

线性代数习题课讲义

陈文轩

更新: August 1, 2026

目录

1 相合、惯性与符号	1
2 正定性与矩阵方法	2
3 标准形与约束极值	4
4 正定矩阵的综合应用	7

1 相合、惯性与符号

例 1.1 判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

1. 相合的两个实对称矩阵具有相同的特征多项式；
2. 相似的两个实对称矩阵一定相合；
3. 若两个实对称矩阵的秩与行列式分别相等，则它们相合；
4. 实对称矩阵 A 与 $-A$ 相合，当且仅当 A 的正、负惯性指数相等。

解答

1. 错误。取 $A = [1], B = [4]$ ，则

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T B \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

故 A, B 相合，但它们的特征多项式分别为 $\lambda - 1$ 与 $\lambda - 4$ 。

2. 正确。相似矩阵具有相同的特征值及其重数。由实对称矩阵的正交对角化，适当排列对角元后，存在正交矩阵 U, V 以及实对角矩阵 D ，使得

$$A = UDU^T, \quad B = VDV^T.$$

令 $P = VU^T$, 则 P 可逆, 且

$$P^T B P = UV^T (VDV^T) VU^T = UDU^T = A,$$

所以 A, B 相合。

3. 错误。取

$$A = I_3, \quad B = \text{diag}\left(2, -1, -\frac{1}{2}\right).$$

二者的秩均为 3, 行列式均为 1, 但 A 的正、负惯性指数为 $(3, 0)$, B 的正、负惯性指数为 $(1, 2)$, 故由惯性定律知二者不相合。

4. 正确。设 A 的正、负惯性指数分别为 p, q 。若 A 与 $-A$ 相合, 则二者的惯性指数相同; 而 $-A$ 的正、负惯性指数分别为 q, p , 故 $p = q$ 。

反之, 若 $p = q$, 则 A 与 $-A$ 的相合规范形分别可以写成

$$\text{diag}(I_p, -I_p, O), \quad \text{diag}(-I_p, I_p, O).$$

交换前两组坐标即可将一个规范形变为另一个, 故 A 与 $-A$ 相合。

例 1.2 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $Q(x) = x^T A x$ 。判断以下命题是否正确。若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例。

1. 若 A 奇异, 则存在非零向量 x 使得 $Q(x) = 0$;
2. 若存在非零向量 x 使得 $Q(x) = 0$, 则 A 奇异;
3. 若 $Q(x) = 0$ 只有零解, 则 Q 或为正定二次型, 或为负定二次型;
4. 若 $\text{tr} A > 0$, 则 A 的正惯性指数大于负惯性指数。

解答

1. 正确。若 A 奇异, 则齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解。对这样的非零向量 x , 有 $Q(x) = x^T A x = 0$ 。
2. 错误。取

$$A = \text{diag}(1, -1), \quad x = (1, 1)^T.$$

则 $\det A = -1 \neq 0$, 但 $x \neq 0$ 且 $Q(x) = 1 - 1 = 0$ 。

3. 正确。设 Q 的相合规范形为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2.$$

若 $p+q < n$, 则取零系数对应的单位向量便得到非零零点; 若 p, q 均非零, 则取 $y_1 = y_{p+1} = 1$ 、其余分量为零, 也得到非零零点。由题设, 这两种情形均不可能, 故只能有 $p = n, q = 0$ 或 $p = 0, q = n$, 即 Q 正定或负定。

4. 错误。取

$$A = \text{diag}(100, -1, -1).$$

此时 $\text{tr} A = 98 > 0$, 但 A 的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2。

2 正定性与矩阵方法

例 2.1 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵。判断以下命题是否正确。若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例。

1. 若 $a_{ii} > 0 (i = 1, \dots, n)$, 则 A 正定;
2. 若 A 的各阶顺序主子式均非负, 则 A 半正定;
3. 若 A 半正定且 $x^T Ax = 0$, 则 $Ax = 0$;
4. 若 A 半正定且 $a_{ii} = 0$, 则 A 的第 i 行与第 i 列均为零。

解答

1. 错误。取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

它的对角元均为正, 但 $(1, -1)A(1, -1)^T = -2 < 0$, 故 A 不正定。

2. 错误。取

$$A = \text{diag}(0, -1, -1).$$

它的三个顺序主子式均为 0, 但 $e_2^T A e_2 = -1 < 0$, 故 A 不半正定。半正定判别要求所有主子式非负, 而不能只检查顺序主子式。

3. 正确。将 A 正交对角化为

$$A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^T, \quad \lambda_i \geq 0.$$

令 $y = U^T x$, 则

$$0 = x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

各项均非负, 故 $\lambda_i y_i = 0 (i = 1, \dots, n)$, 从而

$$Ax = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y = 0.$$

4. 正确。对任意 $j \neq i$, 由 A 半正定知其第 i, j 行列构成的二阶主子矩阵半正定, 故

$$\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 = -a_{ij}^2 \geq 0.$$

因此 $a_{ij} = a_{ji} = 0$ 。由 j 的任意性, A 的第 i 行与第 i 列均为零。

例 2.2 以下矩阵均为实对称矩阵。判断下列命题是否正确。若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例。

1. 若 A^2 正定, 则 A 正定;
2. 若 A^{2k+1} 正定, 其中 k 为非负整数, 则 A 正定;
3. 若 A, B 均半正定, 则 $A + B$ 正定当且仅当 $\ker A \cap \ker B = \{0\}$;
4. 设

$$M = \begin{bmatrix} B & C \\ C^T & D \end{bmatrix}, \quad B \succ 0.$$

则 $M \succ 0$ 当且仅当 $D - C^T B^{-1} C \succ 0$ 。

解答

1. 错误。取 $A = -I_n$, 则 $A^2 = I_n$ 正定, 但 A 负定。

2. 正确。设 A 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则 A^{2k+1} 的特征值为

$$\lambda_1^{2k+1}, \dots, \lambda_n^{2k+1}.$$

由 A^{2k+1} 正定知 $\lambda_i^{2k+1} > 0$, 而奇次幂保持实数的符号, 故 $\lambda_i > 0$ 。因此 A 正定。

3. 正确。若 $A+B$ 正定, 则对任意 $x \in \ker A \cap \ker B$, 有

$$x^\top (A+B)x = 0,$$

从而只能有 $x = 0$ 。

反之, 设 $\ker A \cap \ker B = \{0\}$ 。若 $x^\top (A+B)x = 0$, 则

$$x^\top Ax + x^\top Bx = 0.$$

两项均非负, 故它们均为零。由于 A, B 半正定,

$$x^\top Ax = \|A^{1/2}x\|^2 = 0, \quad x^\top Bx = \|B^{1/2}x\|^2 = 0,$$

从而 $Ax = Bx = 0$ 。于是 $x \in \ker A \cap \ker B = \{0\}$, 所以 $A+B$ 正定。

4. 正确。令

$$P = \begin{bmatrix} I & -B^{-1}C \\ O & I \end{bmatrix}.$$

则 P 可逆, 并且直接计算得

$$P^\top M P = \begin{bmatrix} B & O \\ O & D - C^\top B^{-1}C \end{bmatrix}.$$

正定性在可逆相合变换下保持不变。由于 $B \succ 0$, 右端分块对角矩阵正定当且仅当 $D - C^\top B^{-1}C \succ 0$, 故结论成立。

3 标准形与约束极值

例 3.1 设实二次型

$$Q_a(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2ax_2x_3.$$

1. 用可逆线性变换将 Q_a 化为对角形;
2. 求 Q_a 的正、负惯性指数及秩;
3. 求 Q_a 正定、半正定或不定时参数 a 的取值范围。

解答 配方得

$$Q_a(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(a+1)x_2x_3.$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \quad y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_2 - x_3.$$

该变换可逆, 其逆变换为

$$x_1 = y_1 - y_3, \quad x_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_3 = \frac{y_2 - y_3}{2}.$$

因此

$$Q_a = y_1^2 + \frac{a+2}{2}y_2^2 - \frac{a}{2}y_3^2.$$

由三个平方项系数的符号可得：

a 的范围	正惯性指数	负惯性指数	$\text{rank } Q_a$	Q_a 的类型
$a < -2$	2	1	3	不定
$a = -2$	2	0	2	半正定
$-2 < a < 0$	3	0	3	正定
$a = 0$	2	0	2	半正定
$a > 0$	2	1	3	不定

例 3.2 设

$$Q(x) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

1. 求一个正交变换 $x = Py$ ，将 Q 化为标准形；
2. 在约束 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 下，求 $Q(x)$ 的最大值与最小值，并求取到等号的全部向量。

解答 Q 对应的实对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2I_3 + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top, \quad \mathbf{1} = (1, 1, 1)^\top.$$

向量 $\mathbf{1}$ 是属于特征值 5 的特征向量，而平面

$$\mathbf{1}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

是特征值 2 的特征子空间。取标准正交特征向量

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^\top, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^\top.$$

令 $P = (u_1, u_2, u_3)$ ，则 P 为正交矩阵，且

$$P^\top AP = \text{diag}(5, 2, 2).$$

因而在正交变换 $x = Py$ 下，

$$Q(x) = 5y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2.$$

约束条件化为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ ，所以

$$2 \leq Q(x) \leq 5.$$

最大值为 5，当且仅当

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^\top.$$

最小值为 2，当且仅当

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

例 3.3 对 $n \geq 2$ ，设

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

1. 求 Q 对应的矩阵、秩和惯性指数;
2. 用正交变换将 Q 化为标准形, 并求方程 $Q(x) = 0$ 的全部解;
3. 在 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 下求 Q 的最大值与最小值。

解答 展开并整理得

$$\begin{aligned} Q(x) &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \end{aligned}$$

令 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$, 则

$$Q(x) = x^\top (nI_n - \mathbf{1}\mathbf{1}^\top)x.$$

记 $A = nI_n - \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$. 由于

$$A\mathbf{1} = 0, \quad Ax = nx \quad (x \perp \mathbf{1}),$$

故 A 的特征值为 0 (一次) 和 n ($n-1$ 次)。因此

$$\text{rank } A = n-1,$$

Q 的正、负惯性指数分别为 $n-1, 0$, 零指数为 1。

取 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$, 再将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基

$$u_1, \dots, u_{n-1}, u_n,$$

令 $P = (u_1, \dots, u_n)$ 。在正交变换 $x = Py$ 下,

$$Q(x) = n(y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2).$$

从而

$$Q(x) = 0 \iff x = t\mathbf{1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

当 $\|x\| = 1$ 时,

$$Q(x) = n - (x_1 + \dots + x_n)^2.$$

由 Cauchy 不等式,

$$0 \leq (x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n.$$

故 Q 的最小值为 0, 在

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$$

时取得; 最大值为 n , 在所有满足

$$x_1 + \dots + x_n = 0, \quad \|x\| = 1$$

的向量处取得。

4 正定矩阵的综合应用

例 4.1 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, 记

$$A_t = A - t u u^\top, \quad s = u^\top A^{-1} u.$$

1. 求 $\det A_t$;
2. 根据 t 的取值确定 A_t 的惯性指数, 并给出 A_t 正定或半正定的充分必要条件。

证明. 由于 $A \succ 0$, 存在正定平方根 $A^{1/2}$. 令

$$v = A^{-1/2} u,$$

则 $v^\top v = s > 0$, 且

$$A_t = A^{1/2} (I_n - t v v^\top) A^{1/2}.$$

因而 A_t 与 $I_n - t v v^\top$ 相合。

对任意 $x \perp v$, 有

$$(I_n - t v v^\top) x = x;$$

而

$$(I_n - t v v^\top) v = (1 - ts) v.$$

所以 $I_n - t v v^\top$ 的特征值为 1 ($n-1$ 次) 和 $1-ts$ (一次)。于是

$$\det A_t = \det A \cdot \det(I_n - t v v^\top) = \det A (1 - ts).$$

再由惯性定律可得:

t 的范围	正惯性指数	负惯性指数	零指数
$t < \frac{1}{s}$	n	0	0
$t = \frac{1}{s}$	$n-1$	0	1
$t > \frac{1}{s}$	$n-1$	1	0

因此

$$A_t \succ 0 \iff t < \frac{1}{u^\top A^{-1} u},$$

且 A_t 半正定但不正定当且仅当

$$t = \frac{1}{u^\top A^{-1} u}.$$

例 4.2 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵, $x, y \in \mathbb{R}^n$ 。

1. 证明加权 Cauchy 不等式

$$(x^\top y)^2 \leq (x^\top A x)(y^\top A^{-1} y),$$

并讨论等号成立条件;

2. 对给定的非零向量 b , 求 $b^\top x$ 在约束 $x^\top A x = 1$ 下的最大值、最小值及取到等号的向量。

证明. 令

$$p = A^{1/2}x, \quad q = A^{-1/2}y.$$

则

$$p^\top q = x^\top y, \quad p^\top p = x^\top Ax, \quad q^\top q = y^\top A^{-1}y.$$

对 p, q 使用通常的 Cauchy 不等式即得

$$(x^\top y)^2 \leq (x^\top Ax)(y^\top A^{-1}y).$$

当 x, y 均非零时, 等号成立当且仅当 p, q 线性相关, 即

$$x \text{ 与 } A^{-1}y \text{ 线性相关,}$$

等价地, y 与 Ax 线性相关。

在不等式中取 $y = b$, 并利用 $x^\top Ax = 1$, 得

$$\|b^\top x\| \leq \sqrt{b^\top A^{-1}b}.$$

因此最大值与最小值分别为

$$\sqrt{b^\top A^{-1}b}, \quad -\sqrt{b^\top A^{-1}b}.$$

它们分别在

$$x = \frac{A^{-1}b}{\sqrt{b^\top A^{-1}b}}, \quad x = -\frac{A^{-1}b}{\sqrt{b^\top A^{-1}b}}$$

处取得。

例 4.3 设 A, B 均为 n 阶实对称正定矩阵。

1. 证明 AB 可在实数域上对角化, 且其全部特征值均为正数;
2. 证明广义特征值问题

$$Bx = \lambda Ax$$

有 n 个正的特征值 (计重数), 且存在一组对应的特征向量 $x_1, \dots, x_n$ 满足

$$x_i^\top Ax_j = \delta_{ij}.$$

证明. 有

$$A^{-1/2}(AB)A^{1/2} = A^{1/2}BA^{1/2}.$$

右端是实对称正定矩阵, 故可以正交对角化, 且全部特征值均为正数。因此 AB 与一个实对称正定矩阵相似, 从而 AB 可在实数域上对角化, 且全部特征值均为正数。

再令

$$C = A^{-1/2}BA^{-1/2}.$$

C 是实对称正定矩阵, 故存在一组标准正交特征向量 $z_1, \dots, z_n$ 及正特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 使得

$$Cz_i = \lambda_i z_i.$$

令 $x_i = A^{-1/2}z_i$, 则

$$Bx_i = BA^{-1/2}z_i = A^{1/2}Cz_i = \lambda_i A^{1/2}z_i = \lambda_i Ax_i.$$

并且

$$x_i^\top Ax_j = z_i^\top A^{-1/2} AA^{-1/2} z_j = z_i^\top z_j = \delta_{ij}.$$

故结论成立。