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ O & O \end{bmatrix} = r = \text{rank}(A)$ 。