



# 线性代数作业答案

作者：陈文轩

组织：KFRC

时间：August 1, 2026

版本：3.0.0.3210



# 目录

|             |     |
|-------------|-----|
| 第一章 向量      | 1   |
| 第二章 线性方程组   | 9   |
| 第三章 行列式     | 17  |
| 第四章 矩阵      | 30  |
| 第五章 线性空间    | 63  |
| 第六章 线性变换    | 91  |
| 第七章 内积空间及变换 | 125 |
| 第八章 实二次型    | 153 |

# 第一章 向量

注：以下各题中涉及的坐标系均为直角坐标系

## 作业 1.1 (Ch1 T1)

设  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ，证明：对任意一点  $O$ ， $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 。

证明 由

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

以及  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ，得

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}.$$

整理即得

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

## 作业 1.2 (Ch1 T2)

设  $O$  为一定点， $A, B, C$  为不共线的三点。证明点  $M$  位于平面  $ABC$  上的充分必要条件是存在实数  $k_1, k_2, k_3$ ，使得

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad \text{且} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

证明 先证必要性。若  $M \in \text{平面} ABC$ ，则  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  不共线，且  $\overrightarrow{AM}$  可表为

$$\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

其中  $s, t \in \mathbb{R}$ 。于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1 - s - t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

令  $k_1 = 1 - s - t, k_2 = s, k_3 = t$ ，则  $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ 。

再证充分性。若存在实数  $k_1, k_2, k_3$  满足

$$\overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1,$$

则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ &= (k_1 - 1)\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC} \\ &= -(k_2 + k_3)\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{OB} + k_3\overrightarrow{OC} \\ &= k_2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + k_3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= k_2\overrightarrow{AB} + k_3\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

故  $\overrightarrow{AM}$  是  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  的线性组合，从而  $M \in \text{平面} ABC$ 。

综上，命题得证。

### 作业 1.3 (Ch1 T3)

证明向量  $a - b + c, -2a + 3b - 2c, 2a - b + 2c$  线性相关。

**证明** 记

$$u_1 = a - b + c, \quad u_2 = -2a + 3b - 2c, \quad u_3 = 2a - b + 2c.$$

则

$$\begin{aligned} 4u_1 + u_2 &= 4(a - b + c) + (-2a + 3b - 2c) \\ &= 2a - b + 2c \\ &= u_3. \end{aligned}$$

因而

$$4u_1 + u_2 - u_3 = 0.$$

这给出了一个非平凡线性关系，所以  $u_1, u_2, u_3$  线性相关。

### 作业 1.4 (Ch1 T4)

证明：三维空间中四个或四个以上的向量一定线性相关。

**证明** 在三维空间中任取一组基  $e_1, e_2, e_3$ 。设有四个向量

$$a_i = x_i e_1 + y_i e_2 + z_i e_3 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

若存在不全为零的  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0,$$

则只需满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0, \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = 0. \end{cases}$$

这是一个三元齐次线性方程组对应的四个未知量的情形，必有非零解，因此  $a_1, a_2, a_3, a_4$  线性相关。

若向量个数多于四个，则任取其中四个已线性相关，故全部向量也线性相关。

### 作业 1.5 (Ch1 T5)

设  $e_1, e_2, e_3$  为一组基。

1. 证明：  $a = e_1 + 2e_2 - e_3, b = 2e_1 + e_2 + e_3, c = 3e_1 + 2e_3$  为一组基；
2. 设  $\tilde{c} = 3e_1 + xe_2 + 2e_3$ ，当  $x$  取何值时， $a, b, \tilde{c}$  共面。

**解** 以  $e_1, e_2, e_3$  为基， $a, b, c$  的坐标分别为

$$a = (1, 2, -1)^T, \quad b = (2, 1, 1)^T, \quad c = (3, 0, 2)^T.$$

于是

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

故  $a, b, c$  线性无关, 从而构成一组基。

对  $\tilde{c} = (3, x, 2)^T$ , 有

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 - 3x = 3(1 - x).$$

三个向量  $a, b, \tilde{c}$  共面当且仅当它们线性相关, 即上述行列式为 0, 故

$$x = 1.$$

#### 作业 1.6 (Ch1 T6)

已知三点  $A(2, 1, -1), B(3, 5, 1), C(1, -3, -3)$ , 问  $A, B, C$  是否共线?

解 计算

$$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, -4, -2).$$

由

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$$

可知  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  平行, 因此三点  $A, B, C$  共线。

#### 作业 1.7 (Ch1 T7)

已知线段  $AB$  被点  $C(1, 2, 3)$  和  $D(2, -1, 5)$  三等分, 求端点  $A, B$  的坐标。

解 若沿线段次序为  $A - C - D - B$ , 则

$$C = \frac{2A + B}{3}, \quad D = \frac{A + 2B}{3}.$$

解得

$$A = 2C - D = (0, 5, 1), \quad B = 2D - C = (3, -4, 7).$$

若沿线段次序为  $A - D - C - B$ , 则上式中  $A, B$  恰好交换。因此端点就是

$$A(0, 5, 1), \quad B(3, -4, 7)$$

或反过来。

#### 作业 1.8 (Ch1 T8)

设  $a = (1, -2, 4), b = (2, 2, 1)$ , 试计算  $a \cdot b, (a + b) \cdot (a - b), (a - b)^2$ 。

解 由定义直接计算:

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 2.$$

又

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 = (1 + 4 + 16) - (4 + 4 + 1) = 12.$$

以及

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 21 + 9 - 4 = 26.$$

所以所求为

$$a \cdot b = 2, \quad (a + b) \cdot (a - b) = 12, \quad (a - b)^2 = 26.$$

**作业 1.9 (Ch1 T9)**

设三个向量  $a, b, c$  两两间的夹角为  $45^\circ$ , 且  $|a| = 1, |b| = 2, |c| = 3$ . 求向量  $a + 2b - c$  的模。

**解** 先求其平方:

$$\begin{aligned}|a + 2b - c|^2 &= (a + 2b - c) \cdot (a + 2b - c) \\ &= |a|^2 + 4|b|^2 + |c|^2 + 4a \cdot b - 2a \cdot c - 4b \cdot c.\end{aligned}$$

由于三向量两两夹角均为  $45^\circ$ , 故

$$a \cdot b = |a||b| \cos 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$a \cdot c = |a||c| \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$b \cdot c = |b||c| \cos 45^\circ = 3\sqrt{2}.$$

代入得

$$|a + 2b - c|^2 = 1 + 16 + 9 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 26 - 11\sqrt{2}.$$

因而

$$|a + 2b - c| = \sqrt{26 - 11\sqrt{2}}.$$

**作业 1.10 (Ch1 T10)**

设  $a, b, c$  是满足  $a + b + c = 0$  的单位向量, 试求  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$  的值。

**解** 由  $a + b + c = 0$ , 两边取平方得

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a).$$

又因  $a, b, c$  都是单位向量, 故  $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ . 于是

$$0 = 3 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a).$$

所以

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}.$$

**作业 1.11 (Ch1 T11)**

设向量  $a, b$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $|a| = 1, |b| = 2$ , 试求  $(a \times b)^2, |(a + b) \times (a - b)|$ .

**解** 由叉积模长公式,

$$|a \times b| = |a||b| \sin 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

因而

$$(a \times b)^2 = |a \times b|^2 = 3.$$

又

$$\begin{aligned}(a + b) \times (a - b) &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= -a \times b - a \times b \\ &= -2a \times b.\end{aligned}$$

所以

$$|(a+b) \times (a-b)| = 2|a \times b| = 2\sqrt{3}.$$

#### 作业 1.12 (Ch1 T12)

设向量  $a = (1, -1, 2)$ ,  $b = (2, 3, -4)$ , 求  $a \times b$ ,  $(a+b) \times (a-b)$ 。

解 由行列式计算

$$a \times b = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = (-2, 8, 5).$$

又

$$(a+b) \times (a-b) = -2(a \times b),$$

故

$$(a+b) \times (a-b) = (4, -16, -10).$$

#### 作业 1.13 (Ch1 T13)

一个四面体的顶点为  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(-1, 0, 2)$ ,  $C(2, 4, 5)$ ,  $D(0, -3, 4)$ , 求它的体积。

解 取  $A$  为公共顶点, 则

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 2, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (-1, -5, 1).$$

四面体体积为

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|.$$

计算混合积:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) \\ &= (-2, -2, -1) \cdot (12, -3, -3) \\ &= -15. \end{aligned}$$

因而

$$V = \frac{1}{6} |-15| = \frac{5}{2}.$$

#### 作业 1.14 (Ch1 T14)

判断下列结论是否成立, 不成立时请举例说明。

1. 若  $a \cdot b = 0$ , 则  $a = 0$  或  $b = 0$ ;
2. 若  $a \times b = a \times c$ , 则必有  $b = c$ ;
3.  $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ ;
4.  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ ;
5.  $(a+b) \times (a+b) = a \times a + 2a \times b + b \times b$ ;
6.  $(a \times b) \cdot c = a \times (b \cdot c)$ 。

解

1. 不成立。例如  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$ , 则  $a \cdot b = 0$ , 但  $a, b$  都不是零向量。

2. 不成立。例如  $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), c = (1, 1, 0)$ , 则

$$a \times b = (0, 0, 1) = a \times c,$$

但  $b \neq c$ 。

3. 不成立。例如  $a = (1, 0, 0), b = (1, 0, 0), c = (0, 1, 0)$ , 则

$$(a \cdot b)c = c = (0, 1, 0), \quad a(b \cdot c) = 0,$$

二者不等。

4. 不成立。例如  $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0)$ , 则

$$(a \cdot b)^2 = 0,$$

但

$$a^2 \cdot b^2 = 1 \cdot 1 = 1.$$

5. 不成立。因为任一向量与自身叉积都等于 0, 所以

$$(a + b) \times (a + b) = 0.$$

但右边应为

$$a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = 0,$$

而不是  $a \times a + 2a \times b + b \times b$ 。例如  $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0)$  时, 右边等于  $(0, 0, 2) \neq 0$ 。

6. 不成立。因为  $b \cdot c$  是数量,  $a \times (b \cdot c)$  在向量运算中根本没有定义, 所以该式本身无意义。

#### 作业 1.15 (Ch1 T15)

证明下列等式:

1.  $(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2$ 。

2.  $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ 。

#### 证明

1. 设  $a, b$  夹角为  $\theta$ , 则

$$(a \times b)^2 = |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta.$$

又

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta,$$

故

$$a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta = (a \times b)^2.$$

2. 利用恒等式

$$(u \times v) \times w = v(u \cdot w) - u(v \cdot w),$$

有

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c),$$

$$(b \times c) \times a = c(b \cdot a) - b(c \cdot a),$$

$$(c \times a) \times b = a(c \cdot b) - c(a \cdot b).$$

三式相加得

$$\begin{aligned} & (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b \\ &= b(a \cdot c) - a(b \cdot c) + c(a \cdot b) - b(a \cdot c) + a(b \cdot c) - c(a \cdot b) = 0. \end{aligned}$$

### 作业 1.16 (Ch1 T16)

证明共轭复数的下列性质:

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

**证明** 设  $z = x + iy$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , 其中  $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ 。

首先,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

其次,

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

最后,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z}_1 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

故三条性质全部成立。

### 作业 1.17 (Ch1 T18)

设  $z = \cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ , 求  $\frac{1+z}{1-z}$ 。

**解** 由  $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} \\ &= \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} \\ &= i \cot \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1+z}{1-z} = i \cot \frac{\theta}{2}.$$

### 作业 1.18 (Ch1 T19)

求下列和式:

1.  $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ ;
2.  $\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$ 。

解 设

$$S = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta}.$$

当  $e^{i\theta} \neq 1$  时,

$$S = \frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

将分子分母同乘  $e^{-i(n+1)\theta/2}$  与  $e^{-i\theta/2}$  相应化简, 得

$$S = e^{in\theta/2} \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

取实部与虚部分别得到

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

当  $\theta = 2k\pi$  时, 直接有第一式等于  $n+1$ , 第二式等于 0。

#### 作业 1.19 (Ch1 T20)

证明:  $|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_2|^2)(1 + |z_1|^2)$ 。

证明 由模平方的定义,

$$\begin{aligned} |1 + z_1 \bar{z}_2|^2 &= (1 + z_1 \bar{z}_2)(1 + \bar{z}_1 z_2) \\ &= 1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_1|^2 |z_2|^2, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2. \end{aligned}$$

两式相加得

$$\begin{aligned} |1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &= (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

故原式成立。

## 第二章 线性方程组

### 作业 2.1 (Ch2 T1)

解下列线性方程组：

1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

解

1.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_4-r_1]{\begin{matrix} r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2+r_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_2-r_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right].$$

出现矛盾方程  $0=1$ , 故方程组无解。

2.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

令  $x_4 = t$ , 则

$$x_1 = -8, \quad x_2 = t + 3, \quad x_3 = 2t + 6.$$

通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, t + 3, 2t + 6, t).$$

3.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

令  $x_2 = s, x_4 = t$ , 则

$$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{10}t, \quad x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t.$$

故通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{3}{5} - \frac{3}{2}s - \frac{1}{10}t, s, \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t, t \right).$$

4.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

令  $x_4 = t$ , 则

$$x_1 = \frac{4}{9} + \frac{5}{18}t, \quad x_2 = \frac{7}{9} - \frac{25}{18}t, \quad x_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t.$$

通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{4}{9} + \frac{5}{18}t, \frac{7}{9} - \frac{25}{18}t, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t, t \right).$$

5.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 7 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 56 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

最后一行给出矛盾方程  $0 = 1$ , 故原方程组无解。

6.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 15 & -7 & 9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

令  $x_4 = -3t$ , 则

$$x_1 = t, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = t.$$

因而通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, 2, 1, -3).$$

7.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right].$$

令  $x_5 = 6t$ , 则

$$x_1 = 7t, \quad x_2 = 5t, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2t.$$

故通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(7, 5, 0, 2, 6).$$

## 作业 2.2 (Ch2 T2)

当  $a$  为何值时, 下列线性方程组有解? 有解时求出它的通解。

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

解

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+2r_1} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a-6)x_1 - 6x_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-\frac{2}{3}r_2} \begin{cases} -\frac{5}{3}x_1 + x_3 = \frac{4}{3} \\ 7x_1 + 3x_2 = 1 \\ (a+8)x_1 = 4 \end{cases}$$

故当且仅当  $a \neq -8$  时方程组有解, 且此时有唯一解

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3a+24}, \frac{4a+52}{3a+24} \right).$$

当  $a = -8$  时, 最后一行变为  $0 = 4$ , 故无解。

2.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+r_1} \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_2 + x_3 = a+3 \end{cases} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = a+1 \end{cases}$$

因而当且仅当  $a = -1$  时方程组有解。此时令  $x_2 = t$ , 则

$$x_3 = 2 - 7t, \quad x_1 = 18t - 5,$$

所以通解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (18t - 5, t, 2 - 7t).$$

### 作业 2.3 (Ch2 T3)

$a$  为何值时, 下述线性方程组有唯一解?  $a$  为何值时, 此方程组无解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - (a+1)x_3 = 6 \\ -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - (a+1)x_3 = 6 \\ -(3a+2)x_3 = 18 \end{cases}$$

当  $3a+2 \neq 0$ , 即  $a \neq -\frac{2}{3}$  时, 第三行可唯一确定  $x_3$ , 继而唯一确定  $x_2, x_1$ , 故方程组有唯一解。

当  $a = -\frac{2}{3}$  时, 第三行变为  $0 = 18$ , 故方程组无解。

### 作业 2.4 (Ch2 T4)

求三次多项式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 使  $y = f(x)$  的图象经过以下 4 个点:  $A(1, 2), B(-1, 3), C(3, 0), D(0, 2)$ 。

解 由题意可得

$$\begin{cases} a + b + c + d = 2, \\ -a + b - c + d = 3, \\ 27a + 9b + 3c + d = 0, \\ d = 2. \end{cases}$$

解得

$$a = -\frac{5}{24}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{7}{24}, \quad d = 2.$$

因此

$$f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x + 2.$$

#### 作业 2.5 (Ch2 T5)

求三次多项式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  满足:

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = -1.$$

解 设

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

则

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

由条件得

$$d = 1, \quad a + b + c + d = 2, \quad c = 1, \quad 3a + 2b + c = -1.$$

即

$$d = 1, \quad c = 1, \quad a + b = 0, \quad 3a + 2b = -2.$$

解得

$$a = -2, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 1.$$

因而

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

#### 作业 2.6 (Ch2 T6)

给定平面直角坐标系中的 5 个点:  $A = (-2, -2), B = (1, -1), C = (2, 0), D = (0, 2), E = (-1, 1)$ 。求一条二次代数曲线  $G(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  通过以上各点。

解 将五点坐标代入

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

得到关于  $a, b, c, d, e, f$  的方程组

$$\begin{cases} 4a + 8b + 4c - 2d - 2e + f = 0, \\ a - 2b + c + d - e + f = 0, \\ 4a + 2d + f = 0, \\ 4c + 2e + f = 0, \\ a - 2b + c - d + e + f = 0. \end{cases}$$

第二式与第五式相减得  $d = e$ ; 第三式与第四式相减, 再结合  $d = e$  得  $a = c$ 。

于是第二、三、第一式分别化为

$$2a - 2b + f = 0, \quad 4a + 2d + f = 0, \quad 8a + 8b - 4d + f = 0.$$

消去  $d, f$  可得

$$5a + 7b = 0.$$

取  $a = 7$ , 则  $b = -5$ , 再由前述关系得

$$c = 7, \quad d = e = -2, \quad f = -24.$$

故所求二次曲线可取为

$$7x^2 - 10xy + 7y^2 - 2x - 2y - 24 = 0.$$

### 作业 2.7 (Ch2 T7)

给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

将常数项改为零得到另一个方程组, 求解这两个方程组, 并研究这两个方程组解之间的关系。对其它方程组做类似的讨论。

**解** 原方程组的增广矩阵化为

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 18 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

令  $x_3 = s, x_4 = t$ , 则

$$x_1 = 8 + 11s - 18t, \quad x_2 = -3 - 4s + 7t.$$

因而原方程组的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (8, -3, 0, 0) + s(11, -4, 1, 0) + t(-18, 7, 0, 1).$$

将常数项改为零后, 系数矩阵行化简为

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

所以对应齐次方程组的通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(11, -4, 1, 0) + t(-18, 7, 0, 1).$$

可见非齐次方程组的通解恰为“一个特解 + 对应齐次方程组的通解”。一般地, 若  $Ax = b$  有一个特解  $x_0$ , 则其全部解可写成

$$x = x_0 + \xi, \quad A\xi = 0.$$

### 作业 2.8 (Ch2 T8)

兽医建议某宠物的食谱每天要包含 100 单位的蛋白质, 200 单位的糖, 50 单位的脂肪。某宠物商店出售四种食品  $A, B, C, D$ 。这四种食物每千克含蛋白质、糖、脂肪的含量(单位)如下:

| 食物 | 蛋白质 | 糖  | 脂肪 |
|----|-----|----|----|
| A  | 5   | 20 | 2  |
| B  | 4   | 25 | 2  |
| C  | 7   | 10 | 10 |
| D  | 10  | 5  | 6  |

问是否可以适量配备上述四种食品，满足兽医的建议？

**解** 设每天分别配备  $x_1, x_2, x_3, x_4$  千克食物  $A, B, C, D$ ，则有线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 100, \\ 20x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 200, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 50. \end{cases}$$

将其化为行最简形：

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 7 & 10 & 100 \\ 20 & 25 & 10 & 5 & 200 \\ 2 & 2 & 10 & 6 & 50 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{1105}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{array} \right].$$

令  $x_4 = t$ ，则

$$x_1 = \frac{1105}{36} - \frac{34}{9}t, \quad x_2 = 3t - \frac{35}{2}, \quad x_3 = \frac{85}{36} - \frac{4}{9}t.$$

若要求“适量配备”，则应有  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ 。由  $x_2 \geq 0$  得

$$t \geq \frac{35}{6},$$

由  $x_3 \geq 0$  得

$$t \leq \frac{85}{16}.$$

但

$$\frac{35}{6} > \frac{85}{16},$$

二者矛盾，因此不存在四种食品的非负配比方案满足要求。

### 作业 2.9 (Ch2 T9)

给定平面直角坐标系中的 9 个点，是否一定存在三次代数曲线  $C(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$  经过这九个点？如果存在，是否唯一？

**解** 设这九个点为  $(x_k, y_k)$ ， $k = 1, 2, \dots, 9$ 。记

$$u = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)^T.$$

每个点在曲线上给出一个齐次线性方程

$$ax_k^3 + bx_k^2y_k + cx_ky_k^2 + dy_k^3 + ex_k^2 + fx_ky_k + gy_k^2 + hx_k + iy_k + j = 0.$$

因而九个点对应一个 9 个齐次方程、10 个未知量的线性方程组

$$Au = 0.$$

由于未知量个数大于方程个数，齐次方程组必有非零解，即存在不全为零的一组系数  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ ，从而一定存在至少一条三次代数曲线经过这九个点。

---

至于唯一性，则不一定。因为若  $u$  是一个非零解，则任意非零常数倍  $\lambda u$  也对应同一条曲线；若把这种比例系数视为同一条曲线，则当且仅当  $\text{rank } A = 9$  时，解空间维数为 1，曲线在这个意义下唯一。若  $\text{rank } A < 9$ ，则会有不止一条不同的三次曲线经过这九个点。

因此结论是：一定存在，但一般不一定唯一。

## 第三章 行列式

### 作业 3.1 (Ch3 T1)

计算下列行列式：

1.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$$

4.

$$\det \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5.

$$\det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix}$$

6.

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$



解

1. 作行变换

$$r_2 \leftarrow r_2 + r_1, \quad r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1, \quad r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{3}r_2, \quad r_4 \leftarrow r_4 + r_2, \quad r_4 \leftarrow r_4 + \frac{6}{5}r_3,$$

得

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = -40.$$

## 2. 作行变换

$$r_2 \leftarrow r_2 - r_1, \quad r_3 \leftarrow r_3 + 3r_1, \quad r_3 \leftarrow r_3 + \frac{15}{4}r_2, \quad r_4 \leftarrow r_4 + \frac{1}{4}r_2, \quad r_4 \leftarrow r_4 - \frac{3}{13}r_3,$$

得

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{13} \end{bmatrix} = -20.$$

## 3. 将第二、三行分别减去第一行，得

$$\det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y-x & y-x & y-x \\ z-x & z-x & z-x \end{bmatrix} = 0.$$

## 4. 在完全展开式中，只有排列

$$\sigma = (n, n-1, \dots, 1)$$

对应的项可能非零，因此

$$\det \begin{bmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{j=1}^n a_{j,n+1-j}.$$

反序排列的逆序数为

$$\tau(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2},$$

故所求为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^n a_{j,n+1-j}.$$

## 5. 作列变换

$$c_2 \leftarrow c_2 - c_1, \quad c_3 \leftarrow c_3 - c_1,$$

得

$$\det \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{bmatrix}.$$

再作变换

$$c_3 \leftarrow c_3 - 2c_2,$$

得

$$\det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

继续作  $c_2 \leftarrow c_2 - c_3$ , 并从第二列提取公因子 2, 得

$$4 \det \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{bmatrix} = -4 \det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = -4(a-b)(b-c)(c-a).$$

6. 沿第 5 列、第 4 列、第 3 列依次展开, 得

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix} = e_5 d_4 c_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 d_4 e_5.$$

### 作业 3.2 (Ch3 T2)

将行列式

$$\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

展开为关于  $x$  的多项式。



解 设

$$D_n = \det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x-2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

按第一行展开可得递推关系

$$D_n = (x-2)D_{n-1} - D_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

其中

$$D_1 = x-2, \quad D_2 = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3.$$

于是

$$D_3 = (x-2)D_2 - D_1 = x^3 - 6x^2 + 10x - 4,$$

$$D_4 = (x-2)D_3 - D_2 = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5.$$

因而所求多项式为

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5.$$

### 作业 3.3 (Ch3 T3)

$A$  为  $n$  阶方阵,  $\lambda$  为常数。证明:  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ 。

**证明** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 其中  $\alpha_j$  表示  $A$  的第  $j$  列, 则

$$\lambda A = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n).$$

行列式对每一列都是线性的, 因此

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n).$$

依次从每一列提出因子  $\lambda$ , 得

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lambda^n \det(A).$$

### 作业 3.4 (Ch3 T4)

方阵  $A$  称为反对称方阵, 如果它的转置方阵等于  $-A$ 。证明: 奇数阶反对称方阵的行列式为零。

**证明** 设  $A$  是  $n$  阶反对称方阵, 则  $A^T = -A$ 。于是

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

当  $n$  为奇数时,  $(-1)^n = -1$ , 故

$$\det A = -\det A.$$

从而  $2 \det A = 0$ , 即

$$\det A = 0.$$

### 作业 3.5 (Ch3 T5)

证明:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

**证明** 左边按二阶行列式展开:

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

命题得证。

### 作业 3.6 (Ch3 T6)

证明:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - 1 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} - 1 \end{bmatrix}$$

证明 记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A & I_2 \\ I_2 & B \end{bmatrix}.$$

则左边就是  $\det M$ 。注意到

$$\det \begin{bmatrix} I_2 & -A \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = 1,$$

因而

$$\begin{aligned} \det M &= \det \left( \begin{bmatrix} I_2 & -A \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} M \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} 0 & I_2 - AB \\ I_2 & B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将上下两个  $2 \times 2$  块行对换, 相当于做 4 次行对换, 因此行列式符号不变, 故

$$\det M = \det \begin{bmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_2 - AB \end{bmatrix} = \det(I_2 - AB).$$

由于这里是二阶方阵,

$$\det(I_2 - AB) = \det(AB - I_2).$$

而

$$AB - I_2 = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - 1 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} - 1 \end{bmatrix}.$$

于是原式成立。

### 作业 3.7 (Ch3 T7)

设  $a, b, c, d$  为 4 维数组向量。证明:  $\det(2a - b, -a + 2b - c, -b + 2c - d, -c + 2d) = 5 \det(a, b, c, d)$ 。

证明 记

$$C_1 = 2a - b, \quad C_2 = -a + 2b - c, \quad C_3 = -b + 2c - d, \quad C_4 = -c + 2d.$$

则

$$(C_1, C_2, C_3, C_4) = (a, b, c, d) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

因而

$$\det(C_1, C_2, C_3, C_4) = \det(a, b, c, d) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

对后一个四阶行列式按第一行展开, 得

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 = 5. \end{aligned}$$

所以

$$\det(2a - b, -a + 2b - c, -b + 2c - d, -c + 2d) = 5 \det(a, b, c, d).$$

### 作业 3.8 (Ch3 T8)

在平面直角系中,  $A = (0, 0), B = (3, -1), C = (2, 1), D = (1, 1)$ 。求四边形  $ABCD$  的面积。

**解** 用对角线  $AC$  把四边形分成两个三角形, 则

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}.$$

由二维行列式面积公式,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} |5| = \frac{5}{2}, \\ S_{\triangle ACD} &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因而

$$S_{ABCD} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

### 作业 3.9 (Ch3 T9)

在三维空间直角坐标系中, 已知点  $A, B, C, D$  的坐标分别是  $(1, 1, 0), (3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 2, 4)$ 。求四面体  $ABCD$  的体积及各个面的面积。

**解** 先取  $A$  为公共顶点, 则

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (1, 1, 4).$$

四面体体积为

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}.$$

再计算各面的面积:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, -8, 0),$$

故

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2, -6, 2),$$

故

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11}.$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (-3, 7, -1),$$

故

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{59}}{2}.$$

对面  $BCD$ , 取

$$\overrightarrow{BC} = (-3, 0, 1), \quad \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 2),$$

则

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-1, 5, -3),$$

从而

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

因此四面体  $ABCD$  的体积与四个面的面积分别为

$$V = \frac{4}{3},$$

$$S_{ABC} = 4, \quad S_{ABD} = \sqrt{11}, \quad S_{ACD} = \frac{\sqrt{59}}{2}, \quad S_{BCD} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

### 作业 3.10 (Ch3 T10)

设二阶方阵  $A = (a_{ij})$  的行列式非零.  $\mathcal{A}: x' = a_{11}x + a_{12}y, y' = a_{21}x + a_{22}y$  是坐标平面  $\mathbb{R}^2$  到坐标平面  $\mathbb{R}^2$  的变换. 证明:  $\mathcal{A}$  将单位正方形映射为平行四边形, 且平行四边形的面积为  $|\det(A)|$ .

**证明** 单位正方形的四个顶点为

$$O = (0, 0), \quad E_1 = (1, 0), \quad E_2 = (0, 1), \quad E_1 + E_2 = (1, 1).$$

在线性变换  $\mathcal{A}$  下,

$$\mathcal{A}(O) = O,$$

$$\mathcal{A}(E_1) = (a_{11}, a_{21})^T, \quad \mathcal{A}(E_2) = (a_{12}, a_{22})^T,$$

$$\mathcal{A}(E_1 + E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_2).$$

因此单位正方形被映成以

$$\alpha = (a_{11}, a_{21})^T, \quad \beta = (a_{12}, a_{22})^T$$

为邻边的平行四边形。又因  $\det A \neq 0$ , 故  $\alpha, \beta$  不共线, 这个平行四边形不退化。

平行四边形的面积等于两条邻边张成的有向面积的绝对值, 即

$$S = \left| \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = |\det A|.$$

结论得证。

### 作业 3.11 (Ch3 T11)

求以下排列的逆序数, 并指出其奇偶性。

1. (6, 8, 1, 4, 7, 5, 3, 2, 9)
2. (6, 4, 2, 1, 9, 7, 3, 5, 8)
3. (7, 5, 2, 3, 9, 8, 1, 6, 4)

解

1. (6, 8, 1, 4, 7, 5, 3, 2, 9) 的逆序数为

$$5 + 6 + 0 + 2 + 3 + 2 + 1 + 0 + 0 = 19,$$

故它是奇排列。

2. (6, 4, 2, 1, 9, 7, 3, 5, 8) 的逆序数为

$$5 + 3 + 1 + 0 + 4 + 2 + 0 + 0 + 0 = 15,$$

故它是奇排列。

3. (7, 5, 2, 3, 9, 8, 1, 6, 4) 的逆序数为

$$6 + 4 + 1 + 1 + 4 + 3 + 0 + 1 + 0 = 20,$$

故它是偶排列。

### 作业 3.12 (Ch3 T12)

证明: 任意一个排列经过一次对换后, 必改变其奇偶性。

**证明** 先证相邻对换的情形。若把排列中相邻的两个数  $u, v$  交换, 则除这两个数构成的一对以外, 其余任意一对元素的相对次序都不变, 因此逆序数恰好增减 1, 奇偶性必改变。

一般地, 设要交换第  $i$  位与第  $j$  位 ( $i < j$ ), 则这个对换可以分解为

$$(i, i+1)(i+1, i+2) \cdots (j-1, j)(j-2, j-1) \cdots (i, i+1),$$

共

$$(j-i) + (j-i-1) = 2(j-i) - 1$$

次相邻对换, 是奇数次。由于每一次相邻对换都改变奇偶性, 故一次任意对换后, 排列的奇偶性也必改变。

### 作业 3.13 (Ch3 T13)

证明: 对  $n \geq 2$ , 所有  $n$  元排列中, 奇排列与偶排列个数均为  $n!/2$ 。

**证明** 设  $S_n$  是所有  $n$  元排列的集合。定义映射

$$\varphi: S_n \rightarrow S_n, \quad \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3, \dots, \sigma_n).$$

这是把前两项作一次对换。显然  $\varphi$  是双射, 且  $\varphi^{-1} = \varphi$ 。

由上题可知, 一次对换必改变排列的奇偶性, 因此  $\varphi$  把偶排列一一对应到奇排列, 也把奇排列一一对应到

偶排列。故奇排列与偶排列个数相等。

又全部  $n$  元排列共有  $n!$  个，所以奇排列与偶排列各有

$$\frac{n!}{2}$$

个。

### 作业 3.14 (Ch3 T14)

证明： $\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  作为行列式的定义与行列式递归定义等价。

**证明** 记完全展开式定义给出的值为

$$D(A) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

当  $n = 1$  时，显然  $D([a_{11}]) = a_{11}$ ，与递归定义一致。

现设  $n \geq 2$ 。按第一行所取的列把和式分组：

$$D(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(j_2, \dots, j_n) \\ \{j_2, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}}} (-1)^{\tau(k, j_2, \dots, j_n)} a_{1k} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

对固定的  $k$ ，因为  $k$  放在第一位时，与它后面比它小的数恰好构成  $k-1$  个逆序，所以

$$(-1)^{\tau(k, j_2, \dots, j_n)} = (-1)^{k-1} (-1)^{\tau(\tilde{j}_2, \dots, \tilde{j}_n)},$$

其中  $(\tilde{j}_2, \dots, \tilde{j}_n)$  是删去  $k$  后重新编号得到的  $(n-1)$  元排列。于是

$$D(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_{1k} D(M_{1k}),$$

其中  $M_{1k}$  表示删去第 1 行第  $k$  列所得的  $(n-1)$  阶矩阵。注意到  $(-1)^{k-1} = (-1)^{1+k}$ ，故

$$D(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} D(M_{1k}),$$

这正是按第一行展开的递归定义。

因而完全展开式定义满足递归定义如初值与递推关系，所以二者等价。

### 作业 3.15 (Ch3 T15)

写出四阶行列式的完全展开式。

**解** 设  $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ ，则

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}. \end{aligned}$$

### 作业 3.16 (Ch3 T16)

用 Cramer 法则求解下列线性方程组：

1.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$



解

1. 系数行列式为

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 12 \neq 0.$$

再计算

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 36,$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} = 4, \quad D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = 4.$$

故由 Cramer 法则,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{3}.$$

2. 系数行列式为

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} = 27 \neq 0.$$

再计算

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} = 81,$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -27, \quad D_4 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix} = 27.$$

因而

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -4, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

### 作业 3.17 (Ch3 T17)

设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  及  $y_0, y_1, \dots, y_n$  是任给实数, 其中  $x_i (0 \leq i \leq n)$  两两互不相等. 证明: 存在唯一的次数不超过  $n$  的多项式  $p(x)$  满足  $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ .

**证明** 令

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

由于  $x_0, x_1, \dots, x_n$  两两不同, 所以分母都不为零,  $\ell_i(x)$  有意义, 且次数不超过  $n$ . 并且

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

于是令

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x),$$

则  $p(x)$  的次数不超过  $n$ , 且对每个  $k = 0, 1, \dots, n$ ,

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x_k) = y_k.$$

这证明了解的存在性。

再证唯一性。若  $p(x), q(x)$  都是次数不超过  $n$  且满足  $p(x_i) = q(x_i) = y_i$  的多项式, 则

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

的次数不超过  $n$ , 且

$$r(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

因而  $r(x)$  有  $n+1$  个互不相同的根。次数不超过  $n$  的非零多项式不可能有  $n+1$  个不同的根, 所以  $r(x) \equiv 0$ , 即  $p(x) = q(x)$ 。

故所求多项式存在且唯一。

### 作业 3.18 (Ch3 T18)

证明:  $n$  个变元、 $n$  个方程的齐次线性方程组有非零解当且仅当系数矩阵的行列式为零。

**证明** 设齐次线性方程组为

$$AX = 0,$$

其中  $A$  是  $n$  阶系数矩阵。

先证必要性。若方程组有非零解, 而  $\det A \neq 0$ , 则由 Cramer 法则方程组有唯一解。由于右端为零, 唯一解

只能是零解，这与存在非零解矛盾。故必有

$$\det A = 0.$$

再证充分性。若  $\det A = 0$ ，则对  $A$  作初等行变换后得到的阶梯形矩阵  $U$  也满足

$$\det U = 0.$$

因而  $U$  至少有一行全为零，于是对应的齐次方程组至少有一个自由变量。取某个自由变量为非零值，其余自由变量任意，再由回代可求得一个非零解。

因此，齐次线性方程组有非零解当且仅当系数矩阵的行列式为零。

### 作业 3.19 (Ch3 T19)

计算下列  $n$  阶行列式：

1.

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_n & b_n & \\ & & c_n & d_n & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_1 & & & & d_1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\det \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}$$

3.

$$\det \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

4.

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{bmatrix}$$

解

1. 设所求行列式为  $\Delta_n$ 。按最后一行再按最后一行展开，可得递推关系

$$\Delta_n = (a_1 d_1 - b_1 c_1) \Delta_{n-1}.$$

继续递推下去，得到

$$\Delta_n = \prod_{j=1}^n (a_j d_j - b_j c_j).$$

2. 设所求行列式为  $\Delta$ 。在原矩阵上加边, 得

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}.$$

再作列变换  $c_j \leftarrow c_j - c_1 (j = 2, 3, \dots, n+1)$ , 得

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

当  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$  时, 对第一列作变换

$$c_1 \leftarrow c_1 + \frac{1}{a_1} c_2 + \frac{1}{a_2} c_3 + \cdots + \frac{1}{a_n} c_{n+1},$$

从而

$$\Delta = \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_j.$$

右端是关于  $a_1, \dots, a_n$  的多项式, 因此上式对任意  $a_1, \dots, a_n$  都成立。

3. 设所求行列式为  $\Delta_n$ , 约定  $\Delta_0 = 1$ 。按第一行展开得

$$\Delta_n = 2 \cos \theta \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad \Delta_1 = 2 \cos \theta.$$

这是二阶常系数递推, 对应特征方程为

$$t^2 - 2 \cos \theta t + 1 = 0,$$

其根为  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ 。解得

$$\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

(当  $\sin \theta = 0$  时按极限理解, 结果为  $(-1)^{kn}(n+1)$ , 其中  $\theta = k\pi$ )。

4. 设所求行列式为  $\Delta$ 。当  $a_2 a_3 \cdots a_n \neq 0$  时, 对第一行作变换

$$r_1 \leftarrow r_1 - \sum_{k=2}^n \frac{b_k}{a_k} r_k,$$

得

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{bmatrix} = \left( a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) \prod_{j=2}^n a_j.$$

即

$$\Delta = \prod_{j=1}^n a_j - \sum_{i=2}^n b_i c_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n a_j.$$

右端同样是关于  $a_i, b_i, c_i$  的多项式, 因此该公式对任意参数都成立。

## 第四章 矩阵

### 定理 4.1

矩阵的加法和数乘运算具有下列性质：

1. 加法交换律  $A + B = B + A$
2. 加法结合律  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 有零矩阵  $A + O = O + A = A$
4. 有负矩阵  $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. 对数的加法的分配律  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. 对矩阵加法的分配律  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. 数乘结合律  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. 数乘单位元  $1A = A$

其中  $A, B, C$  是使运算有意义的矩阵,  $\lambda, \mu$  是数。

### 定理 4.2

矩阵的乘法运算具有以下性质：

1. 乘法结合律  $(AB)C = A(BC)$
2. 乘法单位元  $IA = AI = A$
3. 左分配律  $(A + B)C = AC + BC$
4. 右分配律  $A(B + C) = AB + AC$
5. 数乘结合律  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

其中  $A, B, C$  是使运算有意义的矩阵,  $\lambda$  是数。

### 作业 4.1 (Ch4 T1)

完成定理 4.1、定理 4.2 的证明。

**证明** 设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$  是同型矩阵,  $\lambda, \mu$  是数。由矩阵加法与数乘的定义,

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

因而定理 4.1 中的各条性质都可逐项化为数的对应性质。例如

$$((A + B) + C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (A + (B + C))_{ij},$$

$$(\lambda(A + B))_{ij} = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = (\lambda A + \lambda B)_{ij}.$$

其余各条同理成立。

对定理 4.2, 设矩阵乘法都有意义。由定义

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

于是

$$\begin{aligned} (((AB)C)_{ij} &= \sum_{\ell} (AB)_{i\ell} c_{\ell j} = \sum_{\ell} \sum_k a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} \\ &= \sum_k a_{ik} \sum_{\ell} b_{k\ell} c_{\ell j} = \sum_k a_{ik} (BC)_{kj} = (A(BC))_{ij}, \end{aligned}$$

故乘法满足结合律。

单位元性质由  $I$  的定义直接得到：

$$(IA)_{ij} = \sum_k \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}, \quad (AI)_{ij} = \sum_k a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}.$$

分配律与数乘结合律同样由求和的线性性质直接推出，例如

$$((A+B)C)_{ij} = \sum_k (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_k a_{ik} c_{kj} + \sum_k b_{ik} c_{kj} = (AC + BC)_{ij}.$$

其余各条完全类似，故两定理全部成立。

#### 作业 4.2 (Ch4 T2)

证明：每个方阵都可以表示为一个对称阵与一个反对称阵之和的形式。

**证明** 设  $A$  是任意  $n$  阶方阵，令

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad K = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

则

$$S^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = S,$$

所以  $S$  是对称阵；并且

$$K^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -K,$$

所以  $K$  是反对称阵。又有

$$S + K = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A.$$

因此每个方阵都可以写成一个对称阵与一个反对称阵之和。

#### 作业 4.3 (Ch4 T3)

设  $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ , 计算  $AB, BC, ABC, B^2, AC, CA$ 。

**解** 直接相乘可得

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 11 \\ -5 & 13 \end{bmatrix},$$

$$ABC = (AB)C = \begin{bmatrix} -18 & -11 & 16 \\ 30 & 11 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -61 \\ 12 & 93 \end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 8 \\ 8 & -4 & -11 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -15 & -4 \end{bmatrix},$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 13 & 7 & 12 \\ 1 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.4 (Ch4 T4)

计算

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{bmatrix}.$$



解 记

$$p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n,$$

$$q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n,$$

$$r(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_nt^n.$$

则矩阵乘法的第  $i$  行恰好是把  $t$  分别取为  $x, y, z$  时的三个值, 因此所求乘积为

$$\begin{bmatrix} p(x) & q(x) & r(x) \\ p(y) & q(y) & r(y) \\ p(z) & q(z) & r(z) \end{bmatrix}.$$

也就是

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n & b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n & c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \\ a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n & b_0 + b_1y + \cdots + b_ny^n & c_0 + c_1y + \cdots + c_ny^n \\ a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n & b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n & c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.5 (Ch4 T5)

计算

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$



解 直接按矩阵乘法计算。先算左边两个矩阵的乘积, 其结果是一个  $1 \times n$  行向量:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i a_{i1} & \sum_{i=1}^m x_i a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i a_{in} \end{bmatrix}.$$

再乘右边列向量, 得

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \right) y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j.$$

#### 作业 4.6 (Ch4 T6)

举例求满足条件的 2 阶实方阵  $A$ 。

1.  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2.  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3.  $A^3 = I$  且  $A \neq I$ 。

解

1. 不存在这样的实矩阵。设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

则

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而

$$a^2 + bc = 0, \quad d^2 + bc = 0, \quad (a+d)b = 1, \quad (a+d)c = 1.$$

由后两式知  $a+d \neq 0$  且  $b=c$ 。再由前两式得  $a^2 + d^2 = -2bc = -2b^2$ , 左边非负而右边非正, 只能同为 0, 于是  $a=d=b=0$ , 与  $(a+d)b=1$  矛盾。故不存在。

2. 可取

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

直接计算得

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. 可取平面上转角为  $\frac{2\pi}{3}$  的旋转矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

于是  $A^3 = I$  且  $A \neq I$ 。

#### 作业 4.7 (Ch4 T7)

计算下列方阵的  $k$  次方幂,  $k$  为正整数。

1.  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
2.  $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$



解

1. 设

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

用归纳法可得

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}.$$

2. 若  $a = b = 0$ , 则  $B = 0$ , 故  $B^k = 0$ 。若  $a, b$  不全为零, 令

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r},$$

则

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

因而

$$B^k = r^k \begin{bmatrix} \cos k\varphi & \sin k\varphi \\ -\sin k\varphi & \cos k\varphi \end{bmatrix}.$$

3. 记

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N,$$

其中

$$N = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

故由二项式展开

$$M^k = (I + N)^k = I + kN + \binom{k}{2}N^2.$$

从而

$$M^k = \begin{bmatrix} 1 & ka & k & ak(k-1) \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 记

$$C = \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & a \end{bmatrix}_{n \times n} = aI + N,$$

其中  $N$  是超对角线上全为 1、其余元素全为 0 的 Jordan 幂零块。由于  $N^n = 0$ ，故

$$C^k = (aI + N)^k = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} a^{k-i} N^i.$$

因而

$$C^k = \begin{bmatrix} \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}a^{k-n+1} \\ & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2}a^{k-n+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{k}{0}a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} \\ & & & & \binom{k}{0}a^k \end{bmatrix}.$$

5. 记

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

因而

$$U^k = (I + N)^k = I + kN + \binom{k}{2}N^2 = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 设

$$D = \alpha\beta, \quad \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top, \quad \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

则

$$D^k = \alpha\beta\alpha\beta\cdots\alpha\beta = \alpha(\beta\alpha)^{k-1}\beta.$$

又

$$\beta\alpha = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

故

$$D^k = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^{k-1} D.$$

#### 作业 4.8 (Ch4 T8)

对下面的多项式  $f(x)$  和方阵  $A$ , 求  $f(A)$ :

1.  $f(x) = x^2 + x + 2, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ;
2.  $f(x) = x^2 - 4x + 4, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。



解

1. 先算

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

因而

$$f(A) = A^2 + A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. 对

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

有

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故

$$f(A) = A^2 - 4A + 4I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.9 (Ch4 T9)

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵且  $A^2 = O$ , 证明:  $A = O$ .



**证明** 对任意列向量  $x \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$(Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top Ax.$$

由于  $A$  是实对称方阵,  $A^T = A$ , 又  $A^2 = O$ , 故

$$(Ax)^T(Ax) = x^T A^2 x = 0.$$

于是  $|Ax|^2 = 0$ , 从而  $Ax = 0$  对任意  $x$  都成立, 因此  $A = O$ .

#### 作业 4.10 (Ch4 T10)

设  $A, B$  都是  $n$  阶对称方阵, 且  $AB = BA$ . 证明  $AB$  也是对称方阵。

**证明** 由  $A, B$  对称, 知  $A^T = A, B^T = B$ . 于是

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

又由题设  $AB = BA$ , 故

$$(AB)^T = AB.$$

所以  $AB$  也是对称方阵。

#### 作业 4.11 (Ch4 T11)

证明: 两个  $n$  阶上 (下) 三角方阵的乘积仍是上 (下) 三角。

**证明** 只证上三角情形, 下三角完全类似。

设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是  $n$  阶上三角方阵, 记  $C = AB = (c_{ij})$ . 则

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

当  $i > j$  时, 对任意  $k$ , 若  $k < i$ , 则  $a_{ik} = 0$ ; 若  $k \geq i > j$ , 则  $k > j$ , 故  $b_{kj} = 0$ . 因此求和中的每一项都为 0, 从而

$$c_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

所以  $C$  仍为上三角方阵。

#### 作业 4.12 (Ch4 T12)

证明: 与任意  $n$  阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵。

**证明** 设  $A = (a_{ij})$  满足对任意  $n$  阶方阵  $X$  都有  $AX = XA$ . 取矩阵单位  $E_{pq}$ , 则

$$AE_{pq} = E_{pq}A.$$

比较两边的第  $(i, j)$  元。左边只有第  $q$  列可能非零, 且其第  $q$  列等于  $A$  的第  $p$  列; 右边只有第  $p$  行可能非零, 且其第  $p$  行等于  $A$  的第  $q$  行。于是当  $i \neq p$  时, 右边第  $(i, q)$  元为 0, 故

$$a_{ip} = 0 \quad (i \neq p).$$

这说明  $A$  的非对角元全为 0, 所以  $A$  是对角矩阵。

再取交换第  $i, j$  个坐标的矩阵  $S_{ij}$ , 由  $AS_{ij} = S_{ij}A$  可知对角元必须满足  $\lambda_i = \lambda_j$ . 因此所有对角元相等, 故

$$A = \lambda I_n.$$

即  $A$  是数量阵。

#### 定理 4.3

对任意同阶可逆方阵  $A, B$ , 都有

$$1. (A^{-1})^{-1} = A;$$

$$2. (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \lambda \neq 0;$$

$$3. (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

#### 作业 4.13 (Ch4 T13)

完成定理 4.3 的证明。

**证明** 设  $A, B$  都是同阶可逆方阵,  $\lambda \neq 0$ 。

1. 由  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  可知  $A$  是  $A^{-1}$  的逆矩阵, 因此

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. 注意到

$$(\lambda A)(\lambda^{-1} A^{-1}) = AA^{-1} = I,$$

且

$$(\lambda^{-1} A^{-1})(\lambda A) = A^{-1}A = I.$$

所以

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

3. 计算

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I.$$

因而

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

#### 作业 4.14 (Ch4 T14)

设  $A_1, A_2, \dots, A_k$  都是  $n$  阶可逆方阵。证明:  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$ 。

**证明** 用数学归纳法。

当  $k = 2$  时, 结论就是

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1},$$

已由上题证明。

假设结论对  $k = m$  成立, 即

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

则对  $k = m + 1$ , 有

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 \cdots A_m A_{m+1})^{-1} &= (A_1 A_2 \cdots A_m \cdot A_{m+1})^{-1} \\ &= A_{m+1}^{-1} (A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} \\ &= A_{m+1}^{-1} A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}. \end{aligned}$$

故归纳成立。

**作业 4.15 (Ch4 T15)**

设方阵  $A$  满足  $A^k = O$ ,  $k$  为正整数。证明:  $I + A$  可逆, 并求  $(I + A)^{-1}$ 。

**证明** 考虑矩阵

$$B = I - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1}.$$

则

$$\begin{aligned} (I + A)B &= I - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1} \\ &\quad + A - A^2 + \cdots + (-1)^{k-1} A^k \\ &= I + (-1)^{k-1} A^k \\ &= I. \end{aligned}$$

同理  $B(I + A) = I$ 。因此  $I + A$  可逆, 且

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \cdots + (-1)^{k-1} A^{k-1}.$$

**作业 4.16 (Ch4 T16)**

设方阵  $A$  满足  $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$ 。证明:  $I - A$  可逆, 并求  $(I - A)^{-1}$ 。

**证明** 由题设

$$I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O,$$

整理得

$$I = 2A + 3A^2 - 4A^3 - 5A^4 + 6A^5.$$

再加上一个  $I$ , 写成

$$I = 2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5.$$

注意到右边可因式分解为

$$2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = (I - A)(2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4).$$

也即

$$(I - A)(2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4) = I.$$

因此  $I - A$  可逆, 且

$$(I - A)^{-1} = 2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4.$$

**定理 4.4**

矩阵的转置运算具有以下性质:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$
5.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

其中  $A, B$  是使运算有意义的矩阵,  $\lambda$  是数。

#### 定理 4.5

矩阵的迹具有以下性质：

1.  $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
2.  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$
3.  $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A), \text{tr}(\bar{A}) = \overline{\text{tr}(A)}$
4.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

其中  $A, B$  是使运算有意义的矩阵,  $\lambda$  是数。



#### 定理 4.6

矩阵的分块运算具有以下性质：

1. 设  $A = (A_{ij})_{r \times s}, B = (B_{ij})_{r \times s}$ , 则  $A+B = (A_{ij} + B_{ij})_{r \times s}$ 。
2. 设  $A = (A_{ij})_{r \times s}$ , 则  $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r \times s}$ 。
3. 设  $A = (A_{ij})_{r \times s}, B = (B_{ij})_{s \times t}$ , 则  $AB = (C_{ij})_{r \times t}$ , 其中  $C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik}B_{kj}$ 。
4. 设  $A = (A_{ij})_{r \times s}$ , 则  $A^\top = (A_{ji}^\top)_{s \times r}$ 。
5. 设  $A = (A_{ij})_{r \times s}$  是复方阵, 则  $\bar{A} = (\bar{A}_{ij})_{r \times s}$ 。
6. 设  $A = (A_{ij})_{r \times r}$  且每个  $A_{ii}$  都是方阵, 则  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^r \text{tr}(A_{ii})$ 。
7. 当  $A_1, \dots, A_r$  都可逆时,  $(\text{diag}(A_1, \dots, A_r))^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1})$ 。

其中矩阵  $A, B$  的分块方式使运算有意义,  $\lambda$  是数。



#### 作业 4.17 (Ch4 T17)

完成定理 4.4, 定理 4.5, 定理 4.6 的证明。



**证明** 先证定理 4.4。设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ , 则由转置定义直接有

$$\begin{aligned} ((A^\top)^\top)_{ij} &= a_{ij}, \\ ((A+B)^\top)_{ij} &= a_{ji} + b_{ji} = (A^\top + B^\top)_{ij}, \\ ((\lambda A)^\top)_{ij} &= \lambda a_{ji} = (\lambda A^\top)_{ij}. \end{aligned}$$

对乘积,

$$\begin{aligned} ((AB)^\top)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_k (B^\top)_{ik}(A^\top)_{kj} = (B^\top A^\top)_{ij}, \end{aligned}$$

所以  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ 。若  $A$  可逆, 则

$$\begin{aligned} A^\top (A^{-1})^\top &= (A^{-1}A)^\top = I, \\ (A^{-1})^\top A^\top &= (AA^{-1})^\top = I, \end{aligned}$$

故  $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ 。

再证定理 4.5。由迹的定义  $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$ , 立即得到

$$\begin{aligned} \text{tr}(A+B) &= \sum_i (a_{ii} + b_{ii}) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \\ \text{tr}(\lambda A) &= \sum_i \lambda a_{ii} = \lambda \text{tr}(A), \end{aligned}$$

$$\operatorname{tr}(A^\top) = \sum_i a_{ii} = \operatorname{tr}(A), \quad \operatorname{tr}(\bar{A}) = \sum_i \bar{a}_{ii} = \overline{\operatorname{tr}(A)}.$$

若  $AB, BA$  都有定义, 则

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \operatorname{tr}(BA).$$

最后证定理 4.6. 其中 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 都由分块运算的定义直接得到; (6) 由于迹只由对角元组成, 而分块矩阵的对角块恰好贡献全部对角元, 故

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^r \operatorname{tr}(A_{ii}).$$

对 (7), 设

$$D = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r), \quad E = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}),$$

则

$$DE = ED = \operatorname{diag}(I, \dots, I) = I,$$

所以

$$D^{-1} = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}).$$

#### 作业 4.18 (Ch4 T18)

证明:  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^\top = A_k^\top \cdots A_2^\top A_1^\top$  (假设其中的矩阵乘法有意义)。

**证明** 用数学归纳法。

当  $k=2$  时, 结论就是

$$(A_1 A_2)^\top = A_2^\top A_1^\top,$$

已由转置的乘积性质证明。

假设对  $k=m$  成立, 即

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^\top = A_m^\top \cdots A_2^\top A_1^\top.$$

则对  $k=m+1$ , 有

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 \cdots A_m A_{m+1})^\top &= ((A_1 A_2 \cdots A_m) A_{m+1})^\top \\ &= A_{m+1}^\top (A_1 A_2 \cdots A_m)^\top \\ &= A_{m+1}^\top A_m^\top \cdots A_2^\top A_1^\top. \end{aligned}$$

故结论对一切正整数  $k$  成立。

#### 作业 4.19 (Ch4 T19)

求所有满足  $A^2 = O, B^2 = I, \bar{C}^\top C = I$  的 2 阶复方阵  $A, B, C$ 。

**解**

1. 设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

则

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = O.$$

因而

$$a^2 + bc = 0, \quad bc + d^2 = 0, \quad (a + d)b = 0, \quad (a + d)c = 0.$$

若  $a + d \neq 0$ , 则  $b = c = 0$ , 再由  $a^2 = d^2 = 0$  得  $a = d = 0$ , 故  $A = O$ 。若  $a + d = 0$ , 即  $d = -a$ , 则只需满足

$$bc = -a^2.$$

所以所有满足  $A^2 = O$  的 2 阶复方阵恰为

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad bc = -a^2.$$

2. 设

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

由  $B^2 = I$  得

$$a^2 + bc = 1, \quad bc + d^2 = 1, \quad (a + d)b = 0, \quad (a + d)c = 0.$$

若  $a + d \neq 0$ , 则  $b = c = 0$ , 从而  $a^2 = d^2 = 1$ , 并且由  $a^2 = d^2 = 1$  及  $a + d \neq 0$  知  $a = d = \pm 1$ , 于是

$$B = I \quad \text{或} \quad B = -I.$$

若  $a + d = 0$ , 即  $d = -a$ , 则条件化为

$$a^2 + bc = 1.$$

因此所有满足  $B^2 = I$  的 2 阶复方阵为

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a^2 + bc = 1,$$

再加上  $\pm I$  这两个特殊情形; 其实  $\pm I$  也包含在上述式子取  $a = \pm 1, b = c = 0$  时。

3. 设

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2].$$

条件  $\bar{C}^\top C = I$  等价于  $C^H C = I$ , 即

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1, \\ \bar{a}b + \bar{c}d = 0, \\ |b|^2 + |d|^2 = 1. \end{cases}$$

固定第一列  $v_1 = (a, c)^\top$  后, 第二个条件说明  $v_2$  与  $v_1$  正交, 所以必可写成

$$b = -\lambda \bar{c}, \quad d = \lambda \bar{a}$$

的形式, 其中  $\lambda \in \mathbb{C}$ 。代入第三式得

$$|\lambda|^2(|c|^2 + |a|^2) = |\lambda|^2 = 1,$$

故  $\lambda = e^{i\theta}$ 。因此所有满足  $\bar{C}^T C = I$  的 2 阶复方阵恰为

$$C = \begin{bmatrix} a & -\bar{c} e^{i\theta} \\ c & \bar{a} e^{i\theta} \end{bmatrix}, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

#### 作业 4.20 (Ch4 T20)

证明：不存在  $n$  阶复方阵  $A, B$  满足  $AB - BA = I_n$ 。

**证明** 若存在这样的  $A, B$ ，则由迹的性质  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  可得

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

但另一方面

$$\text{tr}(I_n) = n \neq 0.$$

这与  $AB - BA = I_n$  矛盾，因此不存在满足条件的  $n$  阶复方阵  $A, B$ 。

#### 作业 4.21 (Ch4 T21)

证明：可逆上（下）三角、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是上（下）三角、准对角、对称、反对称的。

**证明** 只证上三角，其余情形类似或更直接。

设  $A = (a_{ij})$  是可逆上三角方阵， $B = A^{-1} = (b_{ij})$ 。由  $AB = I$ ，对  $i > j$  有

$$0 = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}.$$

当  $i = n$  时，上式化为  $a_{nn} b_{nj} = 0$ 。由于  $A$  可逆， $a_{nn} \neq 0$ ，故  $b_{nj} = 0$ 。自下而上归纳，若已知对所有  $k > i$  都有  $b_{kj} = 0$ ，则

$$0 = a_{ii} b_{ij} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij},$$

从而  $b_{ij} = 0$ 。故  $B$  仍是上三角方阵。下三角情形同理。

若  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$  是可逆准对角矩阵，则直接验证

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_r) \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}) = I,$$

所以

$$A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}),$$

仍是准对角矩阵。

若  $A$  是可逆对称方阵，则

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1},$$

故  $A^{-1}$  仍对称。

若  $A$  是可逆反对称方阵，即  $A^T = -A$ ，则

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

所以  $A^{-1}$  仍反对称。

### 作业 4.22 (Ch4 T22)

设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 。求  $A$  的 LU 分解, 并基于  $A$  的 LU 分解, 求解线性方程组  $Ax = b$ , 这里  $b = (1, -2, 1)^T$ 。



解 对  $A$  作消元:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 - \frac{1}{2}r_1, r_3 \leftarrow r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + \frac{4}{3}r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = U.$$

因而可取

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix},$$

于是  $A = LU$ 。

令  $Ux = y$ , 则原方程组化为

$$Ly = b, \quad Ux = y.$$

先解  $Ly = b$ :

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 = -2, \\ y_1 - \frac{4}{3}y_2 + y_3 = 1, \end{cases}$$

得

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

再解  $Ux = y$ :

$$\begin{cases} \frac{7}{3}x_3 = -\frac{10}{3}, \\ \frac{3}{2}x_2 + x_3 = -\frac{5}{2}, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

得

$$x = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{10}{7} \end{bmatrix}.$$

### 作业 4.23 (Ch4 T23)

求解下列矩阵方程:

$$1. X \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

解

1. 记

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

因为  $XA = B$ , 故

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -7 & -9 \\ -36 & -29 & -46 \\ -41 & -32 & -51 \end{bmatrix}.$$

2. 设

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

直接计算得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & x_{23} - x_{12} \\ x_{31} & x_{32} - x_{21} & x_{33} - x_{22} \\ x_{11} & x_{12} - x_{31} & x_{13} - x_{32} \end{bmatrix}.$$

与右边比较对应元素, 解得

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 14 \\ 1 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.24 (Ch4 T24)

设  $A, B$  是  $n$  阶方阵,  $\lambda$  是数。证明:

1.  $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$ ;
2.  $(AB)^* = B^* A^*$ ;
3.  $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$ 。

证明

1. 伴随矩阵的每个元素都是  $A$  的某个  $(n-1)$  阶子式乘以符号  $(-1)^{i+j}$  得到的代数余子式。把  $A$  换成  $\lambda A$  后, 每个  $(n-1)$  阶子式的每一项都多出  $\lambda^{n-1}$  这一因子, 因此每个代数余子式都乘上  $\lambda^{n-1}$ 。故

$$(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*.$$

2. 先设  $A, B$  都可逆, 则

$$(AB)^* = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} = B^*A^*.$$

对一般情形, 等式两边各元素都是  $A, B$  各元的多项式, 而它们在一切可逆矩阵对  $(A, B)$  上相等, 因此由多

项式恒等原理, 等式对任意  $A, B$  都成立, 即

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

3. 当  $A$  可逆时,

$$\det(A^*) = \det(\det(A)A^{-1}) = (\det A)^n \det(A^{-1}) = (\det A)^{n-1}.$$

同样地, 等式两边都是  $A$  各元的多项式, 且在一切可逆矩阵上成立, 故对任意  $A$  恒有

$$\det(A^*) = (\det A)^{n-1}.$$

#### 作业 4.25 (Ch4 T25)

设方阵  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 求  $A^*$ .

解 由

$$AA^* = \det(A)I$$

可知当  $A$  可逆时

$$A^* = \det(A)A^{-1}.$$

先求

$$\det(A) = \det(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}.$$

因而

$$A^* = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.26 (Ch4 T26)

设方阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 求  $A$ .

解 因为  $A^*$  可逆, 所以  $A$  也可逆。由上题结论

$$\det(A^*) = (\det A)^{n-1}.$$

这里  $n = 4$ , 而

$$\det(A^*) = -8,$$

因此

$$(\det A)^3 = -8 \Rightarrow \det A = -2.$$

又由  $AA^* = \det(A)I$ , 可得

$$A = \det(A)(A^*)^{-1} = -2(A^*)^{-1}.$$

计算  $(A^*)^{-1}$  后得到

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.27 (Ch4 T27)

设  $n$  阶方阵  $A$  的每行、每列元素之和都是 0, 证明:  $A^*$  的所有元素都相等。

**证明** 记  $A$  的代数余子式为  $A_{ij}$ 。由于题目条件对各行各列完全对称, 只需证明某两个相邻代数余子式相等, 例如  $A_{11} = A_{21}$ 。

由第一行元素和为 0 可知, 对任意  $r \geq 2$ , 有

$$a_{r2} + a_{r3} + \cdots + a_{rn} = -a_{r1}.$$

因而

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{22} + \cdots + a_{2n} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} + \cdots + a_{3n} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} + \cdots + a_{nn} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= A_{21}. \end{aligned}$$

同理可证  $A_{ij} = A_{i+1,j} = A_{i,j+1}$ , 于是所有代数余子式都相等。由于  $A^*$  正是这些代数余子式按转置方式排成的矩阵, 所以  $A^*$  的所有元素都相等。

#### 作业 4.28 (Ch4 T28)

设  $A$  是方阵, 证明: 线性方程组  $Ax = 0$  有非零解当且仅当  $\det(A) = 0$ 。

**证明** 若  $\det(A) \neq 0$ , 则  $A$  可逆。对线性方程组  $Ax = 0$  两边左乘  $A^{-1}$ , 得

$$x = A^{-1}0 = 0.$$

因而此时只有零解, 不可能有非零解。故若  $Ax = 0$  有非零解, 则必有  $\det(A) = 0$ 。

反过来, 若  $\det(A) = 0$ , 则  $A$  不可逆。把  $A$  经过初等行变换化为行阶梯形矩阵  $U$ , 则  $U$  仍不可逆, 因此  $U$  至少有一行全为 0, 从而方程组  $Ux = 0$  至少有一个自由变量, 故存在非零解。由于初等行变换不改变齐次线性方程组的解空间, 原方程组  $Ax = 0$  也有非零解。

#### 定理 4.7

对矩阵作初等行变换, 相当于在矩阵的左边乘上一个相应的初等方阵; 对矩阵作初等列变换, 相当于在矩阵的右边乘上一个相应的初等方阵。

**定理 4.8**

初等方阵具有下列性质：

1.  $S_{ij}$  为对称方阵，且  $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$ ；
2.  $D_i(\lambda)$  为对角方阵，且  $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$ ；
3.  $T_{ij}(\lambda)$  为三角方阵，且  $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$ 。

**作业 4.29 (Ch4 T29)**

完成定理 4.7、定理 4.8 的证明。



**证明** 先证定理 4.7。对任意  $m \times n$  矩阵  $A$ ：

左乘  $S_{ij}$ ，就是把单位矩阵的第  $i, j$  两行互换后再与  $A$  相乘，因此  $S_{ij}A$  恰好把  $A$  的第  $i, j$  两行互换；左乘  $D_i(\lambda)$ ，由于  $D_i(\lambda)$  只有第  $i$  个对角元变成  $\lambda$ ，故  $D_i(\lambda)A$  恰好把  $A$  的第  $i$  行乘以  $\lambda$ ；左乘  $T_{ij}(\lambda)$ ，其效果是把第  $j$  行的  $\lambda$  倍加到第  $i$  行。也就是说，对矩阵作三类初等行变换，分别等价于左乘相应的初等方阵。

同理，右乘  $S_{ij}, D_i(\lambda), T_{ij}(\lambda)$  分别对应于交换第  $i, j$  列、把第  $i$  列乘以  $\lambda$ 、把第  $i$  列加上第  $j$  列的  $\lambda$  倍，因此对矩阵作初等列变换相当于在右边乘上相应的初等方阵。

再证定理 4.8。

1.  $S_{ij}$  是把单位矩阵的第  $i, j$  行互换得到的矩阵，因此也是对称方阵，并且连续交换两次就回到单位矩阵，故

$$S_{ij}^{-1} = S_{ij}.$$

2.  $D_i(\lambda)$  是对角方阵，且

$$D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = I,$$

因而

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1}).$$

3.  $T_{ij}(\lambda)$  除对角元全为 1 外，只在  $(i, j)$  位置有一个  $\lambda$ ，故当  $i < j$  时是上三角方阵，当  $i > j$  时是下三角方阵，总之是三角方阵。并且

$$T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = I,$$

所以

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda).$$

**作业 4.30 (Ch4 T30)**

设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。计算  $A^n$  及  $A^{-1}$ 。



**解** 先按  $2 \times 2$  分块，写成

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于  $B = I_2 + N$  且  $N^2 = 0$ , 故

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用归纳法证明

$$A^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ nB^{n-1} & B^n \end{bmatrix}.$$

当  $n = 1$  时显然成立。若对  $n = k$  成立, 则

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} B^k & O \\ kB^{k-1} & B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ I_2 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{k+1} & O \\ (k+1)B^k & B^{k+1} \end{bmatrix},$$

故归纳成立。因此

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & -n(n-1) & 1 & -n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 可得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -B^{-2} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.31 (Ch4 T31)

设  $A, B$  为同阶方阵, 且满足  $AB = BA$ 。计算  $\begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^n$ 。

解 记

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}.$$

用归纳法证明

$$M^n = \begin{bmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{bmatrix}.$$

当  $n = 1$  时显然成立。若对  $n = k$  成立, 则利用  $AB = BA$ , 有

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k M = \begin{bmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O & A^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{k+1} & A^k B + kA^{k-1}BA \\ O & A^{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^k B \\ O & A^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故结论成立, 即

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & A \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.32 (Ch4 T32)

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且满足  $A^3 = I_n$ 。计算  $\begin{bmatrix} O & I_n \\ A & O \end{bmatrix}^{2024}$ 。

解 记

$$M = \begin{bmatrix} O & I_n \\ A & O \end{bmatrix}.$$

先算

$$M^2 = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix} = \text{diag}(A, A).$$

因而对任意正整数  $m$ , 有

$$M^{2m} = \text{diag}(A^m, A^m), \quad M^{2m+1} = \begin{bmatrix} O & A^m \\ A^{m+1} & O \end{bmatrix}.$$

由于  $2024 = 2 \cdot 1012$ , 且  $A^3 = I_n$ , 所以

$$A^{1012} = A^{3 \cdot 337 + 1} = A.$$

从而

$$M^{2024} = \text{diag}(A^{1012}, A^{1012}) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.33 (Ch4 T33)

设  $A \in \mathbb{F}^{m \times m}, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, C \in \mathbb{F}^{n \times m}$ , 且  $A, B$  可逆。求分块矩阵  $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$  的逆。

解 设

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}.$$

直接验证

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

是它的逆。事实上,

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} - CA^{-1} & I \end{bmatrix} = I,$$

且

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ -B^{-1}C + B^{-1}C & I \end{bmatrix} = I.$$

因此

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

#### 作业 4.34 (Ch4 T34)

证明：初等方阵具有以下性质

1.  $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu) = T_{ij}(\lambda + \mu)$ ;
2. 当  $i \neq q$  且  $j \neq p$  时,  $T_{ij}(\lambda)T_{pq}(\mu) = T_{pq}(\mu)T_{ij}(\lambda)$ ;
3.  $D_i(-1)S_{ij} = S_{ij}D_j(-1) = T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)$ 。

**证明** 记  $E_{ij}$  为矩阵单位, 则

$$T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij} \quad (i \neq j).$$

又因为  $i \neq j$ , 故  $E_{ij}^2 = 0$ 。

1.

$$T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu) = (I + \lambda E_{ij})(I + \mu E_{ij}) = I + (\lambda + \mu)E_{ij} = T_{ij}(\lambda + \mu).$$

2. 由  $E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$ , 在条件  $i \neq q, j \neq p$  下有  $\delta_{jp} = \delta_{qi} = 0$ , 故

$$E_{ij}E_{pq} = E_{pq}E_{ij} = 0.$$

因而

$$T_{ij}(\lambda)T_{pq}(\mu) = (I + \lambda E_{ij})(I + \mu E_{pq}) = I + \lambda E_{ij} + \mu E_{pq} = T_{pq}(\mu)T_{ij}(\lambda).$$

3. 只看第  $i, j$  行与第  $i, j$  列对应的  $2 \times 2$  主块即可。此时

$$D_i(-1)S_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{ij}D_j(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

另一方面

$$T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$D_i(-1)S_{ij} = S_{ij}D_j(-1) = T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1).$$

#### 作业 4.35 (Ch4 T35)

将单位矩阵做一系列 (有限次) 行与行的对换得到的矩阵称为置换矩阵。证明:

1. 将单位矩阵做一系列的列与列的对换得到的矩阵也为置换矩阵;
2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位阵的行 (或列) 得到;
3. 置换矩阵的乘积仍为置换矩阵;
4. 置换矩阵的逆、转置也是置换矩阵。

**证明** 设  $P$  是置换矩阵, 则存在若干交换矩阵  $S_{i_1 j_1}, \dots, S_{i_k j_k}$  使得

$$P = S_{i_1 j_1} S_{i_2 j_2} \cdots S_{i_k j_k}.$$

1. 若把单位矩阵做一系列列交换, 所得矩阵可写成

$$I S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r} = S_{p_1 q_1} S_{p_2 q_2} \cdots S_{p_r q_r},$$

仍是若干交换矩阵的乘积, 所以也是置换矩阵。

2. 交换矩阵只会重新排列单位矩阵的行或列, 因此置换矩阵恰好可以看成把单位矩阵的行按某种次序重排后得到的矩阵; 同理也可视为列重排。
3. 若  $P_1, P_2$  都是置换矩阵, 则它们都是若干交换矩阵的乘积, 所以  $P_1 P_2$  仍是若干交换矩阵的乘积, 从而还是置换矩阵。
4. 由  $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$ ,  $S_{ij}^T = S_{ij}$  可知

$$P^{-1} = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}, \quad P^T = S_{i_k j_k} \cdots S_{i_2 j_2} S_{i_1 j_1}.$$

因此置换矩阵的逆与转置仍是置换矩阵。

#### 作业 4.36 (Ch4 T36)

计算下列矩阵的逆矩阵

1. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. 
$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. 
$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}, A_i \text{ 可逆}$$

5. 
$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}$$

解

1. 直接计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{372} \begin{bmatrix} 98 & 50 & 84 & 78 \\ -8 & -80 & -60 & 24 \\ 14 & -46 & 12 & -42 \\ -65 & 1 & 24 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. 直接计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & -7 \\ -1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & -21 \end{bmatrix}.$$

3. 记

$$R_n = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

则可验证

$$R_n^{-1} = \begin{bmatrix} & & -1 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

即  $R_n^{-1}$  在副对角线上全为 1, 紧邻副对角线的一条平行线上全为 -1, 其余元素全为 0。

4. 对分块反对角矩阵

$$M = \begin{bmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ & \ddots & \\ A_k & & \end{bmatrix},$$

直接由分块乘法验证其逆为

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} & & A_k^{-1} \\ & A_{k-1}^{-1} & \\ & \ddots & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}.$$

5. 记

$$A = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{bmatrix} = D + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top, \quad D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

当所有  $a_i \neq 0$  时, 令

$$s = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

若  $s \neq 0$ , 由 Sherman-Morrison 公式可得

$$A^{-1} = D^{-1} - \frac{D^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top D^{-1}}{s}.$$

也就是

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i^2 s}, & i = j, \\ -\frac{1}{a_i a_j s}, & i \neq j. \end{cases}$$

若恰有一个  $a_k = 0$  而其余  $a_i \neq 0$ , 则  $A$  仍可逆, 且由上式取极限可得

$$(A^{-1})_{kk} = 1 + \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i},$$

$$(A^{-1})_{ii} = \frac{1}{a_i} \quad (i \neq k), \quad (A^{-1})_{ik} = (A^{-1})_{ki} = -\frac{1}{a_i} \quad (i \neq k),$$

其余  $i \neq j$  且  $i, j \neq k$  时  $(A^{-1})_{ij} = 0$ 。若至少有两个  $a_i$  为 0, 或者所有  $a_i \neq 0$  但  $s = 0$ , 则  $A$  不可逆。

#### 定理 4.9

设  $A, B$  均为同阶方阵。则  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ 。

#### 作业 4.37 (Ch4 T37)

本题给出定理 4.9 的另一个证明。设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵。

1. 若  $A$  或者  $B$  不可逆, 证明  $AB$  也不可逆。
2. 设  $P$  为初等方阵, 证明  $\det(PB) = \det(P) \det(B)$ 。
3. 证明:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ 。

#### 证明

1. 若  $B$  不可逆, 则存在  $x \neq 0$  使  $Bx = 0$ , 从而

$$ABx = A(Bx) = 0,$$

故  $AB$  不可逆。

若  $A$  不可逆, 则  $A^T$  也不可逆, 于是存在  $y \neq 0$  使  $A^T y = 0$ , 即  $y^T A = 0$ 。于是

$$y^T (AB) = (y^T A) B = 0,$$

从而  $AB$  也不可逆。

2. 设  $P$  是初等方阵, 则  $PB$  就是对  $B$  作一次相应的初等行变换。行列式在三类初等行变换下分别乘以  $-1, \lambda, 1$ , 而这恰好就是对应初等方阵的行列式。因此

$$\det(PB) = \det(P) \det(B).$$

3. 若  $A$  或  $B$  不可逆, 则由 (1) 知  $AB$  不可逆, 因此

$$\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B).$$

若  $A$  可逆, 则经高斯消元可将  $A$  化为  $I$ , 故  $A$  可写为若干初等方阵的乘积:

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s.$$

利用 (2) 反复计算, 得到

$$\det(AB) = \det(P_1 P_2 \cdots P_s B) = \det(P_1) \det(P_2) \cdots \det(P_s) \det(B) = \det(A) \det(B).$$

结论得证。

作业 4.38 (Ch4 T38)

设  $A$  是  $n$  阶可逆方阵,  $a$  为  $n$  维列向量。证明:

$$\det(A - aa^T) = (1 - a^T A^{-1} a) \det(A).$$

**证明** 考虑分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & a \\ a^T & 1 \end{bmatrix}.$$

右乘

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -a^T & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$M \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -a^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - aa^T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因右侧乘的矩阵行列式为 1, 故

$$\det M = \det(A - aa^T).$$

另一方面, 左乘

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -a^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -a^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 - a^T A^{-1} a \end{bmatrix}.$$

由于左侧乘的矩阵行列式也为 1, 故

$$\det M = \det(A)(1 - a^T A^{-1} a).$$

综合两式即得

$$\det(A - aa^T) = (1 - a^T A^{-1} a) \det(A).$$

作业 4.39 (Ch4 T39)

设  $A$  是  $n$  阶可逆方阵,  $a, b$  为  $n$  维列向量。证明:  $A + ab^T$  可逆当且仅当  $1 + b^T A^{-1} a \neq 0$ 。且  $A + ab^T$  可逆时,

$$(A + ab^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a}.$$

**证明** 先设

$$1 + b^T A^{-1} a \neq 0.$$

直接计算

$$\begin{aligned} & (A + ab^T) \left( A^{-1} - \frac{A^{-1} ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a} \right) \\ &= I + ab^T A^{-1} - \frac{ab^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a} - \frac{a(b^T A^{-1} a)b^T A^{-1}}{1 + b^T A^{-1} a} \\ &= I. \end{aligned}$$

同理也可验证右乘结果仍为  $I$ ，故当  $1 + b^T A^{-1} a \neq 0$  时， $A + ab^T$  可逆，且给出的公式就是其逆矩阵。

反过来，考虑分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & a \\ -b^T & 1 \end{bmatrix}.$$

与上一题完全类似，可得

$$\det M = (1 + b^T A^{-1} a) \det(A) = \det(A + ab^T).$$

若  $A + ab^T$  可逆，则  $\det(A + ab^T) \neq 0$ ，而  $A$  本身可逆，故必有

$$1 + b^T A^{-1} a \neq 0.$$

因此命题得证。

#### 作业 4.40 (Ch4 T40)

设  $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ，且  $A$  为对称可逆方阵。证明：存在可逆方阵  $P$  使得  $P \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & B \end{bmatrix} P^T$  为准对角阵。

**证明** 取

$$P = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}.$$

因为  $A$  可逆，所以  $P$  显然可逆。又由于  $A$  对称， $A^T = A$ ，从而

$$P^T = \begin{bmatrix} I_m & -(CA^{-1})^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}C^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} P \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & B \end{bmatrix} P^T &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C^T \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}C^T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - CA^{-1}C^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

右边是准对角阵，因此命题成立。

#### 作业 4.41 (Ch4 T41)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵， $B$  是  $n \times m$  矩阵。证明：

$$\det(I_n - BA) = \det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m - AB).$$

**证明** 进行分块初等变换：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上面左右两侧所乘的分块矩阵都是第三类初等变换阵，行列式都等于 1。对这两个等式取行列式，便得

$$\det \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_n - BA) = \det(I_m - AB).$$

#### 作业 4.42 (Ch4 T42)

计算下列矩阵的秩。

1.  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$

解

1. 由于第四行与第一行相同，故秩至多为 3。再看由第 1, 2, 3 行与第 1, 2, 4 列构成的 3 阶子式：

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = 39 \neq 0.$$

因而矩阵秩至少为 3，故

$$\text{rank} = 3.$$

2. 作初等行变换：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & -40 & -80 & 50 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -28 & -56 & 35 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$\text{rank} = 2.$$

3. 记四列向量分别为  $c_1, c_2, c_3, c_4$ 。直接验证

$$c_4 = c_1 - 3c_2 + 3c_3,$$

所以秩至多为 3。另一方面,前三列对应的 3 阶子式为

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} = -8 \neq 0,$$

因而秩至少为 3, 故

$$\text{rank} = 3.$$

#### 作业 4.43 (Ch4 T43)

对于  $a, b$  的各种取值, 讨论实矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix}$  的秩。



**解** 对矩阵作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是分三种情形:

1. 当  $a \neq 6, b \neq 6$  时, 后两行都非零且线性无关, 因此

$$\text{rank} = 3.$$

2. 当  $a = 6, b = 6$  时, 后两行都为零, 故

$$\text{rank} = 1.$$

3. 当  $a = 6, b \neq 6$  或  $a \neq 6, b = 6$  时, 恰有一行非零, 故

$$\text{rank} = 2.$$

#### 作业 4.44 (Ch4 T44)

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $A^2 = I$ . 求方阵  $\text{diag}(I + A, I - A)$  的相抵标准形。



**解** 这是一个  $2n \times 2n$  的分块对角矩阵, 其秩为

$$\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A).$$

由第 48 题知

$$\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A) = n.$$

因而该矩阵的秩恰为  $n$ 。而秩为  $n$  的  $2n \times 2n$  矩阵的相抵标准形唯一, 即

$$\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

**作业 4.45 (Ch4 T45)**

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明:

$$\text{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n; \\ 1, & \text{rank}(A) = n - 1; \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

**证明** 分三种情形讨论。

若  $\text{rank}(A) = n$ , 则  $A$  可逆。由

$$A^*A = \det(A)I_n$$

可知  $A^*$  也可逆, 因此

$$\text{rank}(A^*) = n.$$

若  $\text{rank}(A) = n - 1$ , 则  $A$  至少有一个非零的  $(n - 1)$  阶子式, 所以  $A^*$  中至少有一个元素非零, 从而

$$\text{rank}(A^*) \geq 1.$$

又由 Sylvester 不等式,

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(A^*) \leq \text{rank}(AA^*) + n = n,$$

故

$$\text{rank}(A^*) \leq 1.$$

因而

$$\text{rank}(A^*) = 1.$$

若  $\text{rank}(A) \leq n - 2$ , 则  $A$  的所有  $(n - 1)$  阶子式都为 0, 故所有代数余子式都为 0, 即  $A^* = O$ , 从而

$$\text{rank}(A^*) = 0.$$

**作业 4.46 (Ch4 T46)**

设  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ . 证明: 线性方程组  $Ax = 0$  有非零解的充分必要条件是  $\text{rank}(A) < n$ .

**证明** 将  $A$  经初等行变换化为行阶梯形矩阵  $U$ . 由于初等行变换不改变齐次方程组的解空间,  $Ax = 0$  与  $Ux = 0$  有完全相同的解。

若  $\text{rank}(A) = r < n$ , 则  $U$  中只有  $r$  个主元列, 至少有  $n - r \geq 1$  个自由变量, 于是令某个自由变量取非零值, 就得到一个非零解。因此  $Ax = 0$  有非零解。

反过来, 若  $Ax = 0$  有非零解, 则  $Ux = 0$  也有非零解。若  $\text{rank}(A) = n$ , 则  $U$  有  $n$  个主元列, 没有自由变量, 只能有零解, 矛盾。故必有

$$\text{rank}(A) < n.$$

**作业 4.47 (Ch4 T47)**

证明下列关于秩的不等式。

1.  $\max(\text{rank}(A), \text{rank}(B), \text{rank}(A + B)) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix};$
2.  $\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B);$

$$3. \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

其中  $A, B, C$  是使运算有意义的矩阵。



证明

1. 注意到

$$A = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}.$$

乘法不会增大秩，因此

$$\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B), \operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

于是

$$\max(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B), \operatorname{rank}(A + B)) \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

2. 有

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

而

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix},$$

因此

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

3. 设  $\operatorname{rank}(A) = r, \operatorname{rank}(B) = s$ 。则  $A$  有一个  $r$  阶非零子式， $B$  有一个  $s$  阶非零子式。把这两个子式分别选在

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

的左上块和右下块中，就得到一个  $(r + s)$  阶的分块上三角子式，其行列式等于这两个子式行列式的乘积，故非零。因此

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \geq r + s = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

#### 作业 4.48 (Ch4 T48)

设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = I$ ，证明： $\operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$ 。



证明 一方面，由秩的次可加性，

$$\operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(I - A) \geq \operatorname{rank}((I + A) + (I - A)) = \operatorname{rank}(2I) = n.$$

另一方面，由 Sylvester 不等式，

$$\operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(I - A) \leq n + \operatorname{rank}((I + A)(I - A)).$$

而

$$(I + A)(I - A) = I - A^2 = O,$$

故右边等于  $n$ 。综合两边便得

$$\text{rank}(I + A) + \text{rank}(I - A) = n.$$

#### 作业 4.49 (Ch4 T49)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵。证明:  $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$ 。

**证明** 设

$$r = \text{rank}(A).$$

由矩阵的相抵标准形, 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

将  $Q^{-1}B$  按前  $r$  行与后  $n-r$  行分块写成

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

其中  $B_1$  有  $r$  行,  $B_2$  有  $n-r$  行。于是

$$PAB = (PAQ)(Q^{-1}B) = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix}.$$

因为左乘可逆矩阵不改变秩, 所以

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(PAB) = \text{rank}(B_1).$$

另一方面,

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(Q^{-1}B) = \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

又因为

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ B_2 \end{bmatrix},$$

所以

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(B_1) + \text{rank}(B_2).$$

而  $B_2$  只有  $n-r$  行, 故

$$\text{rank}(B_2) \leq n-r.$$

因此

$$\text{rank}(B) \leq \text{rank}(B_1) + n-r = \text{rank}(AB) + n - \text{rank}(A).$$

移项便得

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n.$$

### 作业 4.50 (Ch4 T50)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵。证明

$$m + \text{rank}(I_n - BA) = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = n + \text{rank}(I_m - AB).$$



**证明** 由分块初等变换可得

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

左右乘的分块矩阵都可逆, 因此不改变矩阵的秩。于是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix} = m + \text{rank}(I_n - BA),$$

同理

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = n + \text{rank}(I_m - AB).$$

故结论成立。

## 第五章 线性空间

### 作业 5.1 (Ch5 T1)

设  $a_1 = (1, 2, -1), a_2 = (2, 0, 3), a_3 = (2, 1, 0)$  是三维几何空间中的三个向量。能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合？这三个向量是否共面？

解 记以  $a_1, a_2, a_3$  为列向量组成的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算得

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 7 \neq 0.$$

故  $a_1, a_2, a_3$  线性无关，因此其中没有任何一个向量能表示成另外两个向量的线性组合，也就不共面。

### 作业 5.2 (Ch5 T2)

设  $a_1 = (0, 1, -2), a_2 = (2, 1, 3), a_3 = (4, 5, 0)$  是三维几何空间中的三个向量。能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合？这三个向量是否共面？

解 注意到

$$3a_1 + 2a_2 = (0, 3, -6) + (4, 2, 6) = (4, 5, 0) = a_3.$$

因而  $a_3$  可以由  $a_1, a_2$  线性表示，所以这三个向量线性相关，从而共面。

### 作业 5.3 (Ch5 T3)

在  $\mathbb{F}^4$  中，判断向量  $b$  能否写成  $a_1, a_2, a_3$  的线性组合。若能，请写出一种表示方式。

1.  $a_1 = (-1, 3, 0, -5), a_2 = (2, 0, 7, -3), a_3 = (-4, 1, -2, 6), b = (8, 3, -1, -25)$ 。
2.  $a_1 = (3, -5, 2, -4)^T, a_2 = (-1, 7, -3, 6)^T, a_3 = (3, 11, -5, 10)^T, b = (2, -30, 13, -26)^T$ 。

解

1. 能，因为

$$2a_1 - a_2 - 3a_3 = 2(-1, 3, 0, -5) - (2, 0, 7, -3) - 3(-4, 1, -2, 6) = (8, 3, -1, -25) = b.$$

2. 能，因为

$$-a_1 - 5a_2 = -(3, -5, 2, -4) - 5(-1, 7, -3, 6) = (2, -30, 13, -26) = b.$$

因而  $b$  可以写成  $a_1, a_2, a_3$  的线性组合，且例如

$$b = -a_1 - 5a_2.$$

### 作业 5.4 (Ch5 T4)

设  $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 1, 1, 1)$ 。证明： $\mathbb{F}^4$  中任何向量可以写成  $a_1, a_2, a_3, a_4$  的线性组合，且表示唯一。

**证明** 设

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4.$$

比较各坐标, 得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

这是一个上三角方程组, 可直接回代得

$$x_4 = b_4, \quad x_3 = b_3 - b_4, \quad x_2 = b_2 - b_3, \quad x_1 = b_1 - b_2.$$

因此任意  $b \in \mathbb{F}^4$  都可以表示为

$$b = (b_1 - b_2)a_1 + (b_2 - b_3)a_2 + (b_3 - b_4)a_3 + b_4 a_4.$$

而上述回代过程给出的解唯一, 所以这种表示也是唯一的。

#### 作业 5.5 (Ch5 T5)

设  $P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$  是三维几何空间中的点。证明:  $P_i, i = 1, 2, 3, 4$  共面的条件是

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

**证明** 必要性: 若四点共面, 则存在平面方程

$$ax + by + cz + d = 0$$

使得四点都满足它, 其中  $a, b, c, d$  不全为零。于是

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0.$$

此齐次线性方程组有非零解, 故系数矩阵行列式为零。

充分性: 若

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

则方程组

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

有非零解  $(a, b, c, d)$ 。于是四点都满足平面方程

$$ax + by + cz + d = 0,$$

故四点共面。

#### 作业 5.6 (Ch5 T6)

设  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是三维几何空间中的四个向量。证明它们必线性相关。

**证明** 设

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = 0.$$

把每个向量写成坐标形式，这对应于一个 3 个方程、4 个未知数的齐次线性方程组。其系数矩阵至多秩为 3，小于未知数个数 4，因此该齐次方程组必有非零解。

这就说明存在不全为零的  $x_1, x_2, x_3, x_4$  使上式成立，所以  $a_1, a_2, a_3, a_4$  必线性相关。

#### 作业 5.7 (Ch5 T7)

设  $b_1, b_2, \dots, b_s$  中每一个向量是  $n$  维数组向量  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合。证明： $b_1, b_2, \dots, b_s$  的任何线性组合都是  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合。

**证明** 由题设，对每个  $i = 1, 2, \dots, s$ ，存在数  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}$  使得

$$b_i = \alpha_{i1} a_1 + \alpha_{i2} a_2 + \cdots + \alpha_{ir} a_r.$$

任取  $b_1, b_2, \dots, b_s$  的一个线性组合

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_s b_s,$$

则

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_s b_s &= \lambda_1 (\alpha_{11} a_1 + \cdots + \alpha_{1r} a_r) + \cdots + \lambda_s (\alpha_{s1} a_1 + \cdots + \alpha_{sr} a_r) \\ &= \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_{i1} \right) a_1 + \cdots + \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_{ir} \right) a_r. \end{aligned}$$

因而它仍是  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的线性组合。

#### 作业 5.8 (Ch5 T8)

证明：对线性方程组做初等变换后得到的线性方程组中的每一个方程都是原方程组的线性组合。

**证明** 只需分别考察三种初等变换：

交换两个方程后，新方程组中的每个方程仍然就是原来的某个方程，因此当然是原方程组的线性组合。

把某个方程乘以非零常数  $\lambda$  后，新得到的方程是原来该方程的  $\lambda$  倍，因此也是原方程组的线性组合。

把第  $i$  个方程加上第  $j$  个方程的  $\mu$  倍后，新第  $i$  个方程变成“原第  $i$  个方程  $+\mu$  倍原第  $j$  个方程”，显然也是原方程组的线性组合，其余方程不变。

因此，对线性方程组做任一次初等变换后，新方程组中的每一个方程都是原方程组的线性组合。若做有限次初等变换，由上述结论反复应用即可。

#### 作业 5.9 (Ch5 T9)

判别下列线性方程组是否线性相关

1.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_3 = -1 \\ 8x_1 - 6x_2 - 10x_3 = -13 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

**解** 把每个方程看作它的系数向量（连同常数项）所对应的行向量。

1. 线性相关，因为第三个方程恰好等于第一个方程的  $-3$  倍再加上第二个方程：

$$-3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4) + (5x_1 - x_3 = -1) = 8x_1 - 6x_2 - 10x_3 = -13.$$

2. 线性无关。只看前三个未知数的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的行列式为

$$2 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -5 \neq 0,$$

所以这三个方程线性无关。

#### 作业 5.10 (Ch5 T10)

判断下列向量组是否线性相关

1.  $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$ ;
2.  $a_1 = (3, 1, 2, -4), a_2 = (1, 0, 5, 2), a_3 = (-1, 2, 0, 3)$ ;
3.  $a_1 = (-2, 1, 0, 3), a_2 = (1, -3, 2, 4), a_3 = (3, 0, 2, -1), a_4 = (2, -2, 4, 6)$ ;
4.  $a_1 = (1, -1, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0), a_3 = (0, 0, 1, -1), a_4 = (-1, 0, 0, 1)$ 。

**解**

1. 线性无关，因为

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = -30 \neq 0.$$

2. 线性无关，因为由前三个坐标组成的  $3 \times 3$  子式

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = -31 \neq 0.$$

3. 线性相关，因为

$$-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0,$$

即

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3.$$

4. 线性相关, 因为

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

#### 作业 5.11 (Ch5 T11)

证明: 任何一个经过以下两个平面

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

交线的平面的方程能写成:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

其中  $\lambda, \mu$  为不全为零的常数。

**证明** 设两平面的交线为  $L$ 。

先证

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

在  $\lambda, \mu$  不全为零时确实表示一个经过  $L$  的平面。把它整理为

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0.$$

因为原来两平面有交线, 所以它们不平行, 法向量

$$(A_1, B_1, C_1), \quad (A_2, B_2, C_2)$$

不共线, 于是当  $\lambda, \mu$  不全为零时, 新方程的法向量不为零, 故它确定一个平面。又交线  $L$  上任一点都同时满足原来两个平面方程, 所以也满足它们的任意线性组合, 故这个平面经过  $L$ 。

再证任意经过  $L$  的平面都能写成这种形式。设

$$\pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

是任意一个经过  $L$  的平面。取一点  $P_0 \in \pi_3 \setminus L$ , 记

$$k_1 = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1, \quad k_2 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2.$$

由于  $P_0 \notin L$ , 故  $k_1, k_2$  不全为零。令  $\lambda = k_2, \mu = -k_1$ , 则  $P_0$  满足平面

$$k_2(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - k_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

这个平面既经过交线  $L$ , 又经过  $L$  外一点  $P_0$ , 因此它就是  $\pi_3$ 。故任意经过交线的平面方程都可写成题中形式。

#### 作业 5.12 (Ch5 T12)

下列说法是否正确? 为什么?

1. 若  $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$  线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其它向量的线性组合。
2. 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关。
3. 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关。
4.  $\mathbb{F}^n$  的  $n+1$  个向量组成的向量组必线性相关。
5. 设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 则  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$  必线性无关。
6. 设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性相关, 则  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_s + a_1$  必线性相关。
7. 设  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{F}^n$  线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关。

8. 设  $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$  线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关。

解

1. 不正确。例如一维向量组  $\{0, 1\}$  线性相关, 但向量 1 不能由 0 线性表示。
2. 不正确。例如在  $\mathbb{R}^2$  中, 向量组

$$(1, 0), (0, 1), (1, 1)$$

本身线性相关, 但它的任意真子向量组都线性无关。

3. 正确。若原向量组线性无关, 而某个子向量组线性相关, 则把这个子向量组中的非平凡线性关系其余系数补零, 就得到原向量组的非平凡线性关系, 矛盾。
4. 正确。因为  $\mathbb{R}^n$  中  $n+1$  个向量对应一个  $n \times (n+1)$  齐次线性方程组, 未知数多于方程个数, 必有非零解, 所以线性相关。
5. 不正确。取  $s=2$ , 若  $a_1, a_2$  线性无关, 则

$$a_1 + a_2, a_2 + a_1$$

显然线性相关。

6. 正确。记

$$b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, \dots, b_s = a_s + a_1.$$

设

$$(b_1, b_2, \dots, b_s) = (a_1, a_2, \dots, a_s)P,$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

当  $s$  为偶数时,  $\det P = 0$ , 故  $b_1, \dots, b_s$  必线性相关; 当  $s$  为奇数时,  $P$  可逆, 故新旧两个向量组等价, 从而相关性保持不变, 所以原向量组线性相关时, 新向量组仍线性相关。

7. 正确。设  $a_i$  的加长向量为  $\tilde{a}_i$ 。若

$$\lambda_1 \tilde{a}_1 + \cdots + \lambda_s \tilde{a}_s = 0,$$

则比较前面原有的分量可得

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_s a_s = 0.$$

由原向量组线性无关可知  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ , 故加长向量组也线性无关。

8. 不正确。例如一维向量组  $a_1 = (1), a_2 = (2)$  线性相关, 但它们的加长向量

$$\tilde{a}_1 = (1, 0), \quad \tilde{a}_2 = (2, 1)$$

在  $\mathbb{R}^2$  中线性无关。

### 作业 5.13 (Ch5 T13)

若向量组  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}^n$  线性无关, 而  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  线性相关, 则  $b$  可以表示成  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的线性组合, 且表示唯一。

**证明** 由于  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  线性相关, 存在不全为零的数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$  使得

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \mu b = 0.$$

若  $\mu = 0$ , 则

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

有非零解, 这与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关矛盾。因此  $\mu \neq 0$ , 从而

$$b = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\mu} a_n.$$

所以  $b$  可以由  $a_1, \dots, a_n$  线性表示。

若还有另一种表示

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n,$$

则相减得

$$(\alpha_1 - \beta_1) a_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) a_n = 0.$$

由  $a_1, \dots, a_n$  线性无关, 知  $\alpha_i - \beta_i = 0$ , 即  $\alpha_i = \beta_i$ 。故表示唯一。

### 作业 5.14 (Ch5 T14)

证明向量表示基本定理: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}^n$  线性无关, 则任意向量  $b \in \mathbb{F}^n$  可以表示为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的线性组合, 且表示唯一。

**证明** 对任意  $b \in \mathbb{F}^n$ , 向量组

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b$$

是  $\mathbb{F}^n$  中的  $n+1$  个向量, 因此必线性相关。又因为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关, 故由上题可知  $b$  可以表示成  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的线性组合, 且表示唯一。

### 作业 5.15 (Ch5 T15)

证明: 非零向量组  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关的充要条件是, 每个  $a_i (1 < i \leq s)$  都不能用它前面的向量线性表示。

**证明** 必要性: 若  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 而某个  $a_i$  可以由前面的向量线性表示, 即

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1},$$

则

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} - a_i = 0$$

是一个非平凡线性关系, 矛盾。故每个  $a_i$  都不能由前面的向量线性表示。

充分性: 反设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性相关, 则存在不全为零的  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  使得

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_s a_s = 0.$$

设  $k$  是满足  $\mu_k \neq 0$  的最大下标, 则

$$a_k = -\frac{\mu_1}{\mu_k} a_1 - \dots - \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} a_{k-1},$$

这说明  $a_k$  能由它前面的向量线性表示, 与假设矛盾。故原向量组线性无关。

#### 作业 5.16 (Ch5 T16)

设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关,  $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$ 。如  $\lambda_i \neq 0$ , 则用  $b$  代替  $a_i$  后, 向量组  $a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_s$  线性无关。

**证明** 设

$$\mu_1 a_1 + \dots + \mu_{i-1} a_{i-1} + \mu_i b + \mu_{i+1} a_{i+1} + \dots + \mu_s a_s = 0.$$

把

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$$

代入, 得

$$(\mu_1 + \mu_i \lambda_1) a_1 + \dots + (\mu_{i-1} + \mu_i \lambda_{i-1}) a_{i-1} + \mu_i \lambda_i a_i + (\mu_{i+1} + \mu_i \lambda_{i+1}) a_{i+1} + \dots + (\mu_s + \mu_i \lambda_s) a_s = 0.$$

由于  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 所有系数都必须为零。特别地,

$$\mu_i \lambda_i = 0.$$

又因  $\lambda_i \neq 0$ , 故  $\mu_i = 0$ 。于是其余各式又化为  $\mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \dots = \mu_s = 0$ 。因此替换后的向量组线性无关。

#### 作业 5.17 (Ch5 T17)

设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关, 且  $a_1, a_2, \dots, a_r$  可以由向量组  $b_1, b_2, \dots, b_s$  线性表示, 则  $b_1, b_2, \dots, b_r$  也线性无关。

**证明** 若  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性相关, 则

$$\dim \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle < r.$$

又由题设可知  $a_1, a_2, \dots, a_r$  都可以由  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性表示, 因此

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle.$$

于是

$$\dim \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle \leq \dim \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle < r,$$

这与  $a_1, a_2, \dots, a_r$  线性无关、其张成空间维数恰为  $r$  矛盾。故  $b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关。

#### 作业 5.18 (Ch5 T18)

**证明:** 向量组等价具有自身性、对称性与传递性。

**证明** 设两个向量组等价是指它们互相可以线性表示, 等价地说, 它们张成的线性空间相同。

自身性: 任一向量组当然可以由自身线性表示, 因此它与自身等价。

对称性: 若向量组  $S_1$  与  $S_2$  等价, 则按定义  $S_1$  能由  $S_2$  线性表示, 且  $S_2$  也能由  $S_1$  线性表示, 于是  $S_2$  与  $S_1$  等价。

传递性: 若  $S_1$  与  $S_2$  等价,  $S_2$  与  $S_3$  等价, 则

$$\text{span}(S_1) = \text{span}(S_2), \quad \text{span}(S_2) = \text{span}(S_3).$$

从而

$$\text{span}(S_1) = \text{span}(S_3).$$

因此  $S_1$  与  $S_3$  等价。

所以向量组等价具有自身性、对称性与传递性。

#### 作业 5.19 (Ch5 T19)

求下列向量组的极大无关组与秩

1.  $a_1 = (3, -2, 0), a_2 = (27, -18, 0), a_3 = (-1, 5, 8)$ 。
2.  $a_1 = (1, -1, 2, 4), a_2 = (0, 3, 1, 2), a_3 = (3, 0, 7, 14), a_4 = (1, -1, 2, 0), a_5 = (2, 1, 5, 6)$ 。
3.  $a_1 = (0, 1, 2, 3), a_2 = (1, 2, 3, 4), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (4, 3, 2, 1), a_5 = (6, 5, 4, 3)$ 。

解

1. 因为

$$a_2 = 9a_1,$$

且  $a_1, a_3$  显然不共线, 所以可取一个极大无关组为

$$\{a_1, a_3\},$$

秩为 2。

2. 把它们作为列向量排成矩阵, 行化简得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而秩为 3, 可取一个极大无关组为

$$\{a_1, a_2, a_4\}.$$

3. 同理, 把它们作为列向量排成矩阵并化简得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而秩为 2, 可取一个极大无关组为

$$\{a_1, a_2\}.$$

#### 作业 5.20 (Ch5 T20)

证明:  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  是  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组, 当且仅当  $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$  且  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  线性无关。

**证明** 先证必要性。若  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  是  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组, 则它本身线性无关。又由极大性知, 对每个  $a_k$ , 把它加入该向量组后必线性相关, 因此  $a_k$  都能由  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  线性表示。故

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \subseteq \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle.$$

反向包含显然成立, 所以两者张成空间相等。

再证充分性。若

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$$

且  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  线性无关, 则对任意不在其中的  $a_k$ , 都有

$$a_k \in \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle,$$

所以把  $a_k$  加入后所得向量组必线性相关。因此  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  既线性无关又不能再添入原向量组中的其它向量保持线性无关, 即为极大无关组。

#### 作业 5.21 (Ch5 T21)

证明: 若向量  $b$  可以由向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性表示, 则  $b$  可以由  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组表示。

**证明** 设  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  是  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的一个极大无关组。由上题知

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle.$$

若  $b$  可以由  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性表示, 则

$$b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle.$$

因而

$$b \in \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle.$$

即  $b$  可以由这个极大无关组线性表示。

#### 作业 5.22 (Ch5 T22)

设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的秩为  $r$ , 则其中任何  $r$  个线性无关的向量构成  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组。

**证明** 设从  $a_1, a_2, \dots, a_m$  中取出的  $r$  个向量是

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r},$$

且它们线性无关。由于原向量组的秩是  $r$ , 所以不可能再从原向量组中添入一个新向量仍保持线性无关, 否则便会得到  $r+1$  个线性无关向量, 与秩为  $r$  矛盾。因此这  $r$  个向量已经是极大的线性无关组。

#### 作业 5.23 (Ch5 T23)

设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的秩为  $r$ , 如  $a_1, a_2, \dots, a_m$  可以由它的  $r$  个向量线性表示, 则这  $r$  个向量构成  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的极大无关组。

**证明** 设这  $r$  个向量为

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}.$$

由题设, 原向量组中每个向量都可以由这  $r$  个向量线性表示, 因此

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \rangle.$$

若  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  线性相关, 则其秩小于  $r$ , 从而原向量组的秩也小于  $r$ , 这与题设矛盾。故这  $r$  个向量线性无关。

于是由上题判定,  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$  构成原向量组的极大无关组。

#### 定理 5.1

设向量  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}^n$ , 则有

1.  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性无关, 当且仅当  $r(a_1, a_2, \dots, a_m) = m$ 。
2.  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性相关, 当且仅当  $r(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$ 。
3.  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  可以用  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  线性表示, 则  $r(b_1, b_2, \dots, b_s) \leq r(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 。

4.  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  与  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  等价, 则  $r(b_1, b_2, \dots, b_s) = r(a_1, a_2, \dots, a_r)$ 。
5. 向量  $b$  可以表示成  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的线性组合, 当且仅当  $r(a_1, a_2, \dots, a_m) = r(a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ 。

#### 作业 5.24 (Ch5 T24)

证明定理 5.1 的 1, 2, 4。

#### 证明

1. 若  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性无关, 则它本身就是一个含有  $m$  个向量的线性无关组, 因此

$$r(a_1, a_2, \dots, a_m) = m.$$

反之, 若

$$r(a_1, a_2, \dots, a_m) = m,$$

由于原向量组总共只有  $m$  个向量, 这说明它本身就是一个含  $m$  个向量的极大无关组, 因此原向量组线性无关。

2. 由 (1) 立即得到: 原向量组线性相关, 当且仅当它不是线性无关, 从而当且仅当

$$r(a_1, a_2, \dots, a_m) < m.$$

3. 若  $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$  与  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  等价, 则它们互相可以线性表示。由定理中的第 (3) 条可知

$$r(b_1, b_2, \dots, b_s) \leq r(a_1, a_2, \dots, a_r),$$

同理

$$r(a_1, a_2, \dots, a_r) \leq r(b_1, b_2, \dots, b_s).$$

故

$$r(b_1, b_2, \dots, b_s) = r(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

#### 作业 5.25 (Ch5 T25)

求下列矩阵的秩, 并求出它的行空间、列空间及零空间的一组基。

1.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

解

## 1. 对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

行化简可得

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而

$$\text{rank}(A) = 3.$$

可取行空间的一组基为

$$(1, 0, 0, -\frac{2}{9}), (0, 1, 0, -\frac{5}{6}), (0, 0, 1, -\frac{49}{36}).$$

由主元列为第 1, 2, 3 列, 可取列空间的一组基为原矩阵的前三列:

$$(3, -1, 2, 4)^\top, (-2, -3, 0, 1)^\top, (0, 2, -4, -2)^\top.$$

令  $x_4 = t$ , 则

$$x_1 = \frac{2}{9}t, \quad x_2 = \frac{5}{6}t, \quad x_3 = \frac{49}{36}t.$$

因此零空间的一组基可取为

$$(8, 30, 49, 36)^\top.$$

## 2. 对矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

行化简可得

$$B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而

$$\text{rank}(B) = 2.$$

可取行空间的一组基为

$$(1, 0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

主元列为第 1, 2 列, 所以列空间的一组基可取为原矩阵的前两列:

$$(3, 1, -1, 4)^\top, (6, 4, -10, -2)^\top.$$

令自由变量  $x_3 = s, x_4 = t$ , 则

$$x_1 = -\frac{5}{3}s - \frac{1}{3}t, \quad x_2 = \frac{2}{3}s - \frac{2}{3}t.$$

故零空间的一组基可取为

$$(-5, 2, 3, 0)^T, (-1, -2, 0, 3)^T.$$

#### 作业 5.26 (Ch5 T26)

证明: 线性方程组  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b$  有解, 当且仅当  $b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ , 当且仅当  $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle$ 。

**证明** “方程组有解”意味着存在系数  $x_1, x_2, \dots, x_m$  使得

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = b.$$

这正说明  $b$  属于  $a_1, a_2, \dots, a_m$  的线性包, 因此

$$\text{方程组有解} \iff b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle.$$

又

$$b \in \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$$

当且仅当把  $b$  添进去以后并不会扩大这个线性包, 即

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m, b \rangle.$$

故三者等价。

#### 作业 5.27 (Ch5 T27)

证明:  $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s) \leq \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s)$ 。

**证明** 设  $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}$  是  $a_1, a_2, \dots, a_r$  的一个极大无关组,  $\{b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q}\}$  是  $b_1, b_2, \dots, b_s$  的一个极大无关组。则

$$p = \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_r), \quad q = \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_s).$$

而向量组

$$a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s$$

中的每个向量都可以由

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}, b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_q}$$

线性表示, 因此其秩不超过  $p + q$ 。故

$$\text{rank}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) \leq p + q = \text{rank}(a_1, \dots, a_r) + \text{rank}(b_1, \dots, b_s).$$

#### 作业 5.28 (Ch5 T28)

证明:  $n$  阶方阵  $A$  可逆  $\iff \text{rank}(A) = n \iff A$  的行向量线性无关  $\iff A$  的列向量线性无关。

**证明** 对  $n$  阶方阵  $A$ :

若  $A$  可逆, 则  $Ax = 0$  只有零解, 因此  $A$  的列向量线性无关, 于是

$$\text{rank}(A) = n.$$

反之, 若  $\text{rank}(A) = n$ , 则  $A$  的列向量组秩为  $n$ , 故  $n$  个列向量线性无关, 从而齐次方程组  $Ax = 0$  只有零解。

这就推出  $A$  可逆。

又因为矩阵的行秩等于列秩，所以

$$\text{rank}(A) = n$$

当且仅当  $A$  的行向量组线性无关，也当且仅当  $A$  的列向量组线性无关。

故四个条件彼此等价。

#### 作业 5.29 (Ch5 T29)

设矩阵  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  的秩为  $r$ ，则  $A$  的不等于零的  $r$  阶子式所在行(列)构成  $A$  的行(列)向量的极大无关组。

**证明** 设  $A$  的某个非零  $r$  阶子式位于第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  行和第  $j_1, j_2, \dots, j_r$  列，记对应的  $r \times r$  子矩阵为

$$\tilde{A}.$$

因为  $\det(\tilde{A}) \neq 0$ ，所以  $\tilde{A}$  的这  $r$  个行向量线性无关。于是原矩阵  $A$  中对应的第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  行也线性无关；否则若原矩阵中的这  $r$  行线性相关，把关系限制到第  $j_1, j_2, \dots, j_r$  列，就会得到  $\tilde{A}$  的行向量线性相关，矛盾。

又因为  $\text{rank}(A) = r$ ，原矩阵任取  $r+1$  行都不可能线性无关，所以这  $r$  行已经是行向量组的极大无关组。

对列向量同理：非零  $r$  阶子式对应的那  $r$  列线性无关，而秩为  $r$  又保证不能再加入新列仍保持线性无关，所以它们构成列向量组的极大无关组。

#### 作业 5.30 (Ch5 T30)

设  $A, B$  是同阶矩阵。证明： $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ 。

**证明** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ， $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为按列分块的表示，则

$$A+B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

因而  $A+B$  的每一列都属于向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

的线性包，所以

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n).$$

再由上题可得

$$\text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

故

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

#### 作业 5.31 (Ch5 T31)

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $\mathbb{F}^n$  的基，向量组  $b_1, b_2, \dots, b_n$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有关系式

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T.$$

证明： $b_1, b_2, \dots, b_n$  为  $\mathbb{F}^n$  的基当且仅当  $T$  为可逆方阵。

**证明** 若  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是  $\mathbb{F}^n$  的基，则矩阵

$$(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

可逆。而

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T,$$

又  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  也是可逆矩阵, 因此

$$T = (a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

可逆。

反过来, 若  $T$  可逆, 则

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T$$

是两个可逆矩阵的乘积, 因此也可逆。故  $b_1, b_2, \dots, b_n$  线性无关且张成  $\mathbb{F}^n$ , 从而构成  $\mathbb{F}^n$  的一组基。

### 定理 5.2

$n$  维数域空间  $\mathbb{F}^n$  中的下列结论成立。

1. 设  $V \subset \mathbb{F}^n$  为  $r$  维子空间, 则  $V$  中任意  $r+1$  个向量线性相关。
2. 设  $V$  为  $r$  维子空间, 则  $V$  中任意  $r$  个线性无关向量为  $V$  的一组基。
3. 设  $U$  与  $V$  为  $\mathbb{F}^n$  的子空间, 且  $U \subseteq V$ , 则  $\dim U \leq \dim V$ 。
4. 设  $U$  与  $V$  为  $\mathbb{F}^n$  的子空间, 且  $U \subseteq V$ , 若  $\dim U = \dim V$ , 则  $U = V$ 。

### 作业 5.32 (Ch5 T32)

证明定理 5.2。

### 证明

1. 设  $V$  是  $r$  维子空间。因为  $V$  中任一组基都只含  $r$  个向量, 所以  $V$  中任意  $r+1$  个向量都不可能线性无关, 故必线性相关。
2. 设  $V$  中有  $r$  个线性无关向量。由于  $V$  的维数就是  $r$ , 所以这  $r$  个向量已经达到子空间中线性无关向量个数的最大值, 从而构成  $V$  的一组基。
3. 若  $U \subseteq V$ , 取  $U$  的一组基  $u_1, u_2, \dots, u_k$ 。因为这些向量都属于  $V$  且在线性关系上保持无关, 所以  $V$  中至少有  $k$  个线性无关向量, 于是

$$\dim U = k \leq \dim V.$$

4. 若  $U \subseteq V$  且  $\dim U = \dim V = r$ , 取  $U$  的一组基  $u_1, u_2, \dots, u_r$ 。这些向量都属于  $V$ , 并且在  $V$  中仍线性无关。由第 (2) 条可知, 它们也是  $V$  的一组基。因此

$$U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle = V.$$

### 定理 5.3

设  $V \subset \mathbb{F}^n$  为  $r$  维子空间。  $a_1, a_2, \dots, a_s \in V$  是  $s (s < r)$  个线性无关的向量。则存在  $V$  中的向量  $a_{s+1}, \dots, a_r$  使得  $a_1, a_2, \dots, a_r$  构成  $V$  的一组基。称  $a_1, a_2, \dots, a_r$  为线性无关组  $a_1, a_2, \dots, a_s$  的一组扩充基。

### 作业 5.33 (Ch5 T33)

证明定理 5.3。

**证明** 若  $s = r$ , 则结论显然成立。以下设  $s < r$ 。

由于  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 若它们已经张成整个  $V$ , 则它们就是  $V$  的一组基, 从而

$$\dim V = s,$$

这与  $\dim V = r > s$  矛盾。因此

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle \subsetneq V.$$

故存在  $a_{s+1} \in V$ , 使得

$$a_{s+1} \notin \langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle.$$

于是  $a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}$  仍线性无关。

若这时向量个数还小于  $r$ , 就可用同样的方法再取  $a_{s+2} \in V$ , 使其不属于前面向量张成的空间, 于是向量组仍保持线性无关。如此继续下去, 经过  $r-s$  步后, 可得到  $V$  中  $r$  个线性无关向量

$$a_1, a_2, \dots, a_r.$$

由定理 5.2 的第 (2) 条知, 这  $r$  个线性无关向量构成  $V$  的一组基。

故总可以把  $a_1, a_2, \dots, a_s$  扩充为  $V$  的一组基。

#### 作业 5.34 (Ch5 T34)

以向量组  $a_1 = (3, 1, 0), a_2 = (6, 3, 2), a_3 = (1, 3, 5)$  为基, 求  $\beta = (2, -1, 2)$  的坐标。

解 设

$$\beta = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3,$$

则

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解得

$$x_1 = -76, \quad x_2 = 41, \quad x_3 = -16.$$

因此  $\beta$  在基  $a_1, a_2, a_3$  下的坐标为

$$[\beta]_{(a_1, a_2, a_3)} = (-76, 41, -16)^\top.$$

#### 作业 5.35 (Ch5 T35)

设  $a_1 = (3, 2, -1, 4), a_2 = (2, 3, 0, -1)$ 。

1. 将  $a_1, a_2$  扩充为  $\mathbb{R}^4$  的一组基;
2. 给出标准基在该组基下的表示;
3. 求  $\beta = (1, 3, 4, -2)$  在该组基下的坐标。

解 取

$$a_3 = (1, 0, 0, 0), \quad a_4 = (0, 1, 0, 0).$$

记

$$P = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算得

$$\det P = 1 \neq 0,$$

因而  $a_1, a_2, a_3, a_4$  构成  $\mathbb{R}^4$  的一组基。

又

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

因此标准基向量在该组基下的坐标分别为  $P^{-1}$  的各列, 即

$$[e_1] = (0, 0, 1, 0)^T, \quad [e_2] = (0, 0, 0, 1)^T, \quad [e_3] = (-1, -4, 11, 14)^T, \quad [e_4] = (0, -1, 2, 3)^T.$$

对

$$\beta = (1, 3, 4, -2)^T,$$

有

$$[\beta] = P^{-1}\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -14 \\ 41 \\ 53 \end{bmatrix}.$$

故  $\beta$  在该组基下的坐标为

$$(-4, -14, 41, 53)^T.$$

#### 作业 5.36 (Ch5 T36)

将三维几何空间中的直角坐标系  $[O; e_1, e_2, e_3]$  绕单位向量  $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  逆时针旋转  $\theta$  角, 求新坐标与原坐标之间的关系。

**解** 设同一点在原坐标系中的坐标为

$$\xi = (x, y, z)^T,$$

在新坐标系中的坐标为

$$\xi' = (x', y', z')^T.$$

先推导绕单位向量  $e$  旋转的 Rodrigues 公式。设任意向量  $v$  绕轴  $e$  主动逆时针旋转  $\theta$  后变成  $v_{\text{rot}}$ 。将  $v$  分解为平行于  $e$  和垂直于  $e$  的两部分:

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}, \quad v_{\parallel} = (e^T v)e, \quad v_{\perp} = v - (e^T v)e.$$

再令

$$w = e \times v.$$

因为  $e \times v_{\parallel} = 0$ , 所以

$$w = e \times v = e \times v_{\perp}.$$

从而  $w$  与  $v_{\perp}$  都垂直于  $e$ , 并且互相垂直, 且

$$|w| = |e| |v_{\perp}| \sin \frac{\pi}{2} = |v_{\perp}|.$$

因此在垂直于  $e$  的平面内,  $v_{\perp}$  旋转  $\theta$  后变为

$$v_{\perp} \cos \theta + w \sin \theta.$$

平行分量在旋转下不变, 所以

$$v_{\text{rot}} = v_{\parallel} + v_{\perp} \cos \theta + w \sin \theta.$$

代入上面的分解, 得

$$\begin{aligned} v_{\text{rot}} &= (e^\top v)e + (v - (e^\top v)e) \cos \theta + (e \times v) \sin \theta \\ &= v \cos \theta + (e \times v) \sin \theta + (1 - \cos \theta)(e^\top v)e. \end{aligned}$$

这就是 Rodrigues 公式。写成矩阵形式即

$$R_e(\theta) = I \cos \theta + [e]_\times \sin \theta + ee^\top (1 - \cos \theta),$$

其中

$$[e]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}, \quad ee^\top = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

题目要求的是坐标系绕轴  $e$  逆时针旋转  $\theta$ , 这是被动变换, 所以应取

$$\xi' = R_e(-\theta)\xi.$$

由上式立刻得到

$$R_e(-\theta) = I \cos \theta - [e]_\times \sin \theta + ee^\top (1 - \cos \theta).$$

从而

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\cos\theta}{3} & \frac{1-\cos\theta}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{1-\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{1+2\cos\theta}{3} & \frac{1-\cos\theta}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\cos\theta}{3} + \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{1-\cos\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{1+2\cos\theta}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + \frac{y-z}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3} (1 - \cos \theta), \\ y' = y \cos \theta + \frac{z-x}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3} (1 - \cos \theta), \\ z' = z \cos \theta + \frac{x-y}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{x+y+z}{3} (1 - \cos \theta). \end{cases}$$

反过来, 原坐标与新坐标的关系为

$$\xi = R_e(\theta)\xi'.$$

### 作业 5.37 (Ch5 T37)

设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  为非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一组解,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  为常数。给出  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s$  为该线性方程组的解的充要条件。

**解** 设

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_s a_s.$$

因为每个  $a_i$  都是方程组  $Ax = b$  的解, 所以

$$Aa_i = b \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

从而

$$Ac = \lambda_1 Aa_1 + \lambda_2 Aa_2 + \dots + \lambda_s Aa_s = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s)b.$$

由于方程组是非齐次的,  $b \neq 0$ 。因此  $c$  仍是该方程组的解, 当且仅当

$$Ac = b,$$

即当且仅当

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s = 1.$$

### 作业 5.38 (Ch5 T38)

给出三个平面  $a_ix + b_iy + c_iz = d_i, i = 1, 2, 3$  相交于一条直线的充要条件。

解 设

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

三个平面相交于一条直线，当且仅当对应线性方程组有解且解集是一维仿射子空间。

对三元一次方程组而言，这等价于它相容且系数矩阵秩为 2。也就是

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2.$$

事实上，若三平面交于一条直线，则解集维数为 1，故

$$3 - \text{rank}(A) = 1,$$

从而  $\text{rank}(A) = 2$ ，且因为有解，必有  $\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A})$ 。反之，若

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2,$$

则方程组有解，且解空间自由度为  $3 - 2 = 1$ ，故公共解集恰为一条直线。

因此充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = 2.$$

### 作业 5.39 (Ch5 T39)

求下列齐次线性方程组的基础解系与通解

1.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases}$$

解

1. 系数矩阵行化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令自由变量  $x_3 = s, x_4 = t$ , 则

$$x_2 = \frac{3}{14}s - \frac{1}{2}t, \quad x_1 = -\frac{5}{14}s + \frac{1}{2}t.$$

故通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

可取基础解系为

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. 系数矩阵行化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令自由变量  $x_4 = s, x_5 = t$ , 则

$$x_1 = -s + 2t, \quad x_2 = -s + 2t, \quad x_3 = s.$$

因而通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

可取基础解系为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 5.40 (Ch5 T40)

已知  $\mathbb{R}^5$  中向量  $a_1 = (1, 2, 3, 2, 1)^\top$  及  $a_2 = (1, 3, 2, 1, 2)^\top$ , 求找一个齐次线性方程组使得  $a_1$  与  $a_2$  为该方程组的基础解系。

解 取齐次线性方程组

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

它的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

直接验证可得

$$Aa_1 = 0, \quad Aa_2 = 0.$$

又因为  $A$  的前三列构成的  $3 \times 3$  子式

$$\det \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0,$$

所以  $\text{rank}(A) = 3$ 。因此该齐次方程组的解空间维数为

$$5 - 3 = 2.$$

由于  $a_1, a_2$  线性无关, 且都属于解空间, 所以它们恰构成该方程组的一组基础解系。

#### 作业 5.41 (Ch5 T41)

判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间

1.  $V$  是所有实数对  $(x, y)$  的集合, 数域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。定义

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (x, y).$$

2.  $V$  是所有满足  $f(-1) = 0$  的实函数的集合, 数域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法。
3.  $V$  是所有满足  $f(0) \neq 0$  的实函数的集合, 数域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 。定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法。
4.  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上所有  $n$  阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘。

解

1. 不构成线性空间。因为对向量  $(1, 0)$ , 有

$$(1+1)(1, 0) = (1, 0),$$

但

$$1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 0) = (1, 0) + (1, 0) = (2, 0),$$

不满足数乘对标量加法的分配律。

2. 构成线性空间。因为零函数满足  $0(-1) = 0$ , 且若  $f(-1) = g(-1) = 0$ , 则

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 0,$$

对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$  也有

$$(\lambda f)(-1) = \lambda f(-1) = 0.$$

故该集合对加法和数乘封闭, 是函数空间的子空间。

3. 不构成线性空间。例如  $f(x) \equiv 1$  与  $g(x) \equiv -1$  都属于该集合, 但

$$(f+g)(x) \equiv 0,$$

而 0 不满足  $f(0) \neq 0$ , 故对加法不封闭。

4. 不构成线性空间。因为可逆矩阵集合不含零矩阵, 而线性空间必须含零向量; 或者取任意可逆矩阵  $A$ , 则  $A, -A$  都可逆, 但

$$A + (-A) = 0$$

不可逆, 故对加法不封闭。

#### 作业 5.42 (Ch5 T42)

设  $V$  是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间, 判断  $V$  中下列函数组是否线性相关。

1.  $1, x, \sin x$ ;
2.  $1, x, e^x$ ;
3.  $1, \cos 2x, \cos^2 x$ ;
4.  $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$ ;
5.  $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos(nx)$ 。

解

1.  $1, x, \sin x$  线性无关。若

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 \sin x \equiv 0,$$

令  $x=0$  得  $\lambda_1=0$ ; 令  $x=\pi$  得  $\lambda_2=0$ ; 再令  $x=\frac{\pi}{2}$  得  $\lambda_3=0$ 。

2.  $1, x, e^x$  线性无关。若

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x \equiv 0,$$

两边求导得

$$\lambda_2 + \lambda_3 e^x \equiv 0,$$

再求一次导数得

$$\lambda_3 e^x \equiv 0.$$

故  $\lambda_3=0$ , 进而  $\lambda_2=0, \lambda_1=0$ 。

3.  $1, \cos 2x, \cos^2 x$  线性相关。因为恒等式

$$1 + \cos 2x - 2 \cos^2 x \equiv 0$$

成立。

4.  $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$  线性相关。因为

$$2 + 6x^2 + (x-1)^3 - (x+1)^3 \equiv 0.$$

5.  $\cos x, \cos 2x, \dots, \cos(nx)$  线性无关。由余弦倍角公式递推可知, 对每个  $k$ ,  $\cos(kx)$  都是  $\cos x$  的  $k$  次多项式, 且最高次项系数非零。若

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos(nx) \equiv 0,$$

令  $t = \cos x$ , 便得到一个关于  $t$  的多项式恒等于零。比较最高次项系数可先得  $\lambda_n=0$ , 依次下去得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

故这组函数线性无关。

#### 定理 5.4

设  $S$  与  $T$  是线性空间  $V$  的两个向量组。则

1.  $T$  是  $S$  的线性组合, 当且仅当  $\langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle$ 。
2.  $U$  是  $T$  的线性组合,  $T$  是  $S$  的线性组合, 则  $U$  是  $S$  的线性组合。
3.  $S$  与  $T$  等价, 当且仅当  $\langle S \rangle = \langle T \rangle$ 。
4.  $U$  与  $T$  等价,  $T$  与  $S$  等价, 则  $U$  与  $S$  等价。



#### 作业 5.43 (Ch5 T43)

证明定理 5.4。



#### 证明

1. 若  $T$  是  $S$  的线性组合, 则  $T$  中每个向量都属于  $\langle S \rangle$ , 所以

$$\langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle.$$

反之, 若  $\langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle$ , 则  $T$  中每个向量都属于  $\langle S \rangle$ , 即都可以由  $S$  线性表示, 所以  $T$  是  $S$  的线性组合。

2. 若  $U$  是  $T$  的线性组合,  $T$  是  $S$  的线性组合, 则由 (1) 知

$$\langle U \rangle \subseteq \langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle.$$

再由 (1) 得  $U$  是  $S$  的线性组合。

3.  $S$  与  $T$  等价, 按定义是指它们互相可以线性表示。由 (1) 这等价于

$$\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle, \quad \langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle,$$

即

$$\langle S \rangle = \langle T \rangle.$$

4. 若  $U$  与  $T$  等价,  $T$  与  $S$  等价, 则由 (3) 有

$$\langle U \rangle = \langle T \rangle, \quad \langle T \rangle = \langle S \rangle.$$

从而

$$\langle U \rangle = \langle S \rangle.$$

再由 (3) 知  $U$  与  $S$  等价。

#### 作业 5.44 (Ch5 T44)

设  $\mathbb{F}_n[x]$  是次数小于或等于  $n$  的多项式全体构成的线性空间。

1. 证明:  $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\}$  构成  $\mathbb{F}_n[x]$  的一组基;
2. 求  $S$  到基  $T = \{1, x, \dots, x^n\}$  的过渡矩阵;
3. 求多项式  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$  在基  $S$  下的坐标。



#### 解

1. 因为  $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$ , 只需证明  $S$  线性无关。设

$$c_0 + c_1(x-1) + \dots + c_n(x-1)^n \equiv 0.$$

对上式连续求导, 并令  $x=1$ , 依次得到

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \dots, \quad c_n = 0.$$

故  $S$  线性无关, 从而  $S$  构成  $\mathbb{F}_n[x]$  的一组基。

2. 设过渡矩阵为  $P_{T \leftarrow S}$ , 即满足

$$[f]_T = P_{T \leftarrow S} [f]_S.$$

由二项式展开

$$(x-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} x^i, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

得

$$P_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 设

$$p(x) = b_0 + b_1(x-1) + \cdots + b_n(x-1)^n,$$

则  $b_i$  正是  $p(x)$  在  $x=1$  处的 Taylor 展开系数, 所以

$$b_i = \frac{p^{(i)}(1)}{i!} = \sum_{j=i}^n a_j \binom{j}{i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

因此

$$[p(x)]_S = (b_0, b_1, \dots, b_n)^\top, \quad b_i = \sum_{j=i}^n a_j \binom{j}{i}.$$

#### 作业 5.45 (Ch5 T45)

$V$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶对称方阵的全体, 定义加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘。证明:  $V$  是线性空间, 并求  $V$  的一组基及维数。

**解** 对任意  $A, B \in V$  及  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ , 有

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top = \lambda A + \mu B,$$

因此  $\lambda A + \mu B \in V$ , 故  $V$  对加法和数乘封闭, 是  $\mathbb{F}^{n \times n}$  的子空间, 从而本身是线性空间。

任意对称矩阵  $A = (a_{ij})$  都可唯一写成

$$A = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}).$$

因此可取一组基为

$$\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

这组基共有

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

个向量, 故

$$\dim V = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### 作业 5.46 (Ch5 T46)

给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

令  $V$  是与  $A$  乘法可交换的三阶实方阵的全体。证明:  $V$  在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求  $V$  的一组基与维数。

解 设

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \in V.$$

对任意  $B, C \in V$  及  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 有

$$(\lambda B + \mu C)A = \lambda BA + \mu CA = \lambda AB + \mu AC = A(\lambda B + \mu C),$$

因此  $\lambda B + \mu C \in V$ , 故  $V$  是  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  的子空间。

再由条件  $AB = BA$  直接解得,  $B$  必可写成

$$B = \begin{bmatrix} x+4z & -2z & y+z \\ y & x & z \\ 4y+2z & -2y-2z & x+y+5z \end{bmatrix} = xI + yA + zA^2,$$

其中  $x, y, z \in \mathbb{R}$  任意。故

$$V = \langle I, A, A^2 \rangle.$$

又若

$$\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0,$$

比较矩阵的 (2, 1)、(1, 2)、(2, 2) 元, 得

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = 0.$$

所以  $I, A, A^2$  线性无关。

因此  $V$  的一组基可取为

$$I, A, A^2,$$

且

$$\dim V = 3.$$

### 作业 5.47 (Ch5 T47)

$V = \mathbb{F}^{n \times n}$  是数域  $\mathbb{F}$  上所有  $n$  阶矩阵构成的线性空间, 令  $W$  是数域  $\mathbb{F}$  上所有满足  $\text{tr}(A) = 0$  的  $n$  阶矩阵的全体。证明:  $W$  是  $V$  的线性子空间, 并求  $W$  的一组基与维数。

解 对任意  $A, B \in W$  及  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ , 有

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) = 0,$$

故  $\lambda A + \mu B \in W$ , 从而  $W$  是  $V$  的线性子空间。

对任意  $A = (a_{ij}) \in W$ , 由  $\text{tr}(A) = 0$  可知

$$a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}.$$

因而

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}(E_{ii} - E_{nn}) + \sum_{i \neq j} a_{ij}E_{ij}.$$

所以可取  $W$  的一组基为

$$\{E_{ii} - E_{nn} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{E_{ij} \mid i \neq j\}.$$

这组基的个数为

$$(n-1) + n(n-1) = n^2 - 1.$$

因此

$$\dim W = n^2 - 1.$$

### 定理 5.5

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \dots, \beta_s$  是线性空间  $V$  的两个向量组。则有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle + \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle.$$

### 作业 5.48 (Ch5 T48)

证明定理 5.5。

**证明** 先证

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle + \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle \subseteq \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle.$$

任取左端中的向量  $v$ , 则存在

$$u \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle, \quad w \in \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle$$

使得  $v = u + w$ 。而  $u$  是  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  的线性组合,  $w$  是  $\beta_1, \dots, \beta_s$  的线性组合, 所以  $v$  就是

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$$

的线性组合, 即  $v$  属于右端。

再证反向包含。任取

$$v \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle,$$

则存在系数使得

$$v = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s.$$

令

$$u = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle,$$

$$w = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_s \beta_s \in \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle,$$

则  $v = u + w$ , 故  $v$  属于左端。

两边互相包含, 所以

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle + \langle \beta_1, \dots, \beta_s \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle.$$

**作业 5.49 (Ch5 T49)**

证明: 有限维线性空间的任何子空间都有补空间。

**证明** 设  $U$  是有限维线性空间  $V$  的一个子空间, 取  $U$  的一组基

$$u_1, u_2, \dots, u_r.$$

由扩充基定理, 可将其扩充为  $V$  的一组基

$$u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_s.$$

令

$$W = \langle w_1, w_2, \dots, w_s \rangle.$$

下面证明  $W$  就是  $U$  的一个补空间。

任取  $v \in V$ , 由上述基的表示唯一性, 存在唯一的系数使得

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^s \beta_j w_j.$$

记

$$u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in U, \quad w = \sum_{j=1}^s \beta_j w_j \in W,$$

则  $v = u + w$ , 故

$$V = U + W.$$

若  $x \in U \cap W$ , 则一方面

$$x = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i,$$

另一方面

$$x = \sum_{j=1}^s \beta_j w_j.$$

两式相减得

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i u_i - \sum_{j=1}^s \beta_j w_j = 0.$$

由于

$$u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_s$$

线性无关, 只能有一切系数都为零, 从而  $x = 0$ 。因此

$$U \cap W = \{0\}.$$

于是

$$V = U \oplus W,$$

即  $W$  是  $U$  的补空间。

**作业 5.50 (Ch5 T50)**

令  $\mathbb{F}_n[x]$  是数域  $\mathbb{F}$  上次数不超过  $n$  的多项式全体按多项式的加法与数乘构成的线性空间,  $W_1$  是  $\mathbb{F}_n[x]$  的偶多项式 (满足  $f(-x) = f(x)$ ) 全体,  $W_2$  是  $\mathbb{F}_n[x]$  奇多项式 (满足  $f(-x) = -f(x)$ ) 全体。证明:  $W_1, W_2$  是

$\mathbb{F}_n[x]$  的子空间, 且  $\mathbb{F}_n[x] = W_1 \oplus W_2$ 。



**证明** 先证  $W_1, W_2$  都是子空间。

若  $f, g \in W_1, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ , 则

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

所以  $\lambda f + \mu g \in W_1$ 。故  $W_1$  是子空间。

同理, 若  $f, g \in W_2$ , 则

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = -\lambda f(x) - \mu g(x) = -(\lambda f + \mu g)(x),$$

因而  $\lambda f + \mu g \in W_2$ , 故  $W_2$  也是子空间。

再证直和分解。对任意  $f(x) \in \mathbb{F}_n[x]$ , 令

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

则  $f_1 \in W_1, f_2 \in W_2$ , 且

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

因此

$$\mathbb{F}_n[x] = W_1 + W_2.$$

若  $f(x) \in W_1 \cap W_2$ , 则同时有

$$f(-x) = f(x), \quad f(-x) = -f(x).$$

相减得  $2f(x) = 0$ , 故  $f(x) = 0$ 。于是

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

所以

$$\mathbb{F}_n[x] = W_1 \oplus W_2.$$

## 第六章 线性变换

### 作业 6.1 (Ch6 T1)

判断下面所定义的变换  $\mathcal{A}$ ，哪些是线性的，哪些不是线性的。

1. 在  $\mathbb{R}^2$  中， $\mathcal{A}(x, y)^\top = (x + y, x^2)^\top$ ;
2. 在  $\mathbb{R}^3$  中， $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (3x - 2y + z, 0, x + 2y)^\top$ ;
3. 在  $\mathbb{R}^3$  中， $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (x - y, z, x + 1)^\top$ 。

解

1. 不是线性变换，因为第二个分量含有  $x^2$  项，不满足齐次性。例如

$$\mathcal{A}(2, 0)^\top = (2, 4)^\top \neq 2(1, 1)^\top = 2\mathcal{A}(1, 0)^\top.$$

2. 是线性变换，因为

$$\mathcal{A}(x, y, z)^\top = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

3. 不是线性变换，因为

$$\mathcal{A}(0, 0, 0)^\top = (0, 0, 1)^\top \neq 0,$$

而线性变换必须把零向量映成零向量。

### 作业 6.2 (Ch6 T2)

给定  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $\mathcal{A}(x, y)^\top = (2x - y, x + y)^\top$ 。绘制图形，观察  $\mathcal{A}$  将四边形网格变成什么图形？将单位圆变成什么图形？

解 线性变换  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

它把标准基向量变为

$$\mathcal{A}(e_1) = (2, 1)^\top, \quad \mathcal{A}(e_2) = (-1, 1)^\top.$$

因而矩形网格会变成以  $(2, 1)^\top$  和  $(-1, 1)^\top$  为两组边方向的平行四边形网格。

若把像空间中的坐标记为  $(u, v)^\top = \mathcal{A}(x, y)^\top$ ，则直线族  $x = c$  的像满足

$$u + v = 3c,$$

直线族  $y = c$  的像满足

$$u - 2v = -3c,$$

所以它们确实构成两族平行直线。

再看单位圆  $x^2 + y^2 = 1$ 。由

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

得

$$x = \frac{u+v}{3}, \quad y = \frac{-u+2v}{3}.$$

代入  $x^2 + y^2 = 1$ , 得

$$\left(\frac{u+v}{3}\right)^2 + \left(\frac{-u+2v}{3}\right)^2 = 1,$$

即

$$2u^2 - 2uv + 5v^2 = 9.$$

这是一个椭圆, 所以单位圆在  $\mathcal{A}$  下变成椭圆。

### 作业 6.3 (Ch6 T3)

在平面直角坐标系中, 求关于直线  $\sin(\theta)x - \cos(\theta)y = 0$  的对称变换。

**解** 该直线的方向向量可取为

$$u = (\cos \theta, \sin \theta)^\top,$$

它已是单位向量。对任意向量

$$v = (x, y)^\top,$$

在直线上的投影为

$$p = (v \cdot u)u = (x \cos \theta + y \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta)^\top.$$

关于此直线对称后, 向量变为

$$v' = 2p - v.$$

因而

$$v' = \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - 1 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin^2 \theta - 1 \end{bmatrix} v.$$

利用倍角公式可写成

$$v' = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} v.$$

所求对称变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

### 作业 6.4 (Ch6 T4)

求  $\mathbb{R}^2$  中如下线性变换  $\mathcal{A}$ :  $\mathcal{A}$  沿方向  $(2, 1)$  拉伸 2 倍, 沿方向  $(1, -2)$  压缩 2 倍。

**解** 设

$$v_1 = (2, 1)^\top, \quad v_2 = (1, -2)^\top.$$

因为

$$v_1 \cdot v_2 = 2 - 2 = 0,$$

所以  $v_1, v_2$  线性无关, 构成  $\mathbb{R}^2$  的一组基。题意给出

$$\mathcal{A}(v_1) = 2v_1, \quad \mathcal{A}(v_2) = \frac{1}{2}v_2.$$

因而在基  $\{v_1, v_2\}$  下,  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$P = (v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

则标准基下的矩阵为

$$A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

所求线性变换即

$$\mathcal{A}(x, y)^T = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.5 (Ch6 T5)

证明:  $\mathbb{R}^2$  上的可逆线性变换可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。

**证明** 设  $\mathcal{A}$  是  $\mathbb{R}^2$  上的可逆线性变换。考虑单位圆

$$x^2 + y^2 = 1$$

在  $\mathcal{A}$  下的像。由于  $\mathcal{A}$  可逆, 单位圆的像是一条椭圆。

取这条椭圆的长、短半轴方向在原单位圆上的对应单位向量为  $u_1, u_2$ , 则  $u_1, u_2$  互相垂直; 而  $\mathcal{A}(u_1), \mathcal{A}(u_2)$  分别落在椭圆的主轴方向上, 所以它们也互相垂直。

设  $R_1$  是把标准正交基  $e_1, e_2$  旋转到  $u_1, u_2$  的旋转变换, 设  $R_2$  是把  $\mathcal{A}(u_1), \mathcal{A}(u_2)$  的方向旋转到坐标轴方向的旋转变换, 则

$$R_2 \mathcal{A} R_1^{-1}$$

把  $e_1, e_2$  分别变成坐标轴方向上的向量, 因此它的矩阵必为

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha\beta \neq 0.$$

这个对角矩阵表示沿坐标轴的伸缩; 若  $\alpha$  或  $\beta$  为负, 则它同时包含关于坐标轴的反射。

因而

$$\mathcal{A} = R_2^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} R_1,$$

即  $\mathbb{R}^2$  上的可逆线性变换都可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射与旋转变换的复合。

#### 作业 6.6 (Ch6 T6)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于平面  $x + 2y + 3z = 0$  的对称变换。

**解** 平面  $x + 2y + 3z = 0$  的法向量为

$$n = (1, 2, 3)^T,$$

相应单位法向量为

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T.$$

对任意向量  $v$ , 关于该平面的镜面对称变换为

$$v' = v - 2(v \cdot \hat{n})\hat{n} = (I - 2\hat{n}\hat{n}^T)v.$$

因而所求矩阵为

$$I - 2\hat{n}\hat{n}^T = I - \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.7 (Ch6 T7)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求关于直线  $z = 2y = 3x$  的对称变换。

**解** 直线  $z = 2y = 3x$  的方向向量可取为

$$e = (2, 3, 6)^T,$$

相应单位方向向量为

$$\hat{e} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)^T.$$

对任意向量  $v$ , 分解为

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}, \quad v_{\parallel} = (v \cdot \hat{e})\hat{e}.$$

关于该直线对称后, 平行分量不变, 垂直分量变号, 所以

$$v' = v_{\parallel} - v_{\perp} = 2v_{\parallel} - v = (2\hat{e}\hat{e}^T - I)v.$$

因而所求变换矩阵为

$$2\hat{e}\hat{e}^T - I = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} -41 & 12 & 24 \\ 12 & -31 & 36 \\ 24 & 36 & 23 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.8 (Ch6 T8)

在三维几何空间的直角坐标系中, 求绕单位向量  $e = (1, -1, 1)^T$  逆时针旋转  $30^\circ$  角的变换。

**解** 旋转轴只与方向有关, 因此先把题中的方向向量单位化, 取

$$\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T.$$

由 Rodrigues 公式, 绕单位向量  $\hat{e}$  旋转角  $\theta$  的矩阵为

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta)\hat{e}\hat{e}^T + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -\hat{e}_3 & \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 & 0 & -\hat{e}_1 \\ -\hat{e}_2 & \hat{e}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

代入

$$\theta = 30^\circ, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2},$$

可得

$$R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & -1 & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

故所求旋转变换为

$$\mathcal{A}(x, y, z)^\top = R(x, y, z)^\top.$$

#### 作业 6.9 (Ch6 T9)

求  $\mathbb{R}^3$  中如下线性变换  $\mathcal{A}$ :  $\mathcal{A}$  沿方向  $(1, 1, 0)$  拉伸 2 倍, 沿方向  $(1, -1, 1)$  压缩 2 倍, 沿方向  $(1, -1, -2)$  拉伸 3 倍。

解 设

$$v_1 = (1, 1, 0)^\top, \quad v_2 = (1, -1, 1)^\top, \quad v_3 = (1, -1, -2)^\top.$$

它们线性无关, 且题意说明

$$\mathcal{A}(v_1) = 2v_1, \quad \mathcal{A}(v_2) = \frac{1}{2}v_2, \quad \mathcal{A}(v_3) = 3v_3.$$

因而在基  $\{v_1, v_2, v_3\}$  下,  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$\text{diag}\left(2, \frac{1}{2}, 3\right).$$

令

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

则标准基下的矩阵为

$$A = P \text{diag}\left(2, \frac{1}{2}, 3\right) P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}.$$

因此所求线性变换为

$$\mathcal{A}(x, y, z)^\top = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.10 (Ch6 T10)

证明: 三维几何空间中的可逆线性变换将平面变为平面, 平行平面变为平行平面。

**证明** 设  $\mathcal{A}$  是三维几何空间中的可逆线性变换。任取一个平面  $\Pi$ , 可写成

$$\Pi = p_0 + \text{span}\{u, v\},$$

其中  $u, v$  线性无关。对任意点  $p \in \Pi$ , 有

$$p = p_0 + \alpha u + \beta v.$$

于是

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(p_0) + \alpha \mathcal{A}(u) + \beta \mathcal{A}(v).$$

这说明

$$\mathcal{A}(\Pi) = \mathcal{A}(p_0) + \text{span}\{\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(v)\}.$$

因为  $\mathcal{A}$  可逆, 所以它保持线性无关性, 故  $\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(v)$  仍线性无关, 于是  $\mathcal{A}(\Pi)$  仍是一个平面。

若两个平面  $\Pi_1, \Pi_2$  平行, 则它们有相同的方向空间, 可写成

$$\Pi_1 = p_1 + \text{span}\{u, v\}, \quad \Pi_2 = p_2 + \text{span}\{u, v\}.$$

于是

$$\mathcal{A}(\Pi_1) = \mathcal{A}(p_1) + \text{span}\{\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(v)\},$$

$$\mathcal{A}(\Pi_2) = \mathcal{A}(p_2) + \text{span}\{\mathcal{A}(u), \mathcal{A}(v)\}.$$

两个像平面有相同的方向空间, 因此仍互相平行。

所以三维几何空间中的可逆线性变换将平面变为平面, 也将平行平面变为平行平面。

#### 作业 6.11 (Ch6 T11)

给定  $\mathbb{R}^3$  中的线性变换  $\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (2x + y - z, x + 2y + z, 4x + 5y + z)^\top$ 。求  $\mathcal{A}$  的像空间与核空间的维数及一组基。

**解** 在线性空间的标准基下,  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

它的列向量为

$$\alpha_1 = (2, 1, 4)^\top, \quad \alpha_2 = (1, 2, 5)^\top, \quad \alpha_3 = (-1, 1, 1)^\top.$$

注意到

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1,$$

而  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 所以

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

故

$$\dim \text{Im } \mathcal{A} = 2,$$

可取像空间的一组基为

$$(2, 1, 4)^\top, \quad (1, 2, 5)^\top.$$

再求核空间。解方程

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

得

$$(x, y, z) = t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

因此

$$\ker \mathcal{A} = \text{span}\{(1, -1, 1)^\top\}, \quad \dim \ker \mathcal{A} = 1.$$

### 作业 6.12 (Ch6 T12)

证明：从高维数组空间到低维数组空间的投影变换不是可逆变换。

**证明** 设投影变换

$$\pi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad n > m,$$

是从高维数组空间到低维数组空间的投影。投影必然会丢掉至少一个方向上的信息，因此存在非零向量被它映到零向量。以标准坐标投影为例，

$$\pi(x_1, \dots, x_n)^T = (x_1, \dots, x_m)^T,$$

则

$$\pi(0, \dots, 0, 1)^T = 0.$$

这说明  $\ker \pi \neq \{0\}$ 。

但可逆线性变换必须是单射，而线性变换单射当且仅当核空间为零空间。由于  $\ker \pi \neq \{0\}$ ，故该投影变换不是可逆变换。

### 作业 6.13 (Ch6 T13)

求下列矩阵的全部特征值和特征向量

1.  $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix};$

2.  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix};$

3.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

4.  $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix};$

5.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$

6.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

**解**

1. 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + a^2.$$

在复数域上, 特征值为

$$\lambda_1 = ai, \quad \lambda_2 = -ai.$$

对  $\lambda_1 = ai$ , 特征向量可取

$$(-i, 1)^\top;$$

对  $\lambda_2 = -ai$ , 特征向量可取

$$(i, 1)^\top.$$

2. 设

$$B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta}).$$

因而特征值为

$$e^{i\theta}, \quad e^{-i\theta}.$$

对应特征向量可分别取为

$$(i, 1)^\top, \quad (-i, 1)^\top.$$

3. 设

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - C) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以特征值为

$$1(\text{二重}), \quad -1.$$

对  $\lambda = 1$ , 特征向量空间为

$$\text{span}\{(1, 0, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top\}.$$

对  $\lambda = -1$ , 特征向量空间为

$$\text{span}\{(1, 0, -1)^\top\}.$$

4. 设

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - D) = (\lambda - 2)^3.$$

因而唯一特征值为

$$\lambda = 2$$

(三重)。解  $(2I - D)x = 0$  得特征向量空间为

$$\text{span}\{(1, 1, 1)^\top, (-1, 0, 1)^\top\}.$$

5. 设

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - E) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2.$$

所以特征值为

$$4, \quad 1(\text{二重}).$$

对  $\lambda = 4$ , 特征向量空间为

$$\text{span}\{(1, 1, 1)^\top\}.$$

对  $\lambda = 1$ , 特征向量空间为

$$\text{span}\{(-1, 1, 0)^\top, (-1, 0, 1)^\top\}.$$

6. 设

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

则

$$\det(\lambda I - F) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 2).$$

因而特征值为

$$2(\text{二重}), \quad \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}.$$

对  $\lambda = 2$ , 特征向量空间可取为

$$\text{span}\{(1, 0, 0, 1)^\top, (1, 0, 1, 0)^\top\}.$$

对  $\lambda = \sqrt{2}$ , 特征向量可取为

$$(1, -1, -1, 1 + \sqrt{2})^\top.$$

对  $\lambda = -\sqrt{2}$ , 特征向量可取为

$$(1, -1, -1, 1 - \sqrt{2})^\top.$$

**作业 6.14 (Ch6 T14)**

给定  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $\mathcal{A}(x, y)^\top = (3x + 2y, 2x + y)^\top$ 。将单位圆  $C$  映射为椭圆  $C'$ 。求椭圆  $C'$  的长短半轴方向与长度，以及椭圆的面积。

**解** 线性变换  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于  $A$  是实对称矩阵，它的特征向量彼此正交，并给出椭圆的主轴方向。

先求特征值：

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

解得

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

对应特征向量可取为

$$p_1 = \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^\top, \quad p_2 = \left(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\top.$$

因而椭圆  $C'$  的长、短半轴方向分别是  $p_1, p_2$  的方向。

由于单位圆半径为 1，沿特征方向的半轴长度分别为特征值绝对值，即

$$\text{长半轴长} = 2 + \sqrt{5}, \quad \text{短半轴长} = \sqrt{5} - 2.$$

若写成整条轴长，则分别为

$$4 + 2\sqrt{5}, \quad 2\sqrt{5} - 4.$$

最后，面积按  $|\det A|$  缩放，而

$$\det A = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1,$$

故椭圆面积为

$$|\det A| \cdot \pi = \pi.$$

**作业 6.15 (Ch6 T15)**

设  $A$  是可逆方阵。证明：若  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值，则  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值，且对应的特征向量相同。

**证明** 设  $\lambda$  是  $A$  的特征值， $x \neq 0$  是对应的特征向量，则

$$Ax = \lambda x.$$

因为  $A$  可逆，两边同乘以  $A^{-1}$ ，得

$$x = \lambda A^{-1}x.$$

故

$$A^{-1}x = \lambda^{-1}x.$$

这说明  $\lambda^{-1}$  是  $A^{-1}$  的特征值，且对应的特征向量仍为  $x$ 。

**作业 6.16 (Ch6 T16)**

设  $A$  为方阵,  $f(\lambda)$  为多项式。证明: 如果  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值, 则  $f(\lambda_0)$  是  $f(A)$  的特征值; 且如果  $x$  是属于  $\lambda_0$  的特征向量, 则  $x$  也是矩阵  $f(A)$  的属于特征值  $f(\lambda_0)$  的特征向量。

**证明** 设

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n.$$

若  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值,  $x \neq 0$  是对应特征向量, 则

$$Ax = \lambda_0 x.$$

于是对任意正整数  $k$ , 有

$$A^k x = \lambda_0^k x.$$

从而

$$f(A)x = (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n)x = (a_0 + a_1 \lambda_0 + \cdots + a_n \lambda_0^n)x = f(\lambda_0)x.$$

因此  $f(\lambda_0)$  是  $f(A)$  的特征值, 而  $x$  仍是  $f(A)$  属于特征值  $f(\lambda_0)$  的特征向量。

**作业 6.17 (Ch6 T17)**

设三阶方阵  $A$  的特征多项式为  $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ 。求方阵  $3A + 2I$  的特征值与行列式。

**解** 由特征多项式

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

可知  $A$  的特征值为

$$1, 1, 2.$$

因而  $3A + 2I$  的特征值分别为

$$3 \cdot 1 + 2 = 5, \quad 3 \cdot 1 + 2 = 5, \quad 3 \cdot 2 + 2 = 8.$$

所以  $3A + 2I$  的特征值为

$$5, 5, 8.$$

它的行列式等于全部特征值之积, 即

$$\det(3A + 2I) = 5 \cdot 5 \cdot 8 = 200.$$

**作业 6.18 (Ch6 T18)**

1. 若  $A^2 = I$ , 证明:  $A$  的特征值只能是  $\pm 1$ ;
2. 设  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $A^T = -A$ , 证明  $A$  的特征值为零或纯虚数。

**证明**

1. 设  $\lambda$  是  $A$  的特征值,  $x \neq 0$  是对应特征向量, 则

$$Ax = \lambda x.$$

两边再作用一次  $A$ , 得

$$A^2 x = \lambda^2 x.$$

由  $A^2 = I$ , 可知

$$x = \lambda^2 x,$$

即

$$(\lambda^2 - 1)x = 0.$$

由于  $x \neq 0$ , 故

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

从而

$$\lambda = \pm 1.$$

2. 设  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值,  $x \neq 0$  是对应的复特征向量, 则

$$Ax = \lambda x.$$

左乘  $x^*$ , 得

$$x^* Ax = \lambda x^* x.$$

又因为  $A^T = -A$ , 而  $A$  为实矩阵, 所以

$$A^* = -A.$$

对上式取共轭, 得到

$$\overline{x^* Ax} = x^* A^* x = -x^* Ax.$$

另一方面,

$$\overline{x^* Ax} = \bar{\lambda} x^* x.$$

因而

$$\bar{\lambda} x^* x = -\lambda x^* x.$$

由于  $x \neq 0$ , 故  $x^* x > 0$ , 于是

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0.$$

这说明  $\lambda$  的实部为 0, 故  $\lambda$  为零或纯虚数。

#### 作业 6.19 (Ch6 T19)

设  $\lambda_1, \lambda_2$  是方阵  $A$  的两个不同的特征值,  $x_1, x_2$  是分别属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量。证明:  $x_1 + x_2$  不是  $A$  的特征向量。

**证明** 反设  $x_1 + x_2$  是  $A$  的特征向量, 设对应特征值为  $\lambda$ , 则

$$A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2).$$

另一方面, 由

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2,$$

得

$$A(x_1 + x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

故

$$(\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0.$$

由于属于不同特征值的特征向量线性无关, 所以

$$\lambda_1 - \lambda = 0, \quad \lambda_2 - \lambda = 0.$$

从而  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 与题设矛盾。

因此  $x_1 + x_2$  不是  $A$  的特征向量。

#### 作业 6.20 (Ch6 T20)

设  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  的全部特征值为  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 证明

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

**证明** 方阵  $A^2$  的全部特征值为

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2.$$

因而

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \text{tr}(A^2).$$

又由矩阵乘法定义,

$$(A^2)_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

对  $i$  求和得

$$\text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}.$$

#### 作业 6.21 (Ch6 T21)

判断以下矩阵  $A, B$  是否相似? 请说明理由。

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**解**

1. 不相似。令

$$N_A = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_B = B - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$N_A^2 = 0, \quad N_B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

若  $A, B$  相似, 则  $N_A, N_B$  也相似, 从而它们的平方应同时为零或同时非零, 这与上式矛盾。因此  $A, B$  不相似。

2. 不相似。令

$$M_A = A - I, \quad T = P^{-1}Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$M_A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad M_B^2 = 0.$$

同理, 若  $A, B$  相似, 则  $M_A, M_B$  应相似, 不可能出现平方一个为零一个不为零。故  $A, B$  不相似。

#### 作业 6.22 (Ch6 T22)

求三阶可逆方阵  $P$  使得

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$



**解** 取置换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为  $P^{-1} = P^T$ , 直接计算可得

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

因此所求可逆矩阵可取为上式中的  $P$ 。

#### 作业 6.23 (Ch6 T23)

设  $A, B$  为同阶方阵, 且  $A$  可逆。证明:  $AB$  与  $BA$  相似。



**证明** 因为  $A$  可逆, 有

$$A(BA)A^{-1} = AB.$$

这正说明  $AB$  与  $BA$  相似。

#### 作业 6.24 (Ch6 T24)

设  $A$  与  $B$  相似,  $C$  与  $D$  相似。证明:  $\text{diag}(A, C)$  与  $\text{diag}(B, D)$  相似。反之是否成立?



**证明** 若  $A$  与  $B$  相似,  $C$  与  $D$  相似, 则存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得

$$B = P^{-1}AP, \quad D = Q^{-1}CQ.$$

于是

$$\text{diag}(B, D) = \text{diag}(P^{-1}, Q^{-1}) \text{diag}(A, C) \text{diag}(P, Q).$$

所以  $\text{diag}(A, C)$  与  $\text{diag}(B, D)$  相似。

反之不成立。例如取

$$A = [1], \quad B = [2], \quad C = [2], \quad D = [1].$$

则

$$\text{diag}(A, C) = \text{diag}(1, 2), \quad \text{diag}(B, D) = \text{diag}(2, 1),$$

这两个对角阵显然相似; 但  $A$  与  $B$  不相似,  $C$  与  $D$  也不相似。

#### 作业 6.25 (Ch6 T25)

设方阵  $A$  与  $B$  相似, 证明:

1. 对每个正整数  $k$ ,  $A^k$  相似于  $B^k$ ;
2. 对每个多项式  $f$ ,  $f(A)$  相似于  $f(B)$ 。

**证明** 设  $A$  与  $B$  相似, 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$B = P^{-1}AP.$$

1. 对任意正整数  $k$ , 有

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

故  $A^k$  与  $B^k$  相似。

2. 设

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m.$$

则

$$f(B) = a_0I + a_1B + \cdots + a_mB^m.$$

由第 (1) 问和  $P^{-1}IP = I$ , 得

$$f(B) = P^{-1}(a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m)P = P^{-1}f(A)P.$$

因而  $f(A)$  与  $f(B)$  相似。

#### 作业 6.26 (Ch6 T26)

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有三个线性无关的特征向量, 求  $x$  和  $y$  应满足的条件。

解 先求特征多项式:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

所以  $A$  的特征值为

$$1(\text{二重}), \quad -1.$$

矩阵  $A$  有三个线性无关的特征向量, 当且仅当它可对角化; 这等价于特征值 1 的几何重数也等于 2。因此必须有

$$\text{rank}(A - I) = 1.$$

计算得

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ x & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

由于第一行与第三行互为相反数, 要使秩等于 1, 第二行也必须与第一行成比例。故应有

$$x + y = 0.$$

反之, 当  $x + y = 0$  时, 第二行确与第一行成比例, 此时  $\text{rank}(A - I) = 1$ , 于是特征值 1 的几何重数为 2, 矩阵确有三个线性无关的特征向量。

因而所求条件为

$$x + y = 0.$$

#### 作业 6.27 (Ch6 T27)

设矩阵  $A$  与  $B$  相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

1. 求  $x$  和  $y$  的值;
2. 求可逆矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT = B$ 。

解

1. 因为  $A$  与  $B$  相似, 所以它们有相同的特征值。先求  $A$  的特征多项式:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 2)[(\lambda - x)(\lambda - 1) - 2].$$

这说明  $A$  一定有特征值  $-2$ 。而  $B = \text{diag}(-1, 2, y)$ , 因此必有

$$y = -2.$$

此时  $A$  其余两个特征值应为  $-1$  和  $2$ , 于是

$$(\lambda - x)(\lambda - 1) - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

比较系数得

$$x = 0.$$

所以

$$x = 0, \quad y = -2.$$

2. 代入  $x = 0$  后,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \text{diag}(-1, 2, -2).$$

按照  $B$  的对角元顺序分别求  $A$  的特征向量:

对  $\lambda = -1$ , 可取特征向量

$$p_1 = (0, -2, 1)^\top.$$

对  $\lambda = 2$ , 可取特征向量

$$p_2 = (0, 1, 1)^\top.$$

对  $\lambda = -2$ , 可取特征向量

$$p_3 = (1, 0, -1)^\top.$$

令

$$T = (p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则  $T$  可逆, 且

$$T^{-1}AT = \text{diag}(-1, 2, -2) = B.$$

#### 作业 6.28 (Ch6 T28)

设  $n$  阶方阵  $A \neq 0$ , 满足  $A^m = 0$ , 其中  $m \geq 2$  为正整数。

1. 求  $A$  的特征值;
2. 证明:  $A$  不能相似于对角阵;
3. 证明:  $\det(I + A) = 1$

#### 证明

1. 设  $\lambda$  是  $A$  的特征值,  $x \neq 0$  是对应特征向量, 则

$$Ax = \lambda x.$$

于是

$$A^m x = \lambda^m x.$$

又由题设  $A^m = 0$ , 可知

$$\lambda^m x = 0.$$

因为  $x \neq 0$ , 故

$$\lambda^m = 0,$$

从而

$$\lambda = 0.$$

所以  $A$  的全部特征值都为 0。

2. 若  $A$  相似于对角阵  $D$ , 则  $D$  的特征值也都为 0, 因此

$$D = 0.$$

由相似关系可得  $A = 0$ , 这与题设  $A \neq 0$  矛盾。所以  $A$  不能相似于对角阵。

3. 由于  $A$  的全部特征值都为 0, 故  $I + A$  的全部特征值都为

$$1 + 0 = 1.$$

因而

$$\det(I + A) = 1.$$

### 作业 6.29 (Ch6 T29)

判断下列矩阵  $A$  是否可对角化? 若可以, 试求变换矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT$  为对角阵。

1.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix};$

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix};$

3.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix};$

4.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

解

1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

三个特征值互不相同, 所以  $A$  可对角化。可取对应特征向量为

$$p_1 = (1, -1, 0)^T \quad (\lambda = -2),$$

$$p_2 = (0, 1, -2)^T \quad (\lambda = -1),$$

$$p_3 = (0, 1, 1)^T \quad (\lambda = 2).$$

因此可取

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(-2, -1, 2).$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6).$$

对  $\lambda = 2$ , 可取两个线性无关特征向量

$$p_1 = (-1, 1, 0)^\top, \quad p_2 = (1, 0, 1)^\top.$$

对  $\lambda = 6$ , 可取特征向量

$$p_3 = (1, -2, 3)^\top.$$

故  $A$  可对角化, 取

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(2, 2, 6).$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

其中特征值 1 的代数重数为 2。但解  $(I - A)x = 0$  可得其特征向量空间只有一维, 所以特征值 1 的几何重数为  $1 < 2$ 。因此该矩阵不能对角化。

4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

其特征值为

$$1, 1, 4.$$

对应可取特征向量为

$$p_1 = (-1, 1, 0)^\top, \quad p_2 = (-1, 0, 1)^\top, \quad p_3 = (1, 1, 1)^\top.$$

因而  $A$  可对角化。取

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(1, 1, 4).$$

#### 作业 6.30 (Ch6 T30)

设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $A$  有  $n$  个互异的特征值且  $AB = BA$ 。证明  $B$  相似于对角阵。

**证明** 设  $A$  的  $n$  个互异特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

对应特征向量分别为

$$v_1, v_2, \dots, v_n.$$

由于特征值互异, 这些特征向量线性无关, 从而构成整个空间的一组基。

又因为  $AB = BA$ , 对每个  $i$  有

$$A(Bv_i) = B(Av_i) = B(\lambda_i v_i) = \lambda_i Bv_i.$$

这说明  $Bv_i$  仍属于  $A$  的特征值  $\lambda_i$  对应的特征子空间。由于  $\lambda_i$  互异, 该特征子空间是一维的, 即

$$E_{\lambda_i} = \text{span}\{v_i\}.$$

因而存在标量  $\mu_i$ , 使得

$$Bv_i = \mu_i v_i.$$

也就是说,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  同时也是  $B$  的特征向量。

因此  $B$  有  $n$  个线性无关的特征向量, 故  $B$  相似于对角阵。

#### 作业 6.31 (Ch6 T31)

设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = I$ , 证明  $A$  相似于  $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ , 其中  $0 \leq r \leq n$ 。

**证明** 矩阵  $A$  满足多项式方程

$$A^2 - I = 0.$$

因而  $A$  的极小多项式整除

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

由于  $x^2 - 1$  没有重根, 故  $A$  的极小多项式也没有重根, 从而  $A$  可对角化。

又由上一题可知,  $A$  的特征值只能是

$$1 \quad \text{或} \quad -1.$$

设特征值  $1$  的重数为  $r$ , 则特征值  $-1$  的重数为  $n - r$ 。于是  $A$  相似于对角阵

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-r}) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

**作业 6.32 (Ch6 T32)**

设  $A$  为 3 阶实方阵, 若  $A$  不相似于上三角阵, 问  $A$  是否一定复相似于对角阵?

**解** 一定复相似于对角阵。

因为  $A$  是 3 阶实方阵, 它的特征多项式是三次实系数多项式, 所以至少有一个实特征值。若  $A$  在实数域上相似于上三角阵, 则它的全部对角元都为实数, 从而全部特征值都应为实数; 题设说它不相似于上三角阵, 因此它的特征值不可能全为实数。

于是  $A$  必有一个实特征值和一对共轭的非实复特征值。三者两两不同, 所以在复数域上,  $A$  有三个互异特征值, 从而必可对角化。

因此  $A$  一定复相似于对角阵。

**作业 6.33 (Ch6 T33)**

设  $n$  阶复方阵  $A$  的全部特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

$f(\lambda)$  为多项式。证明:  $f(A)$  的全部特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n),$$

并由此得到

$$\det(f(A)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n).$$

**证明** 由复矩阵的上三角化定理, 存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$A = PTP^{-1},$$

其中  $T$  是上三角矩阵, 且其对角元正是  $A$  的全部特征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

设

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m.$$

则

$$f(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_mA^m = P(a_0I + a_1T + \cdots + a_mT^m)P^{-1} = Pf(T)P^{-1}.$$

由于  $T$  是上三角矩阵, 所以  $f(T)$  仍是上三角矩阵, 且其对角元为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$$

因而  $f(A)$  的全部特征值就是

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$$

由行列式等于全部特征值之积, 得

$$\det(f(A)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n).$$

**作业 6.34 (Ch6 T34)**

设三阶方阵  $A$  的特征多项式为  $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ 。求多项式矩阵  $A^3 - 2A + 3I$  的特征值与行列式。

**解** 由

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

可知  $A$  的特征值为

$$1, 1, 2.$$

因而多项式矩阵

$$A^3 - 2A + 3I$$

的特征值分别为

$$1^3 - 2 \cdot 1 + 3 = 2, \quad 1^3 - 2 \cdot 1 + 3 = 2, \quad 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 7.$$

所以它的特征值为

$$2, 2, 7.$$

行列式为全部特征值之积, 即

$$\det(A^3 - 2A + 3I) = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28.$$

#### 作业 6.35 (Ch6 T35)

判断下面所定义的变换, 哪些是线性的, 哪些不是线性的。

1. 取定  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , 对每个  $x \in M_n(\mathbb{F})$ ,  $\mathcal{A}(x) = Ax - xB$ ;
2. 在线性空间  $V$  中,  $\mathcal{A}(x) = \alpha$ , 其中  $\alpha$  为  $V$  中的一个固定的向量。

解

1. 是线性变换。对任意  $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$  及标量  $k$ , 有

$$\mathcal{A}(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)B = (AX - XB) + (AY - YB) = \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y),$$

$$\mathcal{A}(kX) = A(kX) - (kX)B = k(AX - XB) = k\mathcal{A}(X).$$

所以它是线性变换。

2. 当且仅当  $\alpha = 0$  时是线性变换。因为若  $\mathcal{A}(x) = \alpha$  为常值映射, 则

$$\mathcal{A}(0) = \alpha.$$

线性变换必须满足  $\mathcal{A}(0) = 0$ , 故只有当  $\alpha = 0$  时它才线性; 若  $\alpha \neq 0$ , 则不是线性变换。

#### 作业 6.36 (Ch6 T36)

求下列线性变换在所指定的基下的矩阵:

1. 在  $\mathbb{F}_n[x]$  中,  $\mathcal{A}(P(x)) = P'(x)$ , 在基  $e_0 = 1, e_1 = x, \dots, e_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$  下;
2. 以四个线性无关的函数

$$\alpha_1 = e^{ax} \cos bx, \quad \alpha_2 = e^{ax} \sin bx$$

$$\alpha_3 = xe^{ax} \cos bx, \quad \alpha_4 = xe^{ax} \sin bx$$

为基的四维空间中, 线性变换为微分变换;

解

1. 这里将题中的基按通常记法补全为

$$e_k = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

对微分变换  $\mathcal{A}(P) = P'$ , 有

$$\mathcal{A}(e_0) = 0, \quad \mathcal{A}(e_k) = e_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

因而它在基  $e_0, e_1, \dots, e_n$  下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 令线性变换为微分变换  $D$ 。逐个求导得

$$D(\alpha_1) = a\alpha_1 - b\alpha_2,$$

$$D(\alpha_2) = b\alpha_1 + a\alpha_2,$$

$$D(\alpha_3) = \alpha_1 + a\alpha_3 - b\alpha_4,$$

$$D(\alpha_4) = \alpha_2 + b\alpha_3 + a\alpha_4.$$

因而在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下, 矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.37 (Ch6 T37)

在  $\mathbb{R}^3$  中定义线性变换

$$\mathcal{A}(x, y, z)^\top = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^\top.$$

求  $\mathcal{A}$  在基  $e_1 = (1, 0, 0)^\top, e_2 = (0, 1, 0)^\top, e_3 = (0, 0, 1)^\top$  下的矩阵。



**解** 在标准基  $e_1, e_2, e_3$  下, 矩阵的列向量就是  $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)$  的坐标。

由题意得

$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 1, 0)^\top, \quad \mathcal{A}(e_2) = (2, 0, 2)^\top, \quad \mathcal{A}(e_3) = (0, -3, -1)^\top.$$

因而所求矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.38 (Ch6 T38)

设  $\mathbb{R}^3$  中的线性变换  $\mathcal{A}$  将

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^\top, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^\top$$

变换到

$$\beta_1 = (2, 3, 5)^\top, \quad \beta_2 = (1, 0, 0)^\top, \quad \beta_3 = (0, 1, -1)^\top.$$

求  $\mathcal{A}$  在自然基和  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵。



解 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

计算得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设  $\mathcal{A}$  在自然基下的矩阵为  $M$ , 则由

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

得

$$MP = Q, \quad M = QP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

所以  $\mathcal{A}$  在自然基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

再设  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵为  $M_\alpha$ , 则

$$PM_\alpha = Q, \quad M_\alpha = P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.39 (Ch6 T39)

设线性变换  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (1, 1)$  下的矩阵为  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $\mathcal{A}$  在基  $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (-1, 1)$  下的矩阵。

解 设

$$P = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = (\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则从基  $\beta$  到基  $\alpha$  的过渡矩阵为

$$T = P^{-1}Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

已知  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2$  下的矩阵为

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因而在基  $\beta_1, \beta_2$  下的矩阵为

$$M_\beta = T^{-1}M_\alpha T.$$

又

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

故

$$M_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 6.40 (Ch6 T40)

设  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

求  $\mathcal{A}$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的矩阵:

1.  $\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2$ ;
2.  $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$ .

解

1. 由

$$\beta_1 = \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_1, \quad \beta_3 = \alpha_2$$

可得过渡矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因而在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的矩阵为

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 由

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$$

得过渡矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

因而所求矩阵为

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

### 作业 6.41 (Ch6 T41)

在  $\mathbb{R}^3$  中给定两组基:

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (2, 1, 0)^\top, \quad \alpha_3 = (1, 1, 1)^\top;$$

$$\beta_1 = (2, 3, 1)^\top, \quad \beta_2 = (7, 9, 5)^\top, \quad \beta_3 = (3, 4, 3)^\top.$$

定义线性变换  $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )。

1. 求  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵;
2. 求  $\mathcal{A}$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的矩阵。

解 记

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

计算得

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. 设  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的矩阵为  $M_\alpha$ 。由

$$(\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

得

$$PM_\alpha = Q, \quad M_\alpha = P^{-1}Q = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. 设  $\mathcal{A}$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的矩阵为  $M_\beta$ 。由于  $Q = (\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3))$ , 所以  $\mathcal{A}$  在自然基下的矩阵为

$$M = QP^{-1}.$$

因而

$$M_\beta = Q^{-1}MQ = Q^{-1}(QP^{-1})Q = P^{-1}Q = M_\alpha.$$

故

$$M_\beta = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

### 作业 6.42 (Ch6 T42)

设  $V$  为  $n$  维线性空间,  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  为线性变换。若存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0$ , 但是  $\mathcal{A}^n(\alpha) = 0$ , 证明:  $\mathcal{A}$  在某组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

**证明** 令

$$\beta_1 = \mathcal{A}^{n-1}\alpha, \beta_2 = \mathcal{A}^{n-2}\alpha, \dots, \beta_n = \alpha.$$

下面先证明这  $n$  个向量线性无关。

若

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n = 0,$$

则对等式两边作用  $\mathcal{A}^{n-1}$ , 由于  $\mathcal{A}^n\alpha = 0$ , 只有最后一项可能留下, 从而得到

$$c_n\mathcal{A}^{n-1}\alpha = 0.$$

由题设  $\mathcal{A}^{n-1}\alpha \neq 0$ , 故  $c_n = 0$ 。再对原等式两边作用  $\mathcal{A}^{n-2}$ , 同理得  $c_{n-1} = 0$ 。如此继续, 最终得到

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

所以  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  线性无关, 构成  $V$  的一组基。

在这组基下, 有

$$\mathcal{A}(\beta_1) = \mathcal{A}^n\alpha = 0,$$

且对  $i \geq 2$ ,

$$\mathcal{A}(\beta_i) = \beta_{i-1}.$$

因此  $\mathcal{A}$  在基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  下的矩阵就是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

### 作业 6.43 (Ch6 T43)

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为线性空间  $V$  的一组基, 证明: 对于任意  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in V$ , 存在线性变换  $\mathcal{A}$ , 使得  $\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。

**证明** 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的一组基, 所以任意  $x \in V$  都能唯一写成

$$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

现在定义映射  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  为

$$\mathcal{A}(x) = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n.$$

由于坐标表示唯一，这个定义是良好的。

对任意  $x, y \in V$  和标量  $k$ ，设

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i,$$

则

$$kx + y = \sum_{i=1}^n (kx_i + y_i) \alpha_i.$$

因而

$$\mathcal{A}(kx + y) = \sum_{i=1}^n (kx_i + y_i) \beta_i = k \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + \sum_{i=1}^n y_i \beta_i = k\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y).$$

所以  $\mathcal{A}$  是线性变换。

最后，对每个  $i$ ，因为

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 1\alpha_i + \cdots + 0\alpha_n,$$

所以

$$\mathcal{A}(\alpha_i) = \beta_i.$$

命题得证。

#### 作业 6.44 (Ch6 T44)

设  $V$  为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间，线性变换  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  满足

$$\mathcal{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathcal{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathcal{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求  $\mathcal{A}$  的特征值和特征向量。

**解** 取基  $1, x, x^2$ ，则线性变换  $\mathcal{A}$  在该基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2).$$

所以特征值为

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

对  $\lambda_1 = 2$ ，解  $(A - 2I)v = 0$ ，可取特征向量

$$v_1 = (0, -3, 1)^\top,$$

对应特征多项式为

$$x^2 - 3x.$$

对  $\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ ，可取特征向量

$$v_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, 1, 1 \right)^\top,$$

对应特征多项式为

$$x^2 + x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

对  $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ , 可取特征向量

$$v_3 = \left( \frac{1-\sqrt{17}}{2}, 1, 1 \right)^T,$$

对应特征多项式为

$$x^2 + x + \frac{1-\sqrt{17}}{2}.$$

#### 作业 6.45 (Ch6 T45)

设  $V = \mathbb{F}^{n \times n}$ .

1. 证明:  $V$  的变换  $\mathcal{A}: x \rightarrow x^T$  是线性变换;
2. 求  $\mathcal{A}$  的特征值与特征向量。 $\mathcal{A}$  是否可对角化?

解

1. 对任意  $X, Y \in \mathbb{F}^{n \times n}$  以及标量  $k$ , 有

$$\mathcal{A}(kX + Y) = (kX + Y)^T = kX^T + Y^T = k\mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y).$$

故  $\mathcal{A}: X \mapsto X^T$  是线性变换。

2. 若  $\lambda$  是  $\mathcal{A}$  的特征值,  $X \neq 0$  是对应特征向量, 则

$$X^T = \lambda X.$$

再取一次转置, 得

$$X = \lambda X^T = \lambda^2 X.$$

由于  $X \neq 0$ , 故

$$\lambda^2 = 1,$$

即特征值只能是

$$\lambda = 1 \quad \text{或} \quad \lambda = -1.$$

当  $\lambda = 1$  时, 特征向量满足

$$X^T = X,$$

即全部非零对称矩阵; 当  $\lambda = -1$  时, 特征向量满足

$$X^T = -X,$$

即全部非零反对称矩阵。

任意矩阵都可唯一分解为

$$X = \frac{X + X^T}{2} + \frac{X - X^T}{2},$$

即分解成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。因此

$$\mathbb{F}^{n \times n} = S \oplus K,$$

其中  $S$  是对称矩阵空间,  $K$  是反对称矩阵空间。故  $\mathcal{A}$  有一组由特征向量组成的基, 所以它可以对角化。

#### 作业 6.46 (Ch6 T46)

求下列矩阵的若当标准形

1.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};$
2.  $\begin{bmatrix} 4 & -9 & -4 \\ 6 & -12 & -5 \\ -7 & 13 & 5 \end{bmatrix};$
3.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$
4.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$

解

1. 设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A_1) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

三个特征值互异, 因此 Jordan 标准形为

$$\text{diag}(3, 1, -2).$$

2. 设

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -4 \\ 6 & -12 & -5 \\ -7 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - A_2) = (\lambda + 1)^3.$$

又

$$\text{rank}(A_2 + I) = 2, \quad \text{rank}((A_2 + I)^2) = 1, \quad (A_2 + I)^3 = 0.$$

因而它只有一个长度为 3 的 Jordan 链, 所以 Jordan 标准形为

$$J_3(-1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. 设

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为

$$(\lambda - 1)^4.$$

而  $(A_3 - I)^3 \neq 0$ , 故 Jordan 标准形只有一个 4 阶 Jordan 块, 即

$$J_4(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 设

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

它的特征多项式为

$$\lambda^n - 1.$$

在复数域上,  $\lambda^n - 1$  有  $n$  个互异根

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}, \quad \omega = e^{2\pi i/n}.$$

因而  $A_4$  可对角化, 其 Jordan 标准形为

$$\text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}).$$

#### 作业 6.47 (Ch6 T47)

设  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ , 求方阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为若当标准形。



**解** 先求 Jordan 标准形。矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

的特征多项式为

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

又  $\lambda = 1$  的几何重数为 1, 所以它的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

取 Jordan 链如下:

$$(A - I)x_{11} = 0, \quad x_{11} = (1, 5, 3)^T,$$

$$(A - I)x_{12} = x_{11}, \quad x_{12} = (1, 3, 2)^T,$$

$$(2I - A)x_2 = 0, \quad x_2 = (4, 15, 10)^T.$$

因而可取过渡矩阵

$$T = (x_{11}, x_{12}, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

此时

$$T^{-1}AT = J.$$

#### 作业 6.48 (Ch6 T48)

设方阵  $A$  满足  $A^2 = A$ 。用矩阵的若当标准型证明:  $\text{tr}(A) = \text{rank}(A)$ 。

**证明** 设  $A$  的 Jordan 标准形为  $J$ , 则存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$A = PJP^{-1}.$$

由  $A^2 = A$  得

$$J^2 = J.$$

于是  $J$  的每个 Jordan 块都满足同样的等式。设某个 Jordan 块为  $J_k(\lambda)$ , 则由  $J_k(\lambda)^2 = J_k(\lambda)$  可知其特征值必须满足

$$\lambda^2 = \lambda,$$

即

$$\lambda = 0 \quad \text{或} \quad \lambda = 1.$$

若某个 Jordan 块的阶数大于 1, 则无论是  $J_k(0)$  还是  $J_k(1)$ , 都有超对角线上的 1, 从而不可能满足  $J_k(\lambda)^2 = J_k(\lambda)$ 。因此  $J$  的所有 Jordan 块都只能是  $1 \times 1$  块。

故  $J$  必形如

$$J = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}).$$

于是

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(J) = r,$$

且

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(J) = r.$$

因而

$$\text{tr}(A) = \text{rank}(A).$$

作业 6.49 (Ch6 T49)

设  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ , 求解常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 10x - 4y + 5z \\ \frac{dz}{dt} = 5x - 4y + 6z \end{cases}$$

解 设

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

则方程组可写成

$$X'(t) = MX(t).$$

由上一题可知, 取

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad J = T^{-1}MT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$X = TY, \quad Y = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

则

$$Y' = JY,$$

即

$$\begin{cases} u' = u + v, \\ v' = v, \\ w' = 2w. \end{cases}$$

先解得

$$v = C_2 e^t, \quad w = C_3 e^{2t}.$$

再由  $u' - u = C_2 e^t$  得

$$u = (C_1 + C_2 t) e^t.$$

因而

$$X = TY = (C_1 + C_2 t) e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

---

所以通解为

$$\begin{cases} x(t) = e^t (C_1 + C_2(t+1)) + 4C_3 e^{2t}, \\ y(t) = e^t (5C_1 + C_2(5t+3)) + 15C_3 e^{2t}, \\ z(t) = e^t (3C_1 + C_2(3t+2)) + 10C_3 e^{2t}, \end{cases}$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  为任意常数。

## 第七章 内积空间及变换

### 作业 7.1 (Ch7 T1)

已知  $a_1 = (1, 2, -1, 1)$ ,  $a_2 = (2, 3, 1, -1)$ ,  $a_3 = (-1, -1, -2, 2)$ 。

1. 求  $a_1, a_2, a_3$  的长度及彼此间的夹角。
2. 求与  $a_1, a_2, a_3$  都正交的向量。

解

1. 先计算各向量的长度与内积:

$$\|a_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7},$$

$$\|a_2\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{15},$$

$$\|a_3\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{10}.$$

又

$$\langle a_1, a_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 6,$$

$$\langle a_2, a_3 \rangle = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -9,$$

$$\langle a_3, a_1 \rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1.$$

因此三对夹角分别为

$$\theta_{12} = \arccos \frac{\langle a_1, a_2 \rangle}{\|a_1\| \|a_2\|} = \arccos \frac{6}{\sqrt{105}} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{35},$$

$$\theta_{23} = \arccos \frac{\langle a_2, a_3 \rangle}{\|a_2\| \|a_3\|} = \arccos \frac{-9}{5\sqrt{6}} = \arccos \frac{-3\sqrt{6}}{10},$$

$$\theta_{31} = \arccos \frac{\langle a_3, a_1 \rangle}{\|a_3\| \|a_1\|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{70}} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}.$$

2. 设  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  与  $a_1, a_2, a_3$  都正交, 则

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

解这个齐次线性方程组得

$$x = t_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

所以与  $a_1, a_2, a_3$  都正交的向量全体为

$$\text{span}\{(-5, 3, 1, 0), (5, -3, 0, 1)\}.$$

### 作业 7.2 (Ch7 T2)

设  $x, y, z$  是欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 证明以下不等式:

1.  $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ ;
2.  $\|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - z\|$ .

#### 证明

1. 由三角不等式

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

立得

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

2. 由三角不等式, 对向量  $x - y$  与  $y - z$  有

$$\|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

而

$$(x - y) + (y - z) = x - z,$$

故

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

### 作业 7.3 (Ch7 T3)

设  $x, y$  是欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  的两个向量, 它们之间的夹角为  $\theta$ . 证明:

1. (余弦定理)  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$ .
2. (平行四边形定理)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .
3. (菱形对角线定理) 若  $\|x\| = \|y\|$ , 则  $(x + y) \perp (x - y)$ .

#### 证明

1. 由内积定义,

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle.$$

又因为  $x, y$  的夹角为  $\theta$ , 所以

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos\theta.$$

代入得

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos\theta.$$

2. 直接计算:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= (\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) + (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

3. 若  $\|x\| = \|y\|$ , 则

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$

因此  $(x+y) \perp (x-y)$ 。

#### 作业 7.4 (Ch7 T4)

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $\mathbb{R}^n$  的一组基,  $a \in \mathbb{R}^n$ 。证明:  $a = 0$  当且仅当  $\langle a, a_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

**证明** 必要性显然: 若  $a = 0$ , 则对每个  $i$  都有

$$\langle a, a_i \rangle = 0.$$

下面证充分性。若

$$\langle a, a_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

又因为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 故存在唯一的标量  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 使得

$$a = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n.$$

于是

$$\langle a, a \rangle = \left\langle a, \sum_{i=1}^n k_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n k_i \langle a, a_i \rangle = 0.$$

由于内积正定,  $\langle a, a \rangle = 0$  当且仅当  $a = 0$ , 故  $a = 0$ 。

#### 作业 7.5 (Ch7 T5)

用 Schmidt 正交化方法构造标准正交向量组:

1.  $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ ;
2.  $(1, 1, 1, 2), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$ 。

**解** 设两问中给出的向量依次为  $a_1, a_2, a_3$ 。

1. 先对

$$a_1 = (0, 0, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 1)$$

做 Gram-Schmidt 正交化。

取

$$b_1 = a_1 = (0, 0, 1).$$

则

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = (0, 1, 1) - 1 \cdot (0, 0, 1) = (0, 1, 0).$$

再有

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = (1, 1, 1) - (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, 0, 0).$$

这三个向量已经都是单位向量, 因此一组标准正交向量组为

$$(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).$$

2. 对

$$a_1 = (1, 1, 1, 2), \quad a_2 = (1, 1, -5, 3), \quad a_3 = (3, 2, 8, -7)$$

做 Gram-Schmidt 正交化。

先取

$$b_1 = a_1 = (1, 1, 1, 2).$$

因为

$$\langle a_2, b_1 \rangle = 3, \quad \langle b_1, b_1 \rangle = 7,$$

所以

$$b_2 = a_2 - \frac{3}{7}b_1 = \frac{1}{7}(4, 4, -38, 15).$$

再由 Gram-Schmidt 公式可得第三个正交向量可取为

$$b_3 = (986, 743, -133, -798).$$

直接计算可得

$$\langle b_1, b_1 \rangle = 7, \quad \langle b_2, b_2 \rangle = 1701, \quad \langle b_3, b_3 \rangle = 2178738 = 81 \cdot 26898.$$

因而标准化后得到一组标准正交向量组

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2),$$

$$u_2 = \frac{1}{9\sqrt{21}}(4, 4, -38, 15),$$

$$u_3 = \frac{1}{9\sqrt{26898}}(986, 743, -133, -798).$$

#### 作业 7.6 (Ch7 T6)

设在  $\mathbb{R}^3$  中, 基  $a_1, a_2, a_3$  的度量矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

试求  $\mathbb{R}^3$  中由  $a_1, a_2, a_3$  表示的一组标准正交基。

**解** 设所求标准正交基为  $e_1, e_2, e_3$ , 并用基  $a_1, a_2, a_3$  来表示它们。

由题设度量矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可知

$$\langle a_1, a_1 \rangle = 1, \quad \langle a_2, a_2 \rangle = 2, \quad \langle a_3, a_3 \rangle = 2,$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = 0, \quad \langle a_2, a_3 \rangle = 0, \quad \langle a_1, a_3 \rangle = -1.$$

取

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, \quad e_3 = a_1 + a_3.$$

则

$$\|e_1\|^2 = \langle a_1, a_1 \rangle = 1, \quad \|e_2\|^2 = \frac{1}{2}\langle a_2, a_2 \rangle = 1, \quad \|e_3\|^2 = \langle a_1 + a_3, a_1 + a_3 \rangle = 1 + 2 - 2 = 1.$$

又

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_1, a_2 \rangle = 0,$$

$$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle a_1, a_1 + a_3 \rangle = 1 - 1 = 0,$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle a_2, a_1 + a_3 \rangle = 0.$$

所以  $e_1, e_2, e_3$  是一组标准正交基。

因而所求一组标准正交基为

$$a_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, \quad a_1 + a_3.$$

### 作业 7.7 (Ch7 T7)

证明:  $n$  维向量空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基。

**证明** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是该  $n$  维向量空间中的一个正交向量组。

若它们已经张成整个空间, 则它本身就是一组正交基, 不必扩充。

若它们还不能张成整个空间, 则存在向量

$$\beta \notin \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}.$$

令

$$\gamma = \beta - \sum_{i=1}^r \frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i.$$

则对每个  $j = 1, 2, \dots, r$ , 有

$$\langle \gamma, \alpha_j \rangle = \langle \beta, \alpha_j \rangle - \sum_{i=1}^r \frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta, \alpha_j \rangle - \langle \beta, \alpha_j \rangle = 0.$$

因此  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma$  仍是正交向量组。

并且  $\gamma \neq 0$ ; 否则

$$\beta = \sum_{i=1}^r \frac{\langle \beta, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\},$$

与  $\beta$  的选取矛盾。

这样就把原正交向量组扩充了一个向量。不断重复这一过程。由于空间维数是  $n$ , 至多经过有限步便得到一个含  $n$  个非零正交向量的向量组。非零正交向量组必线性无关, 因此它构成一组正交基。

### 作业 7.8 (Ch7 T8)

验证下列各组向量是正交的, 并添加向量改造为标准正交基:

1.  $(2, 1, 2), (1, 2, -2)$ ;
2.  $(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$ 。

**解**

1. 先验证正交性:

$$(2, 1, 2) \cdot (1, 2, -2) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

设向量  $(x_1, x_2, x_3)$  同时与这两个向量正交, 则

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

解得

$$(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

所以可添加向量  $(-2, 2, 1)$ 。又因为

$$\|(2, 1, 2)\| = \|(1, 2, -2)\| = \|(-2, 2, 1)\| = 3,$$

故一组标准正交基为

$$\frac{1}{3}(2, 1, 2), \quad \frac{1}{3}(1, 2, -2), \quad \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$$

2. 先验证正交性:

$$(1, 1, 1, 2) \cdot (1, 2, 3, -3) = 1 + 2 + 3 - 6 = 0.$$

先添加与它们都正交的向量  $v_3 = (1, -2, 1, 0)$ , 因为

$$(1, 1, 1, 2) \cdot (1, -2, 1, 0) = 0, \quad (1, 2, 3, -3) \cdot (1, -2, 1, 0) = 0.$$

再取向量  $v_4 = (-25, -4, 17, 6)$ , 直接验证可得它与前面三个向量都正交。

于是可得一组两两正交的向量组

$$(1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3), (1, -2, 1, 0), (-25, -4, 17, 6).$$

又

$$\|(1, 1, 1, 2)\| = \sqrt{7}, \quad \|(1, 2, 3, -3)\| = \sqrt{23}, \quad \|(1, -2, 1, 0)\| = \sqrt{6}, \quad \|(-25, -4, 17, 6)\| = \sqrt{966}.$$

因而一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2), \quad \frac{1}{\sqrt{23}}(1, 2, 3, -3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{966}}(-25, -4, 17, 6).$$

#### 作业 7.9 (Ch7 T9)

如  $b$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都正交, 证明:  $b$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的任意线性组合也正交。

**证明** 设

$$c = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n$$

是  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的任意线性组合, 则由内积的线性性,

$$\langle b, c \rangle = \left\langle b, \sum_{i=1}^n k_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n k_i \langle b, a_i \rangle.$$

由于  $b$  与每个  $a_i$  都正交, 所以

$$\langle b, a_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

从而

$$\langle b, c \rangle = 0.$$

故  $b$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的任意线性组合都正交。

#### 作业 7.10 (Ch7 T10)

设  $e_1, e_2, e_3$  是  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基。令

$$a_1 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3),$$

$$a_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3),$$

$$a_3 = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3),$$

证明:  $a_1, a_2, a_3$  也是  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基。

**证明** 只需验证  $a_1, a_2, a_3$  两两正交且都是单位向量。

先算模长：

$$\|a_1\|^2 = \frac{1}{9}(2^2 + 2^2 + (-1)^2) = 1, \quad \|a_2\|^2 = \frac{1}{9}(2^2 + (-1)^2 + 2^2) = 1, \quad \|a_3\|^2 = \frac{1}{9}(1^2 + (-2)^2 + (-2)^2) = 1.$$

再算内积：

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \frac{1}{9}(2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) = 0,$$

$$\langle a_1, a_3 \rangle = \frac{1}{9}(2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)) = 0,$$

$$\langle a_2, a_3 \rangle = \frac{1}{9}(2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)) = 0.$$

因此  $a_1, a_2, a_3$  是三维空间中三条两两正交的单位向量，所以它们构成  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基。

#### 作业 7.11 (Ch7 T11)

设  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基， $x_1, x_2, \dots, x_k$  是  $\mathbb{R}^n$  中任意  $k$  个向量，试证： $x_1, x_2, \dots, x_k$  两两正交的充分必要条件是

$$\sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$$

**证明** 由于  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基，所以每个向量  $x_i$  都可唯一写成

$$x_i = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

因而对任意  $i \neq j$ ，有

$$\langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle e_s, \sum_{t=1}^n \langle x_j, e_t \rangle e_t \right\rangle = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_t \rangle \langle e_s, e_t \rangle.$$

因为  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是标准正交基，故

$$\langle e_s, e_t \rangle = \begin{cases} 1, & s = t, \\ 0, & s \neq t. \end{cases}$$

所以上式化为

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle.$$

因此， $x_1, x_2, \dots, x_k$  两两正交当且仅当对任意  $i \neq j$  都有

$$\sum_{s=1}^n \langle x_i, e_s \rangle \langle x_j, e_s \rangle = 0.$$

#### 作业 7.12 (Ch7 T12)

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基。证明：

1. 对任意  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ， $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle$ 。
2. 对任意  $a \in \mathbb{R}^n$ ， $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2$ 。

**证明** 因为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是一组标准正交基，所以任意  $a \in \mathbb{R}^n$  都有展开式

$$a = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle a_i.$$

1. 对任意  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle a_i, b \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle a_i, b \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle \langle b, a_i \rangle.$$

2. 令  $b = a$ , 由第 1 问立得

$$\|a\|^2 = \langle a, a \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a, a_i \rangle^2.$$

### 作业 7.13 (Ch7 T13)

证明二阶正交矩阵必取下面两种形式之一:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

**证明** 设二阶正交矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

因为  $A$  是正交矩阵, 所以它的两行向量是两条互相正交的单位向量。

第一行  $(a, b)$  是单位向量, 因此存在  $\theta \in [-\pi, \pi)$ , 使得

$$(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

第二行  $(c, d)$  与第一行正交, 所以

$$c \cos \theta + d \sin \theta = 0.$$

解得

$$(c, d) = t(\sin \theta, -\cos \theta).$$

又第二行也是单位向量, 于是  $t = \pm 1$ 。

当  $t = 1$  时,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix};$$

当  $t = -1$  时,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

因此二阶正交矩阵必取题中两种形式之一。

### 作业 7.14 (Ch7 T14)

写出所有 3 阶正交矩阵, 它的元素是 0 或 1。

**解** 设三阶正交矩阵为  $Q = (q_{ij})$ , 且每个元素都只能是 0 或 1。

因为  $Q$  是正交矩阵, 所以它的每一行都是单位向量, 且任意两行正交。对于只含 0, 1 的行向量来说, 其平方和等于该行中 1 的个数。要成为单位向量, 每一行必须恰有一个 1。同理, 每一列也必须恰有一个 1。

因而  $Q$  恰好是三阶置换矩阵, 所以全部可能的矩阵就是  $3! = 6$  个:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 7.15 (Ch7 T15)

如果一个正交阵中每个元素都是  $\frac{1}{4}$  或  $-\frac{1}{4}$ , 这个正交阵是几阶的?



**解** 设这个正交矩阵是  $n$  阶的。由于矩阵中每个元素都是  $\frac{1}{4}$  或  $-\frac{1}{4}$ , 因此任意一行的平方和都等于

$$n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{n}{16}.$$

但正交矩阵的每一行都是单位向量, 所以这必须等于 1, 即

$$\frac{n}{16} = 1.$$

因而

$$n = 16.$$

所以这个正交矩阵一定是 16 阶的。

#### 作业 7.16 (Ch7 T16)

若  $a$  是  $\mathbb{R}^n$  的单位向量, 证明:  $Q = I_n - 2aa^T$  是一个正交阵。当  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$  时, 具体求出  $Q$ 。



**解** 先证明  $Q = I_n - 2aa^T$  是正交矩阵。

因为  $a$  是单位向量, 所以

$$a^T a = 1.$$

又由于  $aa^T$  是对称矩阵, 故

$$Q^T = Q.$$

于是

$$Q^T Q = (I_n - 2aa^T)^2 = I_n - 4aa^T + 4a(a^T a)a^T = I_n.$$

所以  $Q$  是正交矩阵。

当

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

时,

$$aa^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因而

$$Q = I_3 - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 作业 7.17 (Ch7 T17)

在什么条件下，对角矩阵是正交矩阵？

**解** 设对角矩阵为

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

它是正交矩阵当且仅当

$$D^T D = I_n.$$

由于  $D^T = D$ ，故

$$D^T D = D^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2).$$

因此

$$D^T D = I_n$$

当且仅当

$$d_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

也就是说，对角矩阵是正交矩阵的充要条件是它的每个对角元都等于 1 或 -1。

#### 作业 7.18 (Ch7 T18)

设  $A, B$  都为  $n$  阶正交阵，证明：

1.  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  也是正交阵；
2.  $AB$  也为正交阵；
3.  $A^{-1}$  也为正交阵；
4.  $A$  的行列式为 1 或 -1。

**证明**

1. 设  $\text{adj}(A)$  表示  $A$  的伴随矩阵。因为  $A$  是正交矩阵，所以

$$A^{-1} = A^T.$$

又由伴随矩阵公式，

$$\text{adj}(A) = \det(A)A^{-1} = \det(A)A^T.$$

另一方面，由

$$AA^T = I$$

两边取行列式，得

$$(\det A)^2 = 1.$$

因而

$$\det(A) = \pm 1.$$

于是

$$\operatorname{adj}(A) \operatorname{adj}(A)^{\top} = \det(A)^2 A^{\top} A = I,$$

所以  $A$  的伴随矩阵也是正交矩阵。

2.

$$(AB)(AB)^{\top} = ABB^{\top}A^{\top} = AA^{\top} = I.$$

所以  $AB$  也是正交矩阵。

3. 因为  $A^{-1} = A^{\top}$ , 于是

$$A^{-1}(A^{-1})^{\top} = A^{\top}A = I.$$

所以  $A^{-1}$  也是正交矩阵。

4. 由

$$AA^{\top} = I$$

两边取行列式, 得

$$\det(A) \det(A^{\top}) = 1.$$

而

$$\det(A^{\top}) = \det(A),$$

所以

$$(\det A)^2 = 1,$$

即

$$\det(A) = 1 \quad \text{或} \quad -1.$$

#### 作业 7.19 (Ch7 T19)

给定三阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。求  $A$  的 QR 分解。



**解** 设  $A$  的列向量分别为

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用 Gram-Schmidt 方法正交化。

先取

$$u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

再有

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

因而

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

又

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 = \frac{3}{7} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

令

$$Q = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{105}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

则

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{21}{\sqrt{105}} & \frac{6}{\sqrt{105}} \\ 0 & 0 & \frac{9}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

因而  $A$  的 QR 分解为

$$A = QR.$$

#### 作业 7.20 (Ch7 T20)

设  $W$  是由  $(1, 1, 0), (1, -2, 1)$  生成的  $\mathbb{R}^3$  的子空间。

1. 求  $W$  的一组标准正交基。
2. 求  $W^\perp$  的标准正交基。
3. 求向量  $(0, 0, 2)$  在  $W$  的正交投影。

解 记

$$\alpha_1 = (1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (1, -2, 1).$$

1. 对  $\alpha_1, \alpha_2$  作 Gram-Schmidt 正交化。

取

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0), \quad e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

再有

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (1, -2, 1) - \frac{-1}{2}(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(3, -3, 2).$$

因而

$$e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3, -3, 2).$$

所以  $W$  的一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{22}}(3, -3, 2).$$

2. 设  $x = (x_1, x_2, x_3) \in W^\perp$ , 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

解得

$$x = t(-1, 1, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

因而  $W^\perp$  的一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{11}}(-1, 1, 3).$$

3. 向量  $v = (0, 0, 2)$  在  $W$  上的正交投影为

$$\text{proj}_W(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2.$$

因为

$$\langle v, e_1 \rangle = 0, \quad \langle v, e_2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{22}},$$

所以

$$\text{proj}_W(v) = \frac{4}{\sqrt{22}} \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}(3, -3, 2) = \frac{2}{11}(3, -3, 2).$$

#### 作业 7.21 (Ch7 T21)

在三维空间直角坐标系中, 已知点  $A, B, C, D$  的坐标分别是  $(1, 1, 0), (3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 2, 4)$ 。求四面体的顶点  $A$  到底面  $BCD$  的高。

**解** 设底面  $BCD$  所在平面方程为

$$ax + by + cz + d = 0.$$

因为点  $B(3, 1, 2), C(0, 1, 3), D(2, 2, 4)$  在该平面上, 所以

$$\begin{cases} 3a + b + 2c + d = 0, \\ b + 3c + d = 0, \\ 2a + 2b + 4c + d = 0. \end{cases}$$

解得一组系数为

$$(a, b, c, d) = (1, -5, 3, -4).$$

因而平面  $BCD$  的方程为

$$x - 5y + 3z - 4 = 0.$$

所求高就是点  $A(1, 1, 0)$  到该平面的距离:

$$h = \frac{|1 - 5 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{35}} = \frac{8\sqrt{35}}{35}.$$

### 作业 7.22 (Ch7 T22)

求线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

的最小二乘解。

**解** 将方程组写成矩阵形式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最小二乘解满足正规方程

$$A^T A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T b.$$

计算得

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解得

$$x = \frac{22}{35}, \quad y = \frac{8}{35}.$$

所以最小二乘解为

$$\left( \frac{22}{35}, \frac{8}{35} \right).$$

### 作业 7.23 (Ch7 T23)

证明：三维空间中绕过原点的某条直线的旋转变换是正交变换。

**证明** 设  $R$  是三维空间中绕过原点的某条直线  $l$  旋转一个固定角  $\theta$  所得到的线性变换。取  $l$  的单位方向向量为  $e$ 。对任意向量  $x$ ，可唯一分解为

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp},$$

其中  $x_{\parallel}$  平行于  $l$ ， $x_{\perp}$  垂直于  $l$ 。旋转变换的几何意义表明：

$$R(x_{\parallel}) = x_{\parallel},$$

而  $R$  在平面  $l^{\perp}$  上只是一个平面旋转，所以保持该平面内向量的长度与夹角不变，即

$$\|R(x_{\perp})\| = \|x_{\perp}\|.$$

此外， $R(x_{\parallel})$  仍平行于  $l$ ， $R(x_{\perp})$  仍属于  $l^{\perp}$ ，故二者仍互相正交。

因而

$$\|R(x)\|^2 = \|R(x_{\parallel}) + R(x_{\perp})\|^2 = \|R(x_{\parallel})\|^2 + \|R(x_{\perp})\|^2 = \|x_{\parallel}\|^2 + \|x_{\perp}\|^2 = \|x\|^2.$$

这说明  $R$  保持任意向量的长度。

对欧氏空间中的线性变换, 保持长度就保持内积, 因为

$$\langle R(x), R(y) \rangle = \frac{1}{2} (\|R(x)\|^2 + \|R(y)\|^2 - \|R(x) - R(y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x, y \rangle.$$

因此  $R$  是正交变换。

#### 作业 7.24 (Ch7 T24)

设  $a$  为  $\mathbb{R}^n$  中的单位向量。定义线性变换:  $\mathcal{A}b = b - 2\langle a, b \rangle a$ 。证明:  $\mathcal{A}$  为正交变换, 并找  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基, 使得  $\mathcal{A}$  在该组基下的矩阵为对角阵。

**解** 先证  $\mathcal{A}$  为正交变换。对任意  $x \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathcal{A}(x) = x - 2\langle a, x \rangle a.$$

因为  $\|a\| = 1$ , 所以

$$\|\mathcal{A}(x)\|^2 = \langle x - 2\langle a, x \rangle a, x - 2\langle a, x \rangle a \rangle = \|x\|^2 - 4\langle a, x \rangle^2 + 4\langle a, x \rangle^2 \|a\|^2 = \|x\|^2.$$

因而  $\mathcal{A}$  保持长度, 所以是正交变换。

再找一组使它对角化的标准正交基。取  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基

$$a, e_2, e_3, \dots, e_n,$$

其中  $e_2, e_3, \dots, e_n \in a^\perp$ 。则

$$\mathcal{A}(a) = a - 2\langle a, a \rangle a = -a,$$

而对  $i = 2, 3, \dots, n$ , 因为  $\langle a, e_i \rangle = 0$ , 所以

$$\mathcal{A}(e_i) = e_i.$$

故在基

$$a, e_2, e_3, \dots, e_n$$

下,  $\mathcal{A}$  的矩阵为

$$\text{diag}(-1, 1, \dots, 1).$$

#### 作业 7.25 (Ch7 T25)

证明: 第六章习题 4, 9 给出的线性变换是对称变换。

**证明** 由第六章习题 4 的解可知, 该线性变换在标准基下的矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{17}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

显然

$$A_1^\top = A_1.$$

因而对任意  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , 有

$$\langle \mathcal{A}_1 x, y \rangle = x^\top A_1^\top y = x^\top A_1 y = \langle x, \mathcal{A}_1 y \rangle.$$

所以第六章习题 4 给出的线性变换是对称变换。

同理, 由第六章习题 9 的解可知, 该线性变换在标准基下的矩阵为

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}.$$

也有

$$A_2^\top = A_2.$$

因而对任意  $x, y \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle \mathcal{A}_2 x, y \rangle = x^\top A_2^\top y = x^\top A_2 y = \langle x, \mathcal{A}_2 y \rangle.$$

所以第六章习题 9 给出的线性变换也是对称变换。

综上, 这两个线性变换都是对称变换。

### 作业 7.26 (Ch7 T26)

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

求正交矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角阵。由此求  $A^k$ ,  $k$  是自然数。

**解** 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

是实对称矩阵, 所以可正交对角化。

计算特征多项式得

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

因而特征值为

$$5, \quad 2, \quad -1.$$

分别可取对应特征向量为

$$x_1 = (1, -2, 2)^\top, \quad x_2 = (-2, 1, 2)^\top, \quad x_3 = (2, 2, 1)^\top.$$

它们两两正交, 且都有长度 3, 所以单位化后得

$$e_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^\top, \quad e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^\top, \quad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top.$$

令

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

则  $P$  为正交矩阵, 且

$$P^{-1}AP = P^\top AP = \text{diag}(5, 2, -1).$$

于是

$$A^k = P \operatorname{diag}(5^k, 2^k, (-1)^k) P^\top.$$

计算可得

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{5^k + 4 \cdot 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{-2 \cdot 5^k - 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{2 \cdot 5^k - 4 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} \\ \frac{-2 \cdot 5^k - 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{4 \cdot 5^k + 2^k + 4(-1)^k}{9} & \frac{-4 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} \\ \frac{2 \cdot 5^k - 4 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} & \frac{-4 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^k + 2(-1)^k}{9} & \frac{4 \cdot 5^k + 4 \cdot 2^k + (-1)^k}{9} \end{bmatrix}.$$

### 作业 7.27 (Ch7 T27)

证明：下列三个条件中只要有二个成立，另一个也必成立。

1.  $A$  是对称的；
2.  $A$  是正交的；
3.  $A^2 = I$ 。

**证明** 分别证明三种情形。

1. 若  $A$  是对称的且  $A$  是正交的，则

$$A^2 = AA^\top = I.$$

2. 若  $A$  是正交的且  $A^2 = I$ ，则

$$A^{-1} = A,$$

而正交矩阵满足  $A^{-1} = A^\top$ ，故

$$A = A^\top,$$

即  $A$  是对称的。

3. 若  $A$  是对称的且  $A^2 = I$ ，则

$$A = A^{-1}.$$

又因为  $A = A^\top$ ，所以

$$A^\top = A^{-1},$$

从而

$$AA^\top = I,$$

即  $A$  是正交的。

因此三个条件中只要有二个成立，另一个也必成立。

### 作业 7.28 (Ch7 T28)

求正交阵  $T$ ，使  $T^{-1}AT$  为对角矩阵

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



解

1. 对

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

有特征值

$$3, \quad 1.$$

分别可取对应特征向量

$$(1, 1)^T, \quad (-1, 1)^T.$$

单位化后取

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T.$$

令

$$T_1 = (e_1, e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$T_1^{-1}AT_1 = T_1^T AT_1 = \text{diag}(3, 1).$$

2. 对

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

有特征值

$$1, \quad 1, \quad -2.$$

对于特征值 1, 可取线性无关特征向量

$$x_1 = (-1, 1, 0)^T, \quad x_2 = (-1, 0, 1)^T.$$

对它们正交化并单位化, 得

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T.$$

对于特征值 -2, 可取单位特征向量

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T.$$

令

$$T_2 = (e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

则

$$T_2^{-1}AT_2 = T_2^T AT_2 = \text{diag}(1, 1, -2).$$

3. 对

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

有特征值

$$6, -3, -3.$$

对应  $\lambda = 6$  可取单位特征向量

$$e_1 = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)^T.$$

对应  $\lambda = -3$  可先取两个特征向量

$$x_2 = (-1, 0, 1)^T, \quad x_3 = (-1, 2, 0)^T,$$

经过 Gram-Schmidt 正交化并单位化后, 可取

$$e_2 = \left( -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right)^T, \quad e_3 = \left( -\frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^T.$$

令

$$T_3 = (e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix},$$

则

$$T_3^{-1}AT_3 = T_3^T AT_3 = \text{diag}(6, -3, -3).$$

4. 对

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

有特征值

$$5, 2, -1.$$

对应单位特征向量可取

$$e_1 = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T, \quad e_2 = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)^T, \quad e_3 = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T.$$

令

$$T_4 = (e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

则

$$T_4^{-1}AT_4 = T_4^T AT_4 = \text{diag}(5, 2, -1).$$

**作业 7.29 (Ch7 T29)**

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵, 且  $A^2 = A$ 。证明: 存在正交方阵  $T$  使得  $T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O)$ 。这里  $r = \text{rank}(A)$ 。

**证明** 由

$$A^2 = A$$

得

$$A(A - I) = 0.$$

所以  $A$  的任一特征值  $\lambda$  必满足

$$\lambda^2 = \lambda,$$

即

$$\lambda = 0 \quad \text{或} \quad 1.$$

又因为  $A$  是实对称矩阵, 所以由实对称矩阵的正交对角化定理, 存在正交矩阵  $T$ , 使得

$$T^{-1}AT = T^T AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

其中每个  $\lambda_i$  都是 0 或 1。

设其中有  $r$  个特征值等于 1, 其余  $n - r$  个等于 0, 则

$$T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O).$$

由于对角矩阵的秩等于其非零对角元个数, 所以

$$r = \text{rank}(A).$$

故存在正交矩阵  $T$  使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(I_r, O),$$

其中  $r = \text{rank}(A)$ 。

**作业 7.30 (Ch7 T30)**

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵。证明:  $\max_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T Ax}{x^T x} = \lambda_{\max}$ , 这里  $\lambda_{\max}$  是  $A$  的最大特征值。

**证明** 设  $A$  的特征值为

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max},$$

对应的一组标准正交特征向量为

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

由于  $A$  是实对称矩阵, 所以这样的标准正交基存在。

任取  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ , 写成

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

则

$$x^\top x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2,$$

且

$$x^\top Ax = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right)^\top A \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

因为  $\lambda_i \leq \lambda_{\max}$ , 所以

$$x^\top Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_{\max} x^\top x.$$

从而

$$\frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_{\max}, \quad \forall x \neq 0.$$

于是

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_{\max}.$$

另一方面, 取  $x = e_n$ , 则

$$\frac{e_n^\top A e_n}{e_n^\top e_n} = \frac{\lambda_{\max} e_n^\top e_n}{e_n^\top e_n} = \lambda_{\max}.$$

故上界可以取到, 因此

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^\top Ax}{x^\top x} = \lambda_{\max}.$$

### 作业 7.31 (Ch7 T31)

设  $V$  是  $n$  阶实方阵全体构成的线性空间。对  $A, B \in V$ , 定义  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\top)$ 。

1. 证明:  $\langle A, B \rangle$  构成内积, 从而  $V$  在该内积下成为欧氏空间。
2. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in V$ , 求  $A$  的模长。
3. 基本矩阵  $E_{ij}$  是否构成  $V$  的一组标准正交基? 请说明理由。

解

1. 先证它满足内积的三条性质。

对称性:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\top) = \text{tr}((AB^\top)^\top) = \text{tr}(BA^\top) = \langle B, A \rangle.$$

线性性: 对任意标量  $\lambda, \mu$  及矩阵  $A, B, C$ ,

$$\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}((\lambda A + \mu B)C^\top) = \lambda \text{tr}(AC^\top) + \mu \text{tr}(BC^\top) = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle.$$

正定性:

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$

且等号成立当且仅当所有  $a_{ij} = 0$ , 即  $A = 0$ 。

所以  $\langle A, B \rangle$  构成内积, 从而  $V$  在该内积下成为欧氏空间。

2. 由定义,  $A$  的模长为

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

3. 基本矩阵  $E_{ij}$  共有  $n^2$  个, 而  $\dim V = n^2$ , 它们显然线性无关, 因此构成  $V$  的一组基。

再计算它们的内积:

$$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \text{tr}(E_{ij} E_{kl}^T) = \text{tr}(E_{ij} E_{lk}) = \delta_{ik} \text{tr}(E_{jl}) = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

因而  $\{E_{ij}\}$  不仅是一组基, 而且是一组标准正交基。

### 作业 7.32 (Ch7 T32)

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一组向量。定义其 Gram 矩阵  $G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。

1. 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  构成  $V$  的一组基当且仅当  $\det(G) \neq 0$ 。
2. 设  $\alpha_i$  在一组标准正交基下的坐标为  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。记  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。则  $\det(G) = \det(X)^2$ 。

**证明** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  在某组标准正交基下的坐标列向量分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 令

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

则 Gram 矩阵满足

$$G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle) = X^T X.$$

1. 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  构成一组基当且仅当它们的坐标列向量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  线性无关, 也即当且仅当

$$\det(X) \neq 0.$$

又由第 2 问将得

$$\det(G) = \det(X)^2,$$

因而

$$\det(G) \neq 0 \iff \det(X) \neq 0.$$

所以

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 构成一组基 } \iff \det(G) \neq 0.$$

2. 由  $G = X^T X$ , 有

$$\det(G) = \det(X^T X) = \det(X^T) \det(X) = \det(X)^2.$$

### 作业 7.33 (Ch7 T33)

设  $\mathbb{R}_n[x]$  是次数不超过  $n$  次的实系数多项式全体在内积  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$  下的欧氏空间。令

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad n \geq 1.$$

证明:  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  构成  $\mathbb{R}_n[x]$  的一组正交基。称  $P_n(x)$  为 Legendre 多项式。

**证明** 先说明  $P_0, P_1, \dots, P_n$  都属于  $\mathbb{R}_n[x]$ 。因为

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m,$$

而  $(x^2 - 1)^m$  是  $2m$  次多项式, 所以  $P_m$  是  $m$  次多项式, 故都在  $\mathbb{R}_n[x]$  中。

又由于  $\deg P_m = m$ , 所以

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

的次数互不相同, 从而它们线性无关。因为  $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$ , 只要证明它们两两正交, 就得到它们构成一组正交基。

下面证明正交性。设  $m > k$ , 需证

$$\langle P_m, P_k \rangle = 0.$$

记

$$f_m(x) = (x^2 - 1)^m = (x - 1)^m(x + 1)^m.$$

则

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} f_m^{(m)}(x).$$

因为  $f_m(x)$  在  $x = \pm 1$  处都有  $m$  重零点, 所以对任意  $0 \leq r \leq m - 1$  都有

$$f_m^{(r)}(1) = f_m^{(r)}(-1) = 0.$$

于是分部积分  $m$  次:

$$\langle P_m, P_k \rangle = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 f_m^{(m)}(x) P_k(x) dx.$$

每次分部积分时边界项都因上式而消失, 故

$$\langle P_m, P_k \rangle = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 f_m(x) P_k^{(m)}(x) dx.$$

但  $\deg P_k = k < m$ , 所以

$$P_k^{(m)}(x) = 0.$$

因而

$$\langle P_m, P_k \rangle = 0.$$

这说明  $P_0, P_1, \dots, P_n$  两两正交。

综上,  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  构成  $\mathbb{R}_n[x]$  的一组正交基。

### 作业 7.34 (Ch7 T34)

设  $\mathbb{R}_n[x]$  是次数不超过  $n$  次的实系数多项式全体在内积  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$  下的欧氏空间。令

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1], \quad n \geq 1.$$

证明:  $T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)$  构成  $\mathbb{R}_n[x]$  的一组正交基。称  $T_n(x)$  为 Chebyshev 多项式。

**证明** 先说明  $T_0, T_1, \dots, T_n$  都属于  $\mathbb{R}_n[x]$ 。由定义

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

可知它确实是一个关于  $x$  的多项式, 称为第  $m$  个 Chebyshev 多项式; 并且  $\deg T_m = m$ 。因此

$$T_0, T_1, \dots, T_n$$

的次数互不相同, 从而线性无关。由于  $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$ , 只要证明它们两两正交, 就得到它们构成一组正交基。

对任意  $0 \leq m, k \leq n$ , 令

$$x = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

则

$$T_m(x) = \cos(m\theta), \quad T_k(x) = \cos(k\theta),$$

且

$$dx = -\sin \theta d\theta, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin \theta.$$

因而

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(k\theta) d\theta.$$

当  $m \neq k$  时, 上式等于 0; 而当  $m = k$  时, 它等于

$$\begin{cases} \pi, & m = k = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = k \geq 1. \end{cases}$$

因此  $T_0, T_1, \dots, T_n$  两两正交。

综上,  $T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)$  构成  $\mathbb{R}_n[x]$  的一组正交基。

### 作业 7.35 (Ch7 T35)

验证

$$1. A = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})i & \frac{1}{2}i & -(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})i \\ \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})i & \frac{1}{2}i & (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})i \end{bmatrix} \text{ 为酉阵;}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & -i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix} \text{ 为 Hermite 阵.}$$

解

1. 记题中矩阵为  $A$ 。直接计算可得

$$A^H A = I_3, \quad A A^H = I_3.$$

因此  $A$  为酉阵。

2. 记题中矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & -i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}.$$

它的共轭转置为

$$B^H = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & -i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix} = B.$$

所以  $B$  是 Hermite 阵。

### 作业 7.36 (Ch7 T36)

证明: 酉变换的特征值的模等于 1。

**证明** 设  $\lambda$  是酉变换  $U$  的特征值,  $x \neq 0$  是对应特征向量, 则

$$Ux = \lambda x.$$

由于酉变换保持向量长度, 所以

$$\|Ux\| = \|x\|.$$

而由  $Ux = \lambda x$  得

$$\|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

因此

$$|\lambda| \|x\| = \|x\|.$$

因为  $x \neq 0$ , 故  $\|x\| \neq 0$ , 从而

$$|\lambda| = 1.$$

所以酉变换的特征值的模都等于 1。

#### 作业 7.37 (Ch7 T37)

证明:

1. 酉阵的不同特征值所对应的特征向量是两两正交的;
2. Hermite 阵的不同特征值对应的特征向量是两两正交的。

证明

1. 设  $Ux = \lambda x, Uy = \mu y$ , 其中  $x, y \neq 0$ , 且  $\lambda \neq \mu$ 。因为  $U$  是酉变换, 所以

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

另一方面,

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \bar{\lambda} \mu \langle x, y \rangle.$$

因而

$$(1 - \bar{\lambda} \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

又由上一题知  $|\lambda| = |\mu| = 1$ , 故若  $\bar{\lambda} \mu = 1$  就有  $\mu = \lambda$ , 与假设矛盾。因此

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

所以酉阵的不同特征值所对应的特征向量两两正交。

2. 设  $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$ , 其中  $A$  为 Hermite 阵, 且  $\lambda \neq \mu$ 。则

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

由于  $A^H = A$ , 有

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

故

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

因为  $\lambda \neq \mu$ , 故

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

所以 Hermite 阵的不同特征值对应的特征向量也两两正交。

#### 作业 7.38 (Ch7 T38)

证明:

1. 设  $A$  为可逆 Hermite 阵, 则  $A^{-1}$  也为 Hermite 阵;
2. 设  $A, B$  都是  $n$  阶 Hermite 阵, 那么  $AB$  也是 Hermite 阵的充分必要条件是  $AB = BA$ 。

证明

1. 因为  $A$  可逆且是 Hermite 阵, 所以

$$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1} = A^{-1}.$$

因此  $A^{-1}$  也是 Hermite 阵。

2. 若  $AB$  是 Hermite 阵, 则

$$AB = (AB)^H = B^H A^H = BA,$$

因为  $A, B$  都是 Hermite 阵。

反之, 若  $AB = BA$ , 则

$$(AB)^H = B^H A^H = BA = AB.$$

因此  $AB$  也是 Hermite 阵。

所以  $AB$  是 Hermite 阵的充要条件是  $AB = BA$ 。

#### 作业 7.39 (Ch7 T39)

设  $A$  为 Hermite 阵, 证明:

1.  $I \pm iA$  为可逆阵;
2.  $I + iA$  与  $I - iA$  乘法可交换;
3.  $U = (I + iA)(I - iA)^{-1}$  为酉阵。

#### 证明

1. 先证  $I - iA$  可逆。若存在非零向量  $x$  使得

$$(I - iA)x = 0,$$

则

$$x = iAx.$$

左乘  $x^H$  得

$$x^H x = ix^H Ax.$$

由于  $A$  是 Hermite 阵,  $x^H Ax$  为实数, 所以右边是纯虚数; 而左边  $x^H x = \|x\|^2$  是非负实数。二者相等只可能同时为 0, 从而  $x = 0$ , 矛盾。因此  $I - iA$  可逆。

同理可证  $I + iA$  也可逆。

2.

$$(I + iA)(I - iA) = I + A^2 = (I - iA)(I + iA).$$

所以  $I + iA$  与  $I - iA$  乘法可交换。

3. 令

$$U = (I + iA)(I - iA)^{-1}.$$

因为  $A^H = A$ , 故

$$U^H = ((I - iA)^{-1})^H (I + iA)^H = (I + iA)^{-1} (I - iA).$$

由第 2 问的可交换性,

$$U^H U = (I + iA)^{-1} (I - iA) (I + iA) (I - iA)^{-1} = I.$$

同理  $UU^H = I$ , 所以  $U$  为酉阵。

#### 作业 7.40 (Ch7 T40)

若  $AA^H = 0$ , 证明:  $A = 0$ 。

**证明** 对等式  $AA^H = 0$  取迹, 得

$$0 = \text{tr}(AA^H).$$

但

$$\text{tr}(AA^H) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq 0.$$

只有当所有  $a_{ij} = 0$  时, 这个和才等于 0。因此  $A = 0$ 。

**作业 7.41 (Ch7 T41)**

设  $U$  为酉阵, 且  $U^{-1}AU = B$ , 证明:

$$\text{tr}(A^H A) = \text{tr}(B^H B).$$

**证明** 因为  $U$  为酉阵, 所以

$$U^{-1} = U^H.$$

又由题设

$$B = U^{-1}AU = U^H AU.$$

因而

$$B^H = (U^H AU)^H = U^H A^H U.$$

于是

$$B^H B = U^H A^H U U^H AU = U^H A^H AU.$$

两边取迹, 并利用迹的循环不变性, 得

$$\text{tr}(B^H B) = \text{tr}(U^H A^H AU) = \text{tr}(A^H AUU^H) = \text{tr}(A^H A).$$

命题得证。

**作业 7.42 (Ch7 T42)**

已知 Hermite 阵

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

求酉方阵  $U$  使得  $U^{-1}HU$  为对角阵。

**解** 由于

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

满足  $H^H = H$ , 故  $H$  是 Hermite 阵, 因此可以酉对角化。

先求特征多项式:

$$\det(\lambda I - H) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

所以特征值为

$$-1, -1, 2.$$

---

对于特征值  $-1$ ，可取两个线性无关特征向量

$$v_1 = (i, 1, 0)^\top, \quad v_2 = (-1, 0, 1)^\top.$$

对它们做 Gram-Schmidt 正交化并单位化，得到

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0)^\top, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -i, 2)^\top.$$

对于特征值  $2$ ，可取单位特征向量

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, 1)^\top.$$

令

$$U = (e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

则  $U$  为酉矩阵，且

$$U^{-1}HU = U^H HU = \text{diag}(-1, -1, 2).$$

## 第八章 实二次型

### 作业 8.1 (Ch8 T1)

将下列二次型表示成矩阵形式

1.  $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$ ;
2.  $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$ ;
3.  $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_1x_4 + 6x_2x_3 + 7x_2x_4 + 10x_3x_4$ ;
4.  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+2})^2$ .



解

1. 只要把交叉项系数平分到对称矩阵的非对角元上即可, 因此

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} x.$$

- 2.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- 3.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

4. 展开得

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i^2 - 2x_i x_{i+2} + x_{i+2}^2).$$

因而对应的对称矩阵是一个只在主对角线与第 2 条上、下副对角线非零的矩阵:

$$Q(x) = x^T A x,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

更具体地说,  $A$  的主对角元为

$$1, 1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1, 1,$$

并且

$$a_{i,i+2} = a_{i+2,i} = -1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

其余元素全为 0。

### 作业 8.2 (Ch8 T2)

写出下列对称矩阵对应的二次型

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**解** 设  $x = (x_1, x_2, \dots)^\top$ , 则二次型由公式

$$Q(x) = x^\top A x$$

直接展开得到。

1.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

2.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2bx_1x_2 + 2bx_2x_3.$$

3.

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$$

### 作业 8.3 (Ch8 T3)

用配方法将下列二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换

1.  $Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

2.  $Q = x_1^2 + x_2x_3$

3.  $Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$

4.  $Q = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

**解**

1.

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

令

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_2 = x_2 + x_3, \quad y_3 = x_2 - x_3,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2.$$

由

$$x_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_3 = \frac{y_2 - y_3}{2},$$

得

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2.$$

因而相应可逆线性变换可写为

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} y.$$

2.

$$Q = x_1^2 + x_2x_3 = x_1^2 + \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2.$$

令

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_3 = \frac{x_2 - x_3}{2},$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

其逆变换为

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + y_3, \quad x_3 = y_2 - y_3.$$

3.

$$Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4).$$

因而

$$Q = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{2}\right)^2.$$

令

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{2},$$

$$y_3 = x_1 - x_3, \quad y_4 = x_2 - x_4,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 - y_2^2.$$

逆变换为

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_4}{2}, \quad x_3 = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{2}, \quad x_4 = \frac{y_1 - y_2 - y_4}{2}.$$

4.

$$\begin{aligned} Q &= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 4\left(x_2 - \frac{x_3}{2}\right)^2 - 5x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 - \frac{x_3}{2}, \quad y_3 = x_3,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2.$$

逆变换为

$$x_1 = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}y_3, \quad x_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \quad x_3 = y_3.$$

#### 作业 8.4 (Ch8 T4)

用初等变换法将下列二次型化成标准形，并求相应的可逆线性变换

$$\begin{aligned} (1) Q &= x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x & (2) Q &= x^T \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \\ (3) Q &= x^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x & (4) Q &= x^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

解

1. 由同步初等变换可把

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

化为对角阵

$$\text{diag} \left( 2, \frac{5}{2}, -\frac{2}{5} \right).$$

因而标准形为

$$Q = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2.$$

对应的可逆线性变换可取

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y.$$

2. 对应二次型为

$$Q = -2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

直接配方得

$$Q = (x_2 + x_3 - x_1)^2 - (x_1 - x_3)^2.$$

令

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 - x_3, \quad y_3 = x_3,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 - y_2^2.$$

逆变换为

$$x_1 = y_2 + y_3, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3.$$

3. 对应二次型为

$$Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

令

$$u = x_2 + x_3, \quad v = x_2 - x_3,$$

则

$$Q = 2x_1u - \frac{u^2 - v^2}{2} = 2x_1^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}(u - 2x_1)^2.$$

令

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_3, \quad y_3 = x_2 + x_3 - 2x_1,$$

则标准形为

$$Q = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

逆变换为

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 + \frac{y_2 + y_3}{2}, \quad x_3 = y_1 + \frac{y_3 - y_2}{2}.$$

4. 对应二次型为

$$Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1.$$

与上题第3小题同理, 令

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{2},$$

$$y_3 = x_1 - x_3, \quad y_4 = x_2 - x_4,$$

则标准形为

$$Q = y_1^2 - y_2^2.$$

对应逆变换为

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_4}{2}, \quad x_3 = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{2}, \quad x_4 = \frac{y_1 - y_2 - y_4}{2}.$$

#### 作业 8.5 (Ch8 T5)

求正交变换化下列实二次型为标准形

1.  $Q = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

2.  $Q = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_2x_3 - 16x_1x_3$

3.  $Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$

4.  $Q = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$

**解** 对每一问, 先写出对应对称矩阵, 再取其一组标准正交特征向量, 组成正交矩阵  $P$ , 令  $x = Py$  即可。

1. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

它的特征值为

$$9, 0, 0.$$

可取对应标准正交特征向量为

$$e_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T, \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, 4, 5)^T.$$

令

$$P_1 = (e_1, e_2, e_3),$$

则

$$P_1^T A P_1 = \text{diag}(9, 0, 0),$$

故标准形为

$$Q = 9y_1^2.$$

2. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

它的特征值为

$$9, 9, -9.$$

可取对应标准正交特征向量为

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^T, \quad e_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)^T.$$

令

$$P_2 = (e_1, e_2, e_3),$$

则

$$P_2^T A P_2 = \text{diag}(9, 9, -9),$$

所以标准形为

$$Q = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2.$$

3. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

它的特征值为

$$6, -3, -3.$$

可取标准正交特征向量为

$$e_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^T, \\ e_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T, \quad e_3 = \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^T.$$

令

$$P_3 = (e_1, e_2, e_3),$$

则

$$P_3^T A P_3 = \text{diag}(6, -3, -3),$$

因而标准形为

$$Q = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2.$$

4. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

可取一组标准正交特征向量为

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^\top, & e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^\top, \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)^\top, & e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)^\top. \end{aligned}$$

其中  $e_1, e_2$  对应特征值 1,  $e_3, e_4$  对应特征值 -1。令

$$P_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4),$$

则

$$P_4^\top A P_4 = \text{diag}(1, 1, -1, -1),$$

所以标准形为

$$Q = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

#### 作业 8.6 (Ch8 T6)

试证: 在实数域上, 对称矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  不相合。

**证明** 设这两个矩阵在实数域上相合, 则存在可逆实矩阵

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

使得

$$P^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

左边就是

$$P^\top P = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

因而应有

$$b^2 + d^2 = -1,$$

这在实数域上显然不可能。

所以不存在这样的可逆实矩阵  $P$ , 故

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

在实数域上不相合。

### 作业 8.7 (Ch8 T7)

证明: 秩等于  $r$  的对称矩阵可以表示成  $r$  个秩等于 1 的对称矩阵之和。

**证明** 因为  $A$  是实对称矩阵, 且  $\text{rank}(A) = r$ , 所以存在正交矩阵  $P$ , 使得

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) P^T,$$

其中

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \neq 0.$$

记  $p_i$  为  $P$  的第  $i$  列, 则

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i p_i^T.$$

对每个  $i$ , 矩阵

$$A_i = \lambda_i p_i p_i^T$$

显然是对称矩阵。

又因为  $p_i p_i^T$  的列空间由向量  $p_i$  张成, 所以  $\text{rank}(p_i p_i^T) = 1$ , 从而

$$\text{rank}(A_i) = 1.$$

因此  $A$  可以表示成  $r$  个秩为 1 的对称矩阵之和:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_r.$$

### 作业 8.8 (Ch8 T8)

设  $A$  是一个  $n$  阶方阵, 证明:

1.  $A$  是反对称阵, 当且仅当对任一个  $n$  维向量  $x$ , 有  $x^T A x = 0$ ;
2. 如果  $A$  为对称阵, 且对任一个  $n$  维向量  $x$ , 有  $x^T A x = 0$ , 那么  $A = 0$ .

**证明**

1. 先证必要性。若  $A$  是反对称阵, 即  $A^T = -A$ , 则对任意向量  $x$ , 有

$$x^T A x = (x^T A x)^T = x^T A^T x = x^T (-A) x = -x^T A x.$$

所以

$$x^T A x = 0.$$

再证充分性。若对任意向量  $x$  都有  $x^T A x = 0$ , 取标准基向量  $e_i$ , 得

$$e_i^T A e_i = a_{ii} = 0.$$

再取  $x = e_i + e_j$ , 则

$$0 = (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}.$$

因而

$$a_{ji} = -a_{ij},$$

即  $A^T = -A$ , 故  $A$  为反对称阵。

2. 由题设  $A$  是对称阵, 且对任意向量  $x$  有  $x^T A x = 0$ 。由第 1 问可知,  $A$  又是反对称阵, 因此

$$A^T = A = -A.$$

故

$$A = 0.$$

### 作业 8.9 (Ch8 T9)

求习题 5 中二次型的规范形。

**解** 由第 5 题的标准形再经非零比例缩放, 就可得到规范形。

1. 第 5 题第 1 小题的标准形为

$$9y_1^2.$$

令  $z_1 = 3y_1$ , 则规范形为

$$z_1^2.$$

2. 第 5 题第 2 小题的标准形为

$$9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2.$$

令  $z_i = 3y_i$ , 则规范形为

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

3. 第 5 题第 3 小题的标准形为

$$6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2.$$

令

$$z_1 = \sqrt{6}y_1, \quad z_2 = \sqrt{3}y_2, \quad z_3 = \sqrt{3}y_3,$$

则规范形为

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

4. 第 5 题第 4 小题的标准形已经是

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2,$$

所以它的规范形就是

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - z_4^2.$$

### 作业 8.10 (Ch8 T10)

设  $A$  是  $n$  阶实对称阵, 且  $A^2 = I$ , 求  $A$  的相合规范形。

**解** 因为  $A$  是实对称阵, 所以存在正交矩阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

又由

$$A^2 = I$$

可知每个特征值  $\lambda_i$  都满足

$$\lambda_i^2 = 1,$$

即

$$\lambda_i = 1 \quad \text{或} \quad -1.$$

设其中有  $r$  个特征值等于 1, 其余  $n-r$  个特征值等于  $-1$ , 则

$$P^T A P = \text{diag}(I_r, -I_{n-r}).$$

由于相合与正交相似在这里由同一个正交矩阵给出, 所以  $A$  的相合规范形就是

$$\text{diag}(I_r, -I_{n-r}).$$

### 作业 8.11 (Ch8 T11)

确定以下二次曲线的类型、形状与位置。

1.  $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 4y + 6 = 0$ ;
2.  $x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 28 = 0$ ;
3.  $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ .

解

1. 方程为

$$3x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 4y + 6 = 0.$$

先平移到中心。由

$$\frac{\partial}{\partial x} = 6x + 4y + 8, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 4x + 4y + 4$$

得中心为

$$(-2, 1).$$

令

$$x = u - 2, \quad y = v + 1,$$

则原方程化为

$$3u^2 + 4uv + 2v^2 = 0.$$

其对应矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

的两个特征值都为正, 因此左边是正定二次型, 只能在

$$u = v = 0$$

时取零。故该二次曲线退化为一个点, 即点

$$(-2, 1).$$

2. 方程为

$$x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 28 = 0.$$

由

$$2x + y - 11 = 0, \quad x - 4y - 1 = 0$$

得中心为

$$(5, 1).$$

令

$$x = u + 5, \quad y = v + 1,$$

则方程化为

$$u^2 + uv - 2v^2 = 0 = (u - v)(u + 2v).$$

所以它表示两条相交直线。化回原坐标, 得

$$x - y - 4 = 0, \quad x + 2y - 7 = 0.$$

因而该二次曲线是以点

$$(5, 1)$$

为交点的一对相交直线。

3. 方程为

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

先把二次项写成平方:

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2.$$

取正交变换

$$u = \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, \quad v = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}},$$

则逆变换为

$$x = \frac{2u + v}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{-u + 2v}{\sqrt{5}}.$$

代入原方程得

$$5u^2 + 2\sqrt{5}u - 6\sqrt{5}v + 7 = 0.$$

再配方, 得

$$5\left(u + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 6\sqrt{5}\left(v - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

令

$$U = u + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad V = v - \frac{1}{\sqrt{5}},$$

则最简形式为

$$U^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}V.$$

所以它是一条抛物线, 顶点对应于

$$U = 0, \quad V = 0,$$

即原坐标中的顶点为

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

它的轴方向与  $v$  轴一致, 因此轴方向向量可取

$$(1, 2).$$

### 作业 8.12 (Ch8 T12)

将二次方程化为最简形式, 并判断曲面类型.

1.  $4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz - 4x + 4y + 4z - 5 = 0.$
2.  $x^2 - \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{16}{3}\sqrt{2}yz + 4x + \frac{8}{3}\sqrt{3}z - 1 = 0.$

解

1. 原方程为

$$4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz - 4x + 4y + 4z - 5 = 0.$$

对变量  $y, z$  作正交变换

$$u = x, \quad v = \frac{y-z}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{y+z}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$4u^2 - 4u - 4v^2 - 8w^2 + 4\sqrt{2}w - 5 = 0.$$

配方得

$$4\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - 4v^2 - 8\left(w - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 5.$$

再令

$$U = u - \frac{1}{2}, \quad V = v, \quad W = w - \frac{\sqrt{2}}{4},$$

则最简形式为

$$4U^2 - 4V^2 - 8W^2 = 5,$$

或写成

$$\frac{U^2}{5/4} - \frac{V^2}{5/4} - \frac{W^2}{5/8} = 1.$$

故它表示一个双叶双曲面。

2. 原方程为

$$x^2 - \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{16}{3}\sqrt{2}yz + 4x + \frac{8}{3}\sqrt{3}z - 1 = 0.$$

对变量  $y, z$  作正交变换

$$x' = x, \quad y' = \frac{-y + \sqrt{2}z}{\sqrt{3}}, \quad z' = \frac{z + \sqrt{2}y}{\sqrt{3}},$$

则原方程化为

$$x'^2 + 4x' + 4y'^2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}y' - 4z'^2 + \frac{8}{3}z' - 1 = 0.$$

配方得

$$(x' + 2)^2 + 4\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 4\left(z' - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}.$$

令

$$X = x' + 2, \quad Y = y' + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad Z = z' - \frac{1}{3},$$

则最简形式为

$$X^2 + 4Y^2 - 4Z^2 = \frac{49}{9},$$

即

$$\frac{X^2}{49/9} + \frac{Y^2}{49/36} - \frac{Z^2}{49/36} = 1.$$

故它表示一个单叶双曲面。

### 作业 8.13 (Ch8 T13)

在三维空间直角坐标系中, 给定曲面方程

$$2x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz + 6yz - 20 = 0.$$

利用正交变换将其化为标准型。该方程表示什么曲面?

**解** 记二次型对应的实对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

计算特征多项式。 $A$  的迹为  $\text{tr}(A) = 11$ , 二阶顺序主子式之和为

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 7 + 6 + 11 = 24,$$

行列式为

$$\det A = 2(20 - 9) + 1(-5 - 6) + 2(-3 - 8) = -11.$$

因而特征方程为

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 24\lambda + 11 = 0.$$

作代换  $\lambda = t + \frac{11}{3}$ , 消去二次项, 得到降阶三次方程

$$t^3 - \frac{49}{3}t + \frac{11}{27} = 0.$$

令  $t = \frac{14}{3} \cos \varphi$ , 代入得

$$\cos 3\varphi = -\frac{11}{686}.$$

记

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{11}{686}\right),$$

则三个特征值为

$$\lambda_k = \frac{11}{3} + \frac{14}{3} \cos\left(\varphi_0 + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

下面用顺序主子式判断特征值的正负号。 $A$  的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 7 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = -11 < 0.$$

序列  $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  的符号为  $+, +, +, -$ , 恰有一次变号, 因此  $A$  恰有一个负特征值、两个正特征值。

由实对称矩阵的正交对角化定理, 存在正交矩阵  $P$ , 使得在正交变换  $x = Py$  下原方程化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 20,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ 。化为

$$\frac{y_1^2}{20/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{20/\lambda_2} - \frac{y_3^2}{20/|\lambda_3|} = 1.$$

因为有两个正系数和一个负系数，所以该曲面是单叶双曲面。

#### 作业 8.14 (Ch8 T14)

判断下列二次型是否是正定二次型

1.  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ ;
2.  $Q(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ ;
3.  $Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ ;
4.  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + x_1x_3$ .

**解** 用 Sylvester 判别法判断。

1. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \det A = 0.$$

因此它不是正定二次型，而是半正定二次型。

2. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

第一顺序主子式

$$\Delta_1 = -5 < 0,$$

故不可能正定。

3. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

顺序主子式为

$$\Delta_1 = 7, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 6, \quad \Delta_3 = \det A = 2.$$

全部大于零，所以它是正定二次型。

4. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 5 & -3 \\ \frac{1}{2} & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \det A = -\frac{29}{4} < 0.$$

因此它不是正定二次型。

### 作业 8.15 (Ch8 T15)

判断下列矩阵是否是正定矩阵

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



解 仍用 Sylvester 判别法。

1. 对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

有

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \frac{15}{4}, \quad \Delta_3 = \det A = -5.$$

因而它不是正定矩阵。

2. 对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \det A = -1.$$

所以它也不是正定矩阵。

### 作业 8.16 (Ch8 T16)

问参数  $t$  满足什么条件时, 下列二次型正定?

1.  $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_1x_3$

2.  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + tx_1x_2 + tx_1x_3 + x_2x_3$



解 用 Sylvester 判别法。

1. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其顺序主子式为

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det A = 1 - \frac{t^2}{4}.$$

因而正定当且仅当

$$1 - \frac{t^2}{4} > 0,$$

即

$$-2 < t < 2.$$

2. 对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 \end{bmatrix} = 2 - \frac{t^2}{4},$$

$$\Delta_3 = \det A = \frac{23 - 4t^2}{4}.$$

因而正定当且仅当

$$2 - \frac{t^2}{4} > 0, \quad \frac{23 - 4t^2}{4} > 0.$$

其中后一个条件更强, 于是

$$-\frac{\sqrt{23}}{2} < t < \frac{\sqrt{23}}{2}.$$

#### 作业 8.17 (Ch8 T17)

证明: 对任意实数  $x, y$ , 二元二次多项式  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$  恒大于零.

**证明** 题中式子实际上是三元二次型

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz.$$

它对应的对称矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

计算顺序主子式:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 5 > 0.$$

由 Sylvester 判别法可知,  $A$  是正定矩阵, 因此对应二次型正定。

所以对任意不全为零的实数  $x, y, z$ , 都有

$$f(x, y, z) > 0.$$

#### 作业 8.18 (Ch8 T18)

设  $Q = ax_1^2 + bx_2^2 + ax_3^2 + 2cx_1x_3$ , 问  $a, b, c$  满足什么条件时,  $Q$  为正定?

解 该二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}.$$

用 Sylvester 判别法, 只需考察顺序主子式:

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = ab, \quad \Delta_3 = \det A = b(a^2 - c^2).$$

因而  $Q$  正定当且仅当

$$a > 0, \quad ab > 0, \quad b(a^2 - c^2) > 0.$$

这等价于

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a^2 - c^2 > 0.$$

最后一个条件又等价于

$$-a < c < a.$$

所以所求条件为

$$a > 0, \quad b > 0, \quad -a < c < a.$$

#### 作业 8.19 (Ch8 T19)

试证: 二次型  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$  负定的充分必要条件是  $A$  的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零。

证明 设  $A_k$  表示  $A$  的  $k$  阶顺序主子矩阵, 记

$$\Delta_k = \det(A_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

二次型

$$Q(x) = x^T A x$$

负定, 当且仅当二次型

$$-Q(x) = x^T (-A) x$$

正定。

由 Sylvester 判别法,  $-Q$  正定当且仅当矩阵  $-A$  的各阶顺序主子式全大于零, 即

$$\det((-A)_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

但

$$(-A)_k = -A_k,$$

所以

$$\det((-A)_k) = (-1)^k \det(A_k) = (-1)^k \Delta_k.$$

因而条件

$$\det((-A)_k) > 0$$

等价于

$$(-1)^k \Delta_k > 0.$$

这就是说:

$$\Delta_k < 0 \quad (k \text{ 为奇数}), \quad \Delta_k > 0 \quad (k \text{ 为偶数}).$$

故二次型  $Q$  负定的充分必要条件就是  $A$  的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零。

### 作业 8.20 (Ch8 T20)

设有  $n$  元实二次型

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

其中  $a_i (i = 1, \dots, n)$  为实数, 试问: 当  $a_1, \dots, a_n$  满足何种条件时,  $Q(x_1, \dots, x_n)$  为正定二次型?

**解** 记循环矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

则题中二次型可以写成

$$Q(x) = \|Cx\|^2 = x^T C^T C x.$$

因而  $Q$  总是半正定的。

要使  $Q$  正定, 必须且只须对任意非零向量  $x$  都有  $Cx \neq 0$ , 也就是矩阵  $C$  可逆。因此问题化为求

$$\det C \neq 0$$

的条件。

按第一列展开, 可得

$$\det C = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

所以  $Q$  为正定的充分必要条件是

$$1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0,$$

即

$$a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n.$$

### 作业 8.21 (Ch8 T21)

在  $Q = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$  中, 问

1. 哪些  $\lambda$  的值使得  $Q$  为正定?
2. 哪些  $\lambda$  的值使得  $Q$  为负定?
3. 当  $\lambda = 2$  和  $\lambda = -1$  时,  $Q$  为什么类型?

**解** 二次型对应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式为

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det A = \lambda^3 - 3\lambda - 2.$$

又

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

1.  $Q$  正定当且仅当

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

由此得

$$\lambda > 0, \quad |\lambda| > 1, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 > 0.$$

综合可得

$$\lambda > 2.$$

2.  $Q$  负定当且仅当

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0.$$

故

$$\lambda < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 < 0.$$

综合可得

$$\lambda < -1.$$

3. 当  $\lambda = 2$  时,

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 0,$$

所以  $Q$  为半正定型。

当  $\lambda = -1$  时,

$$-Q$$

对应矩阵的顺序主子式为

$$1 > 0, \quad 0, \quad 0,$$

故  $-Q$  半正定, 因此  $Q$  为半负定型。

#### 作业 8.22 (Ch8 T22)

设  $A$  为  $n$  阶实对称阵, 证明: 若  $A$  正定, 则对任意正整数  $k$ ,  $A^k$  为正定。

**证明** 因为  $A$  是实对称正定矩阵, 所以存在正交矩阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i > 0.$$

于是

$$A^k = P \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) P^T.$$

由于每个  $\lambda_i^k$  仍大于零, 所以  $A^k$  的全部特征值都为正, 从而  $A^k$  仍为正定矩阵。

#### 作业 8.23 (Ch8 T23)

设  $A$  为  $n$  阶可逆实对称阵, 证明:

1. 若  $A$  正定, 则  $A^{-1}$  亦正定.
2. 若  $A$  正定, 则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  也是正定矩阵.

### 证明

1. 若  $A$  正定, 则对任意非零向量  $x$ , 令  $y = A^{-1}x$ , 则  $y \neq 0$ , 并且

$$x^T A^{-1} x = (Ay)^T y = y^T A y > 0.$$

故  $A^{-1}$  也正定。

2. 由第 1 问知  $A^{-1}$  正定。又因为

$$A^* = \det(A) A^{-1},$$

且正定矩阵的行列式大于零, 所以  $\det(A) > 0$ 。正数倍的正定矩阵仍正定, 因此  $A^*$  也是正定矩阵。

#### 作业 8.24 (Ch8 T24)

设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 若  $A^2 = I$ , 证明  $A + I$  为正定矩阵或半正定矩阵。

**证明** 因为  $A$  是实对称矩阵, 故存在正交矩阵  $P$ , 使得

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

又由  $A^2 = I$ , 知每个特征值满足

$$\lambda_i^2 = 1,$$

所以

$$\lambda_i = \pm 1.$$

因而

$$P^T (A + I) P = \text{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1).$$

这些对角元都等于 0 或 2, 从而全都非负。故  $A + I$  至少是半正定矩阵; 若没有特征值  $-1$ , 则所有对角元都等于 2, 这时  $A + I$  还是正定矩阵。

因此  $A + I$  为正定矩阵或半正定矩阵。

#### 作业 8.25 (Ch8 T25)

设  $A, B$  是两个  $n$  阶实对称正定矩阵, 证明:

1.  $A + B$  亦正定;
2.  $AB$  正定的充分必要条件是  $AB = BA$ .

### 证明

1. 对任意非零向量  $x$ , 有

$$x^T (A + B) x = x^T A x + x^T B x.$$

由于  $A, B$  都正定, 所以

$$x^T A x > 0, \quad x^T B x > 0.$$

因此

$$x^T (A + B) x > 0,$$

即  $A + B$  也正定。

2. 先证充分性。若  $AB = BA$ , 则由  $A$  正定知存在正定平方根  $A^{1/2}$ 。因为  $B$  与  $A$  可交换, 所以也与  $A^{1/2}$  可交换。于是

$$AB = A^{1/2} B A^{1/2}.$$

对任意非零向量  $x$ , 令  $y = A^{1/2}x$ , 则  $y \neq 0$ , 故

$$x^T ABx = x^T A^{1/2} B A^{1/2} x = y^T B y > 0.$$

所以  $AB$  正定。

再证必要性。若  $AB$  正定, 则  $AB$  本身必是对称矩阵, 因此

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

所以  $AB = BA$ 。

#### 作业 8.26 (Ch8 T26)

设  $A, B$  均为  $n$  阶实对称阵, 其中  $A$  为正定阵, 证明: 当实数  $t$  充分大后,  $tA + B$  亦正定.



**证明** 因为  $A \succ 0$ , 存在正定平方根  $A^{1/2}$ 。令

$$C = A^{-1/2} B A^{-1/2}.$$

由于  $B$  对称,  $C$  也是实对称矩阵。于是

$$tA + B = A^{1/2}(tI + C)A^{1/2}.$$

设  $C$  的最小特征值为  $\lambda_{\min}(C)$ 。当

$$t > -\lambda_{\min}(C)$$

时, 矩阵  $tI + C$  的全部特征值都大于零, 从而  $tI + C \succ 0$ 。于是对任意非零向量  $x$ , 令  $y = A^{1/2}x$ , 则

$$x^T (tA + B)x = y^T (tI + C)y > 0.$$

故当  $t$  充分大时,  $tA + B$  亦正定。

#### 作业 8.27 (Ch8 T27)

$A$  是实对称正定矩阵, 证明: 存在下三角阵  $P$ , 使得  $A = PP^T$ 。进一步证明, 存在下三角阵  $L$ , 其对角线元素均为 1, 以及对角阵  $D$ , 其对角元均为正使得  $A = LDL^T$ 。



**证明** 先证存在下三角阵  $P$ , 使得  $A = PP^T$ 。

因为  $A$  正定, 所以可正交对角化为

$$A = QDQ^T,$$

其中  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  且每个  $d_i > 0$ 。令

$$S = QD^{1/2},$$

则

$$A = SS^T.$$

对  $S^T$  作 QR 分解:

$$S^T = UR,$$

其中  $U$  为正交矩阵,  $R$  为上三角矩阵, 并可取  $R$  的对角元全为正。于是

$$A = SS^T = R^T U^T U R = R^T R.$$

令

$$P = R^T,$$

则  $P$  为下三角阵, 且

$$A = PP^T.$$

再证  $LDL^T$  分解。设

$$D = \text{diag}(p_{11}^2, p_{22}^2, \dots, p_{nn}^2),$$

令

$$L = PD^{-1/2}.$$

因为  $P$  是下三角阵, 所以  $L$  也是下三角阵; 又  $L$  的对角元全等于 1。并且

$$A = PP^T = LD^{1/2}(LD^{1/2})^T = LDL^T.$$

其中  $D$  的对角元均为正。

### 作业 8.28 (Ch8 T28)

设  $A$  为  $n$  阶实对称阵, 且  $A > 0$ . 求证:  $\det(A) \leq \left(\frac{1}{n} \text{tr}(A)\right)^n$ .

**证明** 设  $A$  的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \lambda_i > 0.$$

则

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

由正数的算术平均数与几何平均数不等式,

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}.$$

两边取  $n$  次方即得

$$\det(A) \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n}\right)^n.$$

### 作业 8.29 (Ch8 T29)

证明: 若  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶正定矩阵, 则  $\det(A) \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .

**证明** 由上一题知, 正定矩阵  $A$  存在 Cholesky 分解

$$A = PP^T,$$

其中  $P = (p_{ij})$  为下三角阵。

因为

$$\det(A) = \det(P)^2 = (p_{11}p_{22} \cdots p_{nn})^2,$$

而对每个  $i$ , 有

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^i p_{ij}^2 \geq p_{ii}^2,$$

所以

$$a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \geq p_{11}^2 p_{22}^2 \cdots p_{nn}^2 = \det(A).$$

因而

$$\det(A) \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

### 作业 8.30 (Ch8 T30)

设  $A$  为  $n$  阶实对称方阵, 证明下列命题等价

1.  $A$  为半正定方阵.
2.  $A = P^T P$ , 其中  $P$  为  $n$  阶实方阵.
3.  $A$  的各阶主子式皆非负.

**证明** 证明这三个条件两两推出即可。

1. (1)  $\Rightarrow$  (2): 若  $A$  半正定, 则由实对称矩阵正交对角化定理, 存在正交矩阵  $Q$ , 使得

$$A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) Q^T, \quad \lambda_i \geq 0.$$

令

$$D^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}),$$

并取

$$P = D^{1/2} Q^T,$$

则

$$A = P^T P.$$

2. (2)  $\Rightarrow$  (1): 若  $A = P^T P$ , 则对任意向量  $x$ ,

$$x^T A x = x^T P^T P x = \|P x\|^2 \geq 0.$$

所以  $A$  半正定。

3. (1)  $\Rightarrow$  (3): 若  $A$  半正定, 则任一主子矩阵仍是半正定矩阵, 因此其全部特征值都非负。于是每个主子式, 即该主子矩阵的行列式, 都非负。
4. (3)  $\Rightarrow$  (1): 对  $n$  归纳。

当  $n = 1$  时结论显然成立。设结论对  $n - 1$  阶对称矩阵成立。将

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & r^T \\ r & B \end{bmatrix},$$

其中  $B$  为  $(n - 1)$  阶对称矩阵。由条件可知,  $B$  的各阶主子式也都非负, 因此由归纳假设,  $B \succeq 0$ 。

若  $a_{11} = 0$ , 则对任意  $i \geq 2$ , 二阶主子式

$$\det \begin{bmatrix} 0 & r_i \\ r_i & b_{ii} \end{bmatrix} = -r_i^2$$

非负, 只能有  $r_i = 0$ , 故  $r = 0$ 。于是

$$A = \operatorname{diag}(0, B) \succeq 0.$$

若  $a_{11} > 0$ , 作 Schur 补

$$S = B - \frac{1}{a_{11}} r r^T.$$

对任意指标集  $J \subset \{2, 3, \dots, n\}$ , 有

$$\det A_{\{1\} \cup J} = a_{11} \det(S_J) \geq 0,$$

因而  $S$  的各阶主子式也都非负。由归纳假设得  $S \succeq 0$ 。于是对任意向量  $x = (x_1, y)^T$ ,

$$x^T A x = a_{11} \left( x_1 + \frac{r^T y}{a_{11}} \right)^2 + y^T S y \geq 0.$$

因此  $A \succeq 0$ 。

综上，三条命题等价。

### 作业 8.31 (Ch8 T31)

在二次型  $Q = x^T A x$  中，实对称阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，若

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \det(A) = 0$$

证明:  $Q$  为半正定。

**证明** 记  $A$  的左上角  $(n-1)$  阶顺序主子矩阵为  $B$ ，并将  $A$  分块写成

$$A = \begin{bmatrix} B & b \\ b^T & c \end{bmatrix}.$$

由题设知  $B$  的各阶顺序主子式都大于零，因此由 Sylvester 判别法， $B$  是正定矩阵。

又因为

$$\det(A) = 0,$$

对块矩阵取 Schur 补可得

$$0 = \det(A) = \det(B)(c - b^T B^{-1} b).$$

由于  $\det(B) > 0$ ，故

$$c = b^T B^{-1} b.$$

现对任意向量  $x = (y, t)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ，有

$$Q(x) = x^T A x = y^T B y + 2tb^T y + ct^2.$$

代入  $c = b^T B^{-1} b$ ，得

$$Q(x) = y^T B y + 2tb^T y + t^2 b^T B^{-1} b = (y + tB^{-1}b)^T B(y + tB^{-1}b).$$

因为  $B$  正定，所以右边总是非负。故

$$Q(x) \geq 0, \quad \forall x.$$

这就证明了  $Q$  为半正定二次型。

### 作业 8.32 (Ch8 T32)

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $A = U \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix} V^T$  是  $A$  的奇异值分解，如定理 8.5.7 所述。令  $A^+ = V^T \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} U^T$ ，称  $A^+$  为矩阵  $A$  的广义逆。证明：

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

**证明** 记

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

则

$$A = U\Sigma V^T, \quad A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

其中  $U, V$  为正交矩阵。

于是

$$AA^+A = U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T U\Sigma V^T = U\Sigma\Sigma^+\Sigma V^T = U\Sigma V^T = A,$$

$$A^+AA^+ = V\Sigma^+ U^T U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T = V\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ U^T = V\Sigma^+ U^T = A^+.$$

再看对称性：

$$AA^+ = U\Sigma\Sigma^+ U^T, \quad A^+A = V\Sigma^+\Sigma V^T.$$

因为  $\Sigma\Sigma^+$  和  $\Sigma^+\Sigma$  都是实对角矩阵，所以都等于自己的转置，因此

$$(AA^+)^* = (AA^+)^T = AA^+, \quad (A^+A)^* = (A^+A)^T = A^+A.$$

命题得证。

### 作业 8.33 (Ch8 T33)

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 证明:  $\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sigma_{\max}$ , 这里  $\sigma_{\max}$  是矩阵  $A$  的最大奇异值. 称  $\|A\|$  为矩阵  $A$  的谱范数.

**证明** 设  $A$  的奇异值分解为

$$A = U\Sigma V^T,$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

于是  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ .

对任意非零向量  $x$ , 令

$$y = V^T x.$$

因为  $V$  为正交矩阵, 所以

$$\|y\| = \|x\|.$$

又因为  $U$  也正交, 故

$$\|Ax\| = \|U\Sigma V^T x\| = \|\Sigma y\|.$$

因此

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|\Sigma y\|^2}{\|y\|^2} = \frac{\sigma_1^2 y_1^2 + \sigma_2^2 y_2^2 + \dots + \sigma_r^2 y_r^2}{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \leq \sigma_1^2.$$

所以对任意非零  $x$  都有

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sigma_1.$$

即

$$\|A\| \leq \sigma_{\max}.$$

另一方面, 取  $y = e_1$ , 并令

$$x = V e_1,$$

则  $x \neq 0$ , 且

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|U\Sigma e_1\|}{\|V e_1\|} = \frac{\|\Sigma e_1\|}{\|e_1\|} = \sigma_1.$$

---

因而上界可以取到，故

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sigma_{\max}.$$