

期末复习

陈文轩

更新: August 1, 2026

目录

1	线性变换与矩阵的相似	2
1.1	基本方法回顾	2
1.1.1	基变换与特征值的计算	2
1.1.2	特征值与特征向量的性质	2
1.1.3	可对角化	3
1.2	典型例题	3
2	正交变换与内积空间	6
2.1	基本方法回顾	6
2.1.1	范数与赋范空间	6
2.1.2	内积与正交性	6
2.1.3	基本定理	7
2.1.4	Gram 矩阵	7
2.1.5	标准正交基与 Schmidt 正交化	8
2.1.6	正交变换与对称变换	8
2.1.7	实对称矩阵的性质	8
2.2	典型例题	9
3	二次型与对称矩阵的相合	12
3.1	基本方法回顾	12

3.1.1	相合的定义	12
3.1.2	相合标准型的求法	12
3.1.3	相合规范型	12
3.1.4	二次曲面的分类	12
3.1.5	正定、半正定、负定、半负定	13
3.1.6	正定的等价命题	13
3.1.7	半正定的等价命题	13
3.2	典型例题	14

1 线性变换与矩阵的相似

1.1 基本方法回顾

1.1.1 基变换与特征值的计算

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 A 。若

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P,$$

其中 P 可逆, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP.$$

对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 特征值与特征向量的计算步骤为:

1. 计算特征多项式

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad \sum_{i=1}^s n_i = n.$$

2. 解 $p_A(\lambda) = 0$ 得到特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 及其代数重数;

3. 对每个特征值 λ_i , 求齐次方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的非零解。

1.1.2 特征值与特征向量的性质

- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 仍为对应特征向量;
- 若 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, x 仍为对应特征向量;
- 若 λ 是 A 的特征值, 则 λ 也是 A^T 的特征值, 但原特征向量 x 不一定是 A^T 的特征向量;
- 若 A 是正交矩阵, 则 A 的任意复特征值 λ 满足 $|\lambda| = 1$;
- 若 A 是实对称矩阵, 则 A 的特征值全为实数, 且存在正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = P^T AP$ 为对角矩阵;
- 若 A 是实反对称矩阵, 即 $A = -A^T$, 则 A 的特征值为纯虚数或零。

- 特征值是相似不变量。若 A, B 相似, 则它们有相同的特征值;
- 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值 (按重数计), 则

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

- 若 A, B 均可对角化, 则 $AB = BA$ 当且仅当 A, B 可以同时相似对角化。

1.1.3 可对角化

不是所有方阵都可对角化。常用充分条件与判别方式如下:

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 可对角化;
- 若 A 的每个特征值的代数重数都等于几何重数, 则 A 可对角化;
- 若 A 的所有特征值的几何重数之和等于 n , 则 A 可对角化;
- 若 A 的最小多项式没有重根, 则 A 可对角化。

1.2 典型例题

例 1.1 设

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. 求 A_a 的特征值与特征子空间;
2. 判断 a 取何值时 A_a 可对角化, 并在可对角化时给出一个相似对角阵。

解答 A_a 是上三角矩阵, 因此

$$p_{A_a}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

故 A_a 的特征值为 1, 2, 其中 1 的代数重数为 2, 2 的代数重数为 1。

当 $\lambda = 1$ 时,

$$A_a - I = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

若 $a = 0$, 则 $x_3 = 0$, x_1, x_2 自由,

$$V_1 = \ker(A_a - I) = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}.$$

若 $a \neq 0$, 则 $x_2 = x_3 = 0$,

$$V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}.$$

当 $\lambda = 2$ 时, 解 $(A_a - 2I)x = 0$, 即

$$\begin{cases} -x_1 + ax_2 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$, 得 $x_2 = 1, x_1 = a$, 所以

$$V_2 = \text{span}\{(a, 1, 1)^\top\}.$$

A_a 可对角化当且仅当特征子空间维数之和为 3。因此

$$A_a \text{ 可对角化} \iff a = 0.$$

当 $a = 0$ 时, 取

$$P = (e_1, e_2, (0, 1, 1)^\top),$$

则

$$P^{-1}A_0P = \text{diag}(1, 1, 2).$$

例 1.2 证明

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

与

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

相似。

证明. 记 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$ 。对任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Nx = (x_1 + \cdots + x_n)\mathbf{1}.$$

因此

$$\ker N = \{x \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\},$$

从而 $\dim \ker N = n - 1$ 。又

$$N\mathbf{1} = n\mathbf{1},$$

故 $\dim \ker(N - nI) = 1$ 。于是 N 的特征值 $0, n$ 的几何重数之和为 n , 故 N 可对角化, 并且相似于

$$\text{diag}(n, 0, \dots, 0) = nE_{11}.$$

对 A , 有

$$Ax = x_1(n, n-1, \dots, 1)^\top.$$

所以 $\ker A = \{x \mid x_1 = 0\}$, $\dim \ker A = n - 1$ 。又

$$A(n, n-1, \dots, 1)^\top = n(n, n-1, \dots, 1)^\top,$$

故 $\dim \ker(A - nI) = 1$ 。同理 A 也可对角化, 且相似于 nE_{11} 。

因为 A, N 都相似于 nE_{11} , 所以 A 与 N 相似。

例 1.3 设 $M_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基,

$$\beta_1 = (-1, 0, 1)^\top, \quad \beta_2 = (0, 1, 1)^\top, \quad \beta_3 = (2, -1, -2)^\top,$$

记 $M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。线性变换 σ 满足

$$\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^\top,$$

$$\sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^\top,$$

$$\sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^\top.$$

分别求 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵 T_1, T_2 。

解答 先把 $\sigma(\beta_i)$ 表示成 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性组合。直接解坐标可得

$$\sigma(\beta_1) = -5\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3,$$

$$\sigma(\beta_2) = -\beta_2,$$

$$\sigma(\beta_3) = -3\beta_1 - 5\beta_2 - 4\beta_3.$$

因此

$$T_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

记 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 。由于 B 是从 M_2 坐标到标准坐标的过渡矩阵, 所以

$$T_1 = BT_2B^{-1}.$$

计算得

$$T_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

例 1.4 A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

1. 给出 A 的所有可能的互异特征值;
2. 若 n 是奇数, 证明 A^* 正定。

解答 若 λ 是 A 的特征值, 取对应特征向量 $0 \neq x$, 则

$$(A^2 + 3A + 2I)x = (\lambda^2 + 3\lambda + 2)x = 0.$$

故

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

即 A 的可能特征值为

$$-1, \quad -2.$$

由于 A 的特征值均非零, A 可逆。又 A 实对称, 故 A^{-1} 实对称。 A^{-1} 的特征值只能是

$$-1, \quad -\frac{1}{2},$$

因而 $A^{-1} \prec 0$ 。

当 n 是奇数时, A 的每个特征值都为负, 所以

$$\det A < 0.$$

由伴随矩阵公式

$$A^* = \det A \cdot A^{-1},$$

而 $\det A < 0, A^{-1} \prec 0$, 于是

$$A^* \succ 0.$$

2 正交变换与内积空间

2.1 基本方法回顾

2.1.1 范数与赋范空间

设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间。若函数 $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- 正定性: $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间。此时

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

是 X 上的一个度量, 称为典则度量。

2.1.2 内积与正交性

若函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 满足:

- 对第一变元线性:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle;$$

- 对第二变元共轭线性:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle;$$

- 共轭对称: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

- 正定性: $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积。内积诱导范数

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

若 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x, y 正交, 记作 $x \perp y$ 。对 $M \subset X$, 定义

$$M^\perp = \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}.$$

若 M 是有限维内积空间 X 的子空间, 则

$$X = M \oplus M^\perp.$$

2.1.3 基本定理

- Cauchy-Schwarz 不等式:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

等号成立当且仅当 x, y 线性相关。

- 实内积空间上的极化恒等式:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

- 复内积空间上的极化恒等式:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

- 由内积诱导的范数满足平行四边形法则:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- 勾股定理:

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2.1.4 Gram 矩阵

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是内积空间 X 的一组基, 则

$$G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n \times n}$$

称为这组基的 Gram 矩阵, 且 $G \succ 0$ 。若

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x, \quad \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)y,$$

则

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x^\top G y.$$

若

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P,$$

则两组基的 Gram 矩阵满足

$$G_\beta = P^\top G_\alpha P.$$

2.1.5 标准正交基与 Schmidt 正交化

若一组基 $e_1, \dots, e_n$ 满足

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

则称其为标准正交基。

对一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, Schmidt 正交化过程为

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1, & u_1 &= \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \langle \alpha_2, u_1 \rangle u_1, & u_2 &= \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \langle \alpha_3, u_1 \rangle u_1 - \langle \alpha_3, u_2 \rangle u_2, & u_3 &= \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}, \\ &\vdots & & \\ \beta_n &= \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_n, u_j \rangle u_j, & u_n &= \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}.\end{aligned}$$

则 $u_1, \dots, u_n$ 是标准正交基。

2.1.6 正交变换与对称变换

设 $T: X \rightarrow X$ 为线性变换。

- 若对任意 $x, y \in X$, 有

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle,$$

则称 T 是正交变换;

- 若对任意 $x, y \in X$, 有

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle,$$

则称 T 是对称变换。

以下条件等价:

- T 是正交变换;
- T 保范数, 即 $\|Tx\| = \|x\|$;
- T 把标准正交基映成标准正交基;
- T 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

2.1.7 实对称矩阵的性质

实对称矩阵具有以下性质:

- 特征值全为实数;
- 属于不同特征值的特征向量相互正交;
- 可以正交对角化。

2.2 典型例题

例 2.1 在 $\mathbb{R}^3$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = x^T G y, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. 证明这是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积;
2. 设 $U = \text{span}\{u\}$, $u = (1, 0, 1)^T$, 求 $U^\perp$;
3. 求 $v = (1, 1, 0)^T$ 在 U 上的正交投影与到 U 的距离。

解答 因为 $G = G^T$, 且其顺序主子式为

$$2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \det G = 4,$$

均为正, 所以 $G \succ 0$ 。因此 $x^T G y$ 定义了 $\mathbb{R}^3$ 上的内积。

由于

$$Gu = (2, 2, 2)^T,$$

所以

$$x \in U^\perp \iff \langle x, u \rangle = x^T Gu = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0.$$

因此

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

设 $\text{proj}_U v = cu$ 。由正交投影公式,

$$c = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

计算得

$$\langle v, u \rangle = v^T Gu = 4, \quad \langle u, u \rangle = u^T Gu = 4,$$

所以

$$\text{proj}_U v = u.$$

又 $v - u = (0, 1, -1)^T$, 故

$$d(v, U) = \|v - u\| = \sqrt{(v - u)^T G (v - u)} = \sqrt{2}.$$

例 2.2 设 V 为次数不超过 2 的实系数多项式空间, 定义

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

1. 证明这定义了 V 上的一个内积;
2. 用 Schmidt 正交化将 $1, x$ 改造成标准正交向量组。

解答 对称性与线性性显然成立。重点验证正定性:

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 \geq 0.$$

若 $\langle f, f \rangle = 0$, 则

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0.$$

但 f 的次数不超过 2, 若有三个不同零点, 只能 $f = 0$ 。故这是内积。

令 $f_1 = 1, f_2 = x$ 。先有

$$\|f_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, \quad u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

接着

$$\langle f_2, u_1 \rangle = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

因此

$$\beta_2 = f_2 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1 = x - 1.$$

又

$$\|\beta_2\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2,$$

所以

$$u_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1).$$

故所求标准正交向量组为

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) \right\}.$$

例 2.3 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in X, \quad A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{s \times s}.$$

证明:

$$\text{rank } A = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

证明. 设 A_i 是 A 的第 i 列, 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组。只需证明 $A_1, \dots, A_r$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组。

先证 $A_1, \dots, A_r$ 线性无关。若

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i = 0,$$

则对任意 $1 \leq k \leq s$, 有

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = 0,$$

即

$$\left\langle \alpha_k, \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\rangle = 0.$$

取 $k = 1, \dots, r$ 后乘以 λ_k 并求和, 得到

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\|^2 = 0.$$

因此

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i = 0.$$

由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关知 $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ 。

再证其余列均可由 $A_1, \dots, A_r$ 线性表示。对任意 $k > r$, 存在 $\mu_1, \dots, \mu_r$ 使得

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i.$$

于是

$$A_k = (\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle)_{j=1}^s = \sum_{i=1}^r \mu_i (\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle)_{j=1}^s = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i.$$

故

$$\text{rank } A = r = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

例 2.4 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 且

$$\alpha_1 = (-1, -1, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (1, -2, -1)^\top$$

分别为属于特征值 $1, 2$ 的特征向量。

1. 求属于特征值 3 的特征向量全体;
2. 求矩阵 A 。

解答 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交。因此属于特征值 3 的特征向量必须同时垂直于 α_1, α_2 。

设 $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, 则

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解得 $x_2 = 0, x_1 = x_3$, 所以

$$V_3 = \{t(1, 0, 1)^\top \mid t \neq 0\}.$$

取 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^\top$ 。将三组互相正交的特征向量归一化:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^\top, \\ e_2 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)^\top, \\ e_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^\top. \end{aligned}$$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$ 。由正交对角化,

$$P^\top A P = \text{diag}(1, 2, 3),$$

故

$$A = P \text{diag}(1, 2, 3) P^\top = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}.$$

3 二次型与对称矩阵的相合

3.1 基本方法回顾

3.1.1 相合的定义

设 A, B 为 n 阶实对称矩阵。若存在可逆矩阵 P 使得

$$A = P^T B P,$$

则称 A, B 相合。相合是等价关系，满足自反性、对称性和传递性。

每一个实二次型都与一个实对称矩阵一一对应；矩阵的相合等价于对二次型作可逆线性换元。

3.1.2 相合标准型的求法

常用的相合对角化方法如下：

- 正交相似/正交相合：若 A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 P ，使 $P^T A P$ 为对角矩阵；
- 配方法：若二次型中有平方项，则直接配方；若没有平方项，可利用

$$ab = \frac{1}{4} \left((a+b)^2 - (a-b)^2 \right)$$

先构造平方项；

- 初等变换法：对

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$$

同时作成对的行、列初等变换，最终得到

$$\begin{bmatrix} P^T A P \\ P \end{bmatrix}.$$

3.1.3 相合规范型

任意实对称矩阵 A 都相合于唯一的规范型

$$\text{diag}(I_r, -I_s, O),$$

其中 $r + s = \text{rank } A$ 。 r 称为正惯性指数， s 称为负惯性指数， $r - s$ 称为符号差。由惯性定律， r, s 由 A 唯一确定。

3.1.4 二次曲面的分类

若已将 $\mathbb{R}^3$ 中的二次曲面化为标准形式，则有如下常见分类（假设 $a, b, c > 0$ ）：

- $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$: 椭球面;
- $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$: 单叶双曲面;
- $ax^2 - by^2 - cz^2 = 1$: 双叶双曲面;
- $ax^2 + by^2 - cz = 0$: 椭圆抛物面;
- $ax^2 - by^2 - cz = 0$: 双曲抛物面;
- $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$: 圆锥面;
- $ax^2 + by^2 = 1$: 椭圆圆柱面;
- $ax^2 - by^2 = 1$: 双曲圆柱面;
- $ax^2 - by = 0$: 抛物圆柱面。

3.1.5 正定、半正定、负定、半负定

对实对称矩阵 A :

- 若对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^T A x > 0$, 则称 A 正定, 记作 $A \succ 0$;
- 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^T A x \geq 0$, 则称 A 半正定, 记作 $A \succeq 0$;
- 若对任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^T A x < 0$, 则称 A 负定, 记作 $A \prec 0$;
- 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $x^T A x \leq 0$, 则称 A 半负定, 记作 $A \preceq 0$ 。

3.1.6 正定的等价命题

对实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 以下命题等价:

- A 正定;
- A 的正惯性指数为 n , 负惯性指数为 0;
- A 的特征值全为正数;
- 存在唯一的 $B \succ 0$, 使得 $A = B^2$;
- 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$;
- A 的所有顺序主子式全为正。

3.1.7 半正定的等价命题

对实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 以下命题等价:

- A 半正定;
- A 的正惯性指数为 $r = \text{rank } A$, 负惯性指数为 0;
- A 的特征值全为非负数;
- 存在 $B \succeq 0$, 使得 $A = B^2$ 且 $\text{rank } A = \text{rank } B$;
- 存在矩阵 P , 使得 $A = P^T P$ 且 $\text{rank } A = \text{rank } P$;
- A 的所有主子式全为非负;
- A 的所有 k 阶主子式之和为非负。

3.2 典型例题

例 3.1 设

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_t(x) = x^\top A_t x.$$

1. 将 Q_t 配方化为对角形;
2. 求 A_t 的正、负惯性指数及秩;
3. 求 A_t 正定、半正定或不定时 t 的取值范围。

解答 展开二次型:

$$Q_t = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3.$$

配方得

$$Q_t = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + tx_3)^2 + (2 - t^2)x_3^2.$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 + tx_3, \quad y_3 = x_3.$$

该变换可逆, 因为

$$x_3 = y_3, \quad x_2 = y_2 - ty_3, \quad x_1 = y_1 - y_2 + ty_3.$$

因而

$$Q_t = y_1^2 + y_2^2 + (2 - t^2)y_3^2.$$

由对角项符号得到:

t 的范围	正惯性指数	负惯性指数	$\text{rank } A_t$	A_t 的类型
$ t < \sqrt{2}$	3	0	3	正定
$ t = \sqrt{2}$	2	0	2	半正定
$ t > \sqrt{2}$	2	1	3	不定

例 3.2 设实二次型

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1. 利用正交变换把 Q 化为标准型, 并写出正交变换矩阵;
2. 判断 $Q(x) = -1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的曲面类型。

解答 二次型对应的实对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算特征值得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = -4.$$

对应特征向量可取

$$x_1 = (-1, 0, 1)^\top, \quad x_2 = (-1, 2, 0)^\top, \quad x_3 = (2, 1, 2)^\top.$$

注意 $\lambda = 5$ 的特征子空间是二维的, 需在其中取一组正交基。对 x_1, x_2 作 Schmidt 正交化并归一化, 连同 x_3 归一化后得到

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

则 P 是正交矩阵, 且

$$P^T A P = \text{diag}(5, 5, -4).$$

在正交变换 $x = Py$ 下,

$$Q = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2.$$

因此 $Q(x) = -1$ 化为

$$4y_3^2 - 5y_1^2 - 5y_2^2 = 1,$$

表示双叶双曲面。

例 3.3 A 是 n 阶实对称矩阵且 $\det A < 0$ 。证明:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T A x < 0.$$

证明. 由于 A 实对称, 存在正交矩阵 P 使

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

于是

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n < 0.$$

所以至少存在一个 i , 使得 $\lambda_i < 0$ 。取

$$x = P e_i,$$

则

$$x^T A x = e_i^T P^T A P e_i = \lambda_i < 0.$$

例 3.4 A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明以下结论:

1. 若 A 正定, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^T A P = I_n$, $P^T B P$ 为对角矩阵, 且 $P^T B P$ 的对角元全是 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根;
2. 若 A, B 均半正定, 则存在可逆矩阵 H 使得 $H^T A H, H^T B H$ 均为对角矩阵。

证明. (1) 由 $A \succ 0$, 存在可逆矩阵 Q 使得

$$Q^T A Q = I_n.$$

又 $Q^T B Q$ 是实对称矩阵, 故存在正交矩阵 S 使

$$S^T Q^T B Q S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

令 $P = QS$, 则

$$P^T A P = I_n, \quad P^T B P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

由 $P^\top AP = I_n$ 得

$$A = (P^\top)^{-1}P^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\det(\lambda A - B) &= \det(\lambda(P^\top)^{-1}P^{-1} - B) \\ &= \frac{\det(\lambda I - P^\top BP)}{(\det P)^2}.\end{aligned}$$

所以 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 均为 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根。

(2) 因为 $A, B \succeq 0$, 所以 $A + B \succeq 0$ 。存在可逆矩阵 P 使

$$P^\top(A + B)P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

设

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_4 \end{bmatrix}.$$

则

$$P^\top BP = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^\top & -A_4 \end{bmatrix}.$$

由 $P^\top AP \succeq 0$ 与 $P^\top BP \succeq 0$, 可得 $A_4 \succeq 0$ 且 $-A_4 \succeq 0$, 故 $A_4 = O$ 。

若 $A_2 \neq O$, 则可取 u, v 使 $u^\top A_2 v < 0$ 。此时

$$\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = u^\top A_1 u + 2\lambda u^\top A_2 v.$$

取 λ 足够大, 右端为负, 与 $P^\top AP \succeq 0$ 矛盾。因此 $A_2 = O$ 。

于是

$$P^\top AP = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad P^\top BP = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

取正交矩阵 Q 使 $Q^\top A_1 Q$ 为对角矩阵, 则 $Q^\top(I_r - A_1)Q$ 也为对角矩阵。令

$$H = P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

则 $H^\top AH, H^\top BH$ 均为对角矩阵。