

线性代数习题课讲义

陈文轩

更新: August 1, 2026

目录

1 线性空间补充

1

1 线性空间补充

例 1.1 判断下述命题是否正确, 并说明理由。

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合。
2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关。
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关。
4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关。
5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关。
6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关。
7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关。
8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关。

解答

1. 若 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合。
否。考虑作为一维数组向量的 $0, 1, 1$ 不能被 0 表示为线性组合。
2. 如果向量组的任何一个非它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关。
否。考虑二维数组向量组 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 。
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关。
是。不妨设原向量组集合为 V , 子向量组为 $V' \subset V$, 则

V 线性无关

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in V} \lambda_{\alpha} \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V \text{ 唯一解} \\ & \Rightarrow \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha = \sum_{\alpha \in V'} \lambda_{\alpha} \alpha + \sum_{\alpha \in V - V'} 0 \cdot \alpha = 0 \text{ 只有 } \lambda_{\alpha} = 0, \forall \alpha \in V' \text{ 唯一解} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow V'$ 线性无关

4. F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关。

是。它们可作为列向量排成一个规格为 $n \times (n+1)$ 的矩阵, 这个矩阵作为系数矩阵对应的齐次线性方程组的有非零解, 该非零解表明它们可线性组合为零向量, 因而线性相关。

5. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性无关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性无关。

否。记矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \\ \vdots \\ a_s + a_1 \end{bmatrix}$$

根据 s 为偶数时 $\det P = 0$, P 不可逆知该向量组构成的矩阵一定无 s 阶可逆子矩阵 (假如线性无关那么秩为 s , 列秩也为 s , 从而一定可选出 s 个列得到一个可逆的 s 阶子矩阵), 一定线性相关。

6. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关, 则 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$ 必线性相关。

是。 s 为偶数时理由同 5, s 为奇数时 $\det(P) \neq 0$, 该二向量组等价, 因此秩都严格小于 s 。

7. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关。

是。利用定义验证时仅考虑它们加长前的分量便可得全部的线性组合系数为 0。

8. 设 $a_1, a_2, \dots, a_s \in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关。

否。每一个线性无关的数组向量组都可添上零保持线性无关性, 而它们现在都可看成是由线性相关的零向量加长得到。

例 1.2 设 $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}, f_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, f_n(x) = e^{\lambda_n x}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 两两不同。证明: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关。

证明. 若 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关, 则存在 $a_1, \dots, a_n$ 不全为 0 使得 $g(x) = \sum a_i e^{\lambda_i x} = 0$ 。此时 $g^{(k)}(x) = \sum a_i \lambda_i^k e^{\lambda_i x} = 0$ 。取 $x = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ 并把方程组写成矩阵形式, 即有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵行列式为 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, 此时方程组只有零解, 故 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关。

例 1.3 对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$ 是列向量, $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $A^k x = 0, A^{k-1} x \neq 0$, 证明: $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。

证明. 若 $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性相关, 则 $\exists m \in \mathbb{N}$ 使得 $A^m x, A^{m+1}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性相关,

$A^{m+1}x, A^{m+2}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。此时 $\exists \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{k-1}$ 不全为 0, 使得 $\sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^j x = 0$ 。

此时 $0 = A \sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^j x = \sum_{j=m}^{k-1} \lambda_j A^{j+1} x = \sum_{j=m+1}^{k-1} \lambda_{j-1} A^j x$ 。由 $A^{m+1}x, A^{m+2}x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关,

有 $\lambda_m = \dots = \lambda_{k-2} = 0$, 代入回前式, 有 $\lambda_{k-1} = 0$, 与 $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{k-1}$ 不全为 0 矛盾。

故 $x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x$ 线性无关。

例 1.4 给定 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = E_{11}, B_2 = E_{12}, B_3 = E_{21}, B_4 = E_{22}$ 。

1. 证明: A_1, A_2, A_3, A_4 构成 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一组基。
2. 求向量组 A_1, A_2, A_3, A_4 到 B_1, B_2, B_3, B_4 的过渡矩阵 T 。
3. 求 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的坐标。

解答

1. 自行验证即可。

$$2. \text{ 把矩阵 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 视为 } aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}, \text{ 进而等价于坐标 } (a, b, c, d)^T, \text{ 则有 } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} T,$$

$$\text{故 } T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ 形式上有 } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ 故坐标是 } T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

例 1.5 设 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是可逆方阵, $A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两不同, 设 $V = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AB = BA\}$ 。

1. 证明: V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
2. 求 V 的维数与一组基。

解答

1. 显然 $0 \in V$, 且 $\forall B_1, B_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda B_1 + \mu B_2)A = \lambda B_1 A + \mu B_2 A = \lambda A B_1 + \mu A B_2 = A(\lambda B_1 + \mu B_2)$, 故 $\lambda B_1 + \mu B_2 \in V$, 因此 V 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
2. $AB = BA \Leftrightarrow PAP^{-1}PBP^{-1} = PBP^{-1}PAP^{-1} \Leftrightarrow \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)PBP^{-1} = PBP^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 设 $PBP^{-1} = C = (c_{ij})_{n \times n}$, 则 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)C = C \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \Rightarrow \forall i \neq j, (\lambda_i - \lambda_j)c_{ij} = 0$, 故 C 为对角矩阵, C 组成空间的基为 $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$, 维数为 n .
因此 V 的基为 $\{P^{-1}E_{11}P, P^{-1}E_{22}P, \dots, P^{-1}E_{nn}P\}$, 维数为 n 。

例 1.6 设 W 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 证明存在 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 使得 $Ax = 0$ 的解空间为 W 。

解答 设 W 的基为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, 则可将其扩充为 $\mathbb{F}^n$ 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-k})$ 。设这些基组成矩阵为 B , 则取 $A = \text{diag}(O_k, I_{n-k})B^{-1}$, 则 $A\alpha_i = 0, A\beta_i = e_i$, 且对任意 $x \in \mathbb{F}^n$, 有 $x = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-k} d_j \beta_j$, 则 $Ax = \sum_{j=1}^{n-k} d_j e_j$, 因此 $Ax = 0 \Leftrightarrow d_j = 0, \forall j \Leftrightarrow x \in W$. 故 $Ax = 0$ 的解空间为 W 。

引理 1.1 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = A$

证明. 首先有 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}((I_n - A) + A) = n$ 。考虑等号成立条件:

($\Leftarrow$) 由 Sylvester 不等式, $\text{rank}(A) + \text{rank}(I_n - A) \leq \text{rank}(A(I_n - A)) + n = n$ 。

$$(\Rightarrow) \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n - A \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ O & I_n - A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix}$$

此时由 $\text{rank} \begin{bmatrix} O & I_n \\ A - A^2 & O \end{bmatrix} = n$ 即有 $A - A^2 = O$, 即 $A^2 = A$ 。

引理 1.2 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 $A^2 = A$ 时 $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$ 。

证明. 记 $r = \text{rank}(A)$, 则 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), s.t. A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$, 此时 $A^2 = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A$ 。

消去可逆矩阵, $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。对 QP 作分块 $\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, 代入前式, 得到

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \Rightarrow R_{11} = I_r, \text{ 此时}$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \left(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \right) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ O & O \end{bmatrix} = r = \text{rank}(A)。$$

例 1.7 $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \sum_{i=1}^k A_i = I_n$, 证明: $A_i^2 = A_i, i = 1, \dots, k$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^k \text{rank}(A_i) = n$ 。

证明. 充分性: 由 $A_i^2 = A_i$, 有 $\text{rank } A_i = \text{tr } A_i$, 由 $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$ 与引理可得 $\sum_{i=1}^k \text{rank } A_i = \sum_{i=1}^k \text{tr } A_i = \text{tr } I_n = n$ 。

必要性: 令 $\tilde{A}_i = \sum_{j \neq i} A_j = I_n - A_i$, 则 $\text{rank } \tilde{A}_i = \text{rank} \left(\sum_{j \neq i} A_j \right) \leq \sum_{j \neq i} \text{rank } A_j = n - \text{rank } A_i$

又 $n = \text{rank } I_n = \text{rank}(A_i + \tilde{A}_i) \leq \text{rank } A_i + \text{rank } \tilde{A}_i$, 有 $\text{rank } \tilde{A}_i \geq n - \text{rank } A_i \Rightarrow \text{rank } \tilde{A}_i = n - \text{rank } A_i$ 。

由引理可知 $A_i^2 = A_i$ 。

例 1.8 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{p \times q}, C \in \mathbb{F}^{m \times q}, X \in \mathbb{F}^{n \times q}, Y \in \mathbb{F}^{m \times p}$, 证明: 矩阵方程 $AX - YB = C$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 。

证明. 必要性: 设 X_0, Y_0 是方程的一个解, 则 $AX_0 - Y_0B = C$, 此时 $\begin{bmatrix} A & AX_0 - Y_0B \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & AX_0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & O \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

故 $\text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 。

充分性：设 $\text{rank } A = r, \text{rank } B = s, \exists P_A, Q_A, P_B, Q_B$ s. t. $P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}, P_B B Q_B = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & O \end{bmatrix}_{p \times q}$ ，对

方程进行变形： $AX - YB = C \Leftrightarrow P_A(AX - YB)Q_B = P_A C Q_B \Leftrightarrow (P_A A Q_A)(Q_A^{-1} X Q_B) - (P_A Y P_B^{-1})(P_B B Q_B) = P_A C Q_B$ 。令 $A' = P_A A Q_A, B' = P_B B Q_B, X' = Q_A^{-1} X Q_B, Y' = P_A Y P_B^{-1}, C' = P_A C Q_B$ ，方程化为 $A' X' - Y' B' = C'$ 。

又 $r + s = \text{rank } A + \text{rank } B = \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} P_A & \\ & P_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A & \\ & Q_B \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} P_A A Q_A & P_A C Q_B \\ O & P_B B Q_B \end{bmatrix} =$

$\text{rank} \begin{bmatrix} A' & C' \\ O & B' \end{bmatrix}$ ，将 C' 按匹配 A', B' 的结构分块为 $\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix}$ ，则 $\begin{bmatrix} A' & C' \\ O & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O & C'_{11} & C'_{12} \\ O & O & C'_{21} & C'_{22} \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$ ，利用初等

变换可以得到 $r + s = \text{rank} \begin{bmatrix} I_r & O & C'_{11} & C'_{12} \\ O & O & C'_{21} & C'_{22} \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C'_{22} \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} = r + s + \text{rank } C'_{22}$ ，故 $C'_{22} = O$ 。考虑

变形后的方程 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_{11} - Y'_{11} & X'_{12} \\ -Y'_{21} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ C'_{21} & O \end{bmatrix}$ ，此时此方程显然有解，从而原方程有解。