

期中复习

陈文轩

2026 年 8 月 1 日

复数与向量

定义：内积、模长与夹角

对于使用有序数组描述的向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$:

- 其内积定义为 $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;
- a 的模长定义为 $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$;
- a 与 b 的夹角 θ 定义为 $\theta = \arccos \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

若 $\theta = 0$ 或 π , 则称 a 与 b 平行; 若 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则称 a 与 b 正交。

命题：向量运算的性质

- ① 内积满足正定性，线性性与对称性；
- ② $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;
- ③ $|a \cdot b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ (柯西不等式);

定义：外积与混合积

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$:

- 其外积定义为 $a \times b = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$;

- 若 $c = (c_1, c_2, c_3)$, 定义其混合积为

$$(a, b, c) = a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

命题：外积与混合积性质

- ① 外积满足反对称性与分配律；
- ② $\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin \theta$, 其中 θ 为 a 与 b 的夹角；
- ③ 混合积 $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(a, c, b) = -(c, b, a)$ 。
- ④ 拉格朗日恒等式： $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ 。

定义：复数

复数 z 是形如 $z = a + bi$ 的数，其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位，满足 $i^2 = -1$ 。

- a 称为实部，记为 $\operatorname{Re}(z)$ ； b 称为虚部，记为 $\operatorname{Im}(z)$ 。
- 复数的共轭复数定义为 $\bar{z} = a - bi$ 。
- 复数 $a + bi$ 的模长定义为 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。
- 三角形式定义为 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 θ 称为幅角，记为 $\operatorname{Arg}(z)$ 。把在 $[0, 2\pi)$ 范围内的幅角称为幅角主值，记为 $\arg(z)$ 。

Euler 公式与单位根

定理 (Euler 公式)

对于任意实数 θ , 有 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

定义 (单位根)

n 次单位根是方程 $z^n = 1$ 的全部解:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

记 $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, 则 n 次单位根可表示为 ω_n^k .

线性方程组的 Gauss 消元法

算法：Gauss 消元法

可以把线性方程组写成矩阵形式 $Ax = b$ ，其中 A 称为系数矩阵， x 是未知数向量， b 称为常数向量，Gauss 消元法的步骤如下：

- ① 将线性方程组写成增广矩阵形式 $[A|b]$;
- ② 通过初等行变换将增广矩阵化为行阶梯形矩阵 $[U|b']$;
- ③ 若 $[U|b']$ 存在形如 $[0 \cdots 0 | c]$ 的行 ($c \neq 0$)，则方程组无解，否则将不作为某行首个非零元的未知数设为自由变量，通过回代求出方程组的通解。

例题：解线性方程组

求线性方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad \quad + 3x_4 = 20 \end{cases}$$

例题：解线性方程组

求线性方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad \quad + 3x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -20 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - \frac{2}{3}r_2 \\ r_2 \div (-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例题：解线性方程组

求线性方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad \quad + 3x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -18 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -20 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-\frac{2}{3}r_2 \\ r_2 \div (-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取 x_4 为自由变量，则由第三行得 $x_3 = 2 + \frac{1}{4}x_4$ ，由第二行得 $x_2 = 6 - x_4$ ，由第一行得

$x_1 = 2 - \frac{1}{4}x_4$ ，故通解为 $x = \left(2 - \frac{1}{4}t, 6 - t, 2 + \frac{1}{4}t, t\right)^T, t \in \mathbb{R}$ 。

行列式

定义：行列式的定义

定义 (逆序数定义)

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵, 则其行列式定义为:

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i}$$

定义 (递归定义)

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}, & n > 1 \end{cases}$$

其中 M_{1j} 是余子式, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 是代数余子式。

定义 (公理化定义)

n 阶行列式函数 $\det : \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ 是唯一满足以下性质的函数:

- ① 规范性: $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, 其中 e_i 是标准正交基;
- ② 反对称性: $\forall 1 \leq i < j \leq n, \det(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) = -\det(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots)$;
- ③ 线性性:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \det(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \mu \det(\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

命题：行列式的性质

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则有以下性质:

- ① $\det A = \det A^T$;
- ② 若 A 的某一行 (列) 全为零, 则 $\det A = 0$;
- ③ 若 A 的两行 (列) 相等, 则 $\det A = 0$;
- ④ 若 A 的两行 (列) 互换位置, 则行列式变号;
- ⑤ 若 A 的某一行 (列) 乘以 λ , 则行列式也乘以 λ ;
- ⑥ 若 A 的某一行 (列) 加上另一行 (列) 的 λ 倍, 则行列式不变;
- ⑦ 若 A 为上三角矩阵或下三角矩阵, 则 $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

行列式的常见计算方法

- ① 直接使用定义计算（适用于不超过 4 阶的行列式）；
- ② 加边法（加的边根据行列式的规律而定，最好可以消掉方阵中大多数元素）；
- ③ 逐行/列加减（目标是得到（准）上/下三角矩阵）；
- ④ 拆项与递推（适用于行列式元素有规律的情况）；
- ⑤ 进行乘法分解；
- ⑥ 考虑使用多项式技巧。

定理：Laplace 展开定理

设 A 是 n 阶方阵, 对任意正整数 $r < n$, 任意取定 r 个指标 $1 \leq i_1 < i_2, \dots < i_r \leq n$, 则 $\det A$ 的值等于它的第 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 行 (或列) 元组成的所有 r 阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和。即

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-1)^{\sum_{k=1}^r (i_k + j_k)} A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_{r+1} & \dots & i_n \\ j_{r+1} & \dots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-1)^{\sum_{k=1}^r (i_k + j_k)} A \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_r \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} j_{r+1} & \dots & j_n \\ i_{r+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n$ 是由 $1, 2, \dots, n$ 去掉 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到, $j_{r+1}, j_{r+2}, \dots, j_n$ 是由 $1, 2, \dots, n$ 去掉 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到。

定理: Binet-Cauchy 公式

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵。则:

$$\det(AB) = \begin{cases} \det A \det B, & m = n \\ 0, & m > n \\ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \det A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} \det B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}, & m < n \end{cases}$$

命题：乘法分解

- 若 A 可逆, 则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ 。
- 若 D 可逆, 则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$ 。
- 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times m}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$ 。
- 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\det(A - B^\top B) = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^\top)$ 。

命题：三对角线矩阵的行列式

设 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}_{n \times n}$, $x, y \in \mathbb{C}$ 是 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的根, 则有:

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$$

定理：Cramer 法则

对 n 阶矩阵 A , 若 $\det A \neq 0$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 该解的第 i 个分量为:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

其中 A_i 是由 A 的第 i 列替换为常数向量 b 后得到的矩阵。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若线性方程组有唯一解，则可用 Cramer 法则求解；
- ② 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 均有定义，则 $\det(AB) = \det(BA)$ ；
- ③ 设 A, B 为 n 阶矩阵，则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若线性方程组有唯一解，则可用 Cramer 法则求解；
- ② 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 均有定义，则 $\det(AB) = \det(BA)$ ；
- ③ 设 A, B 为 n 阶矩阵，则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$ 。

- ① 不正确。如 $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$ 有唯一解 $x = 1$ ，但系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 非方阵，不能使用 Cramer 法则。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若线性方程组有唯一解，则可用 Cramer 法则求解；
- ② 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 均有定义，则 $\det(AB) = \det(BA)$ ；
- ③ 设 A, B 为 n 阶矩阵，则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$ 。

① 不正确。如 $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$ 有唯一解 $x = 1$ ，但系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 非方阵，不能使用 Cramer 法则。

② 不正确。考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, B = A^\top$ ，则 $AB = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，故 $\det(AB) = 2, \det(BA) = 0$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若线性方程组有唯一解，则可用 Cramer 法则求解；
- ② 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 均有定义，则 $\det(AB) = \det(BA)$ ；
- ③ 设 A, B 为 n 阶矩阵，则 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$ 。

① 不正确。如 $\begin{cases} x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases}$ 有唯一解 $x = 1$ ，但系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 非方阵，不能使用 Cramer 法则。

② 不正确。考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, B = A^\top$ ，则 $AB = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，故 $\det(AB) = 2, \det(BA) = 0$ 。

③ 正确。

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{bmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)。$$

例题：计算行列式

计算行列式：

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

例题：计算行列式

计算行列式：

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{-r_1 \rightarrow r_i} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

例题：计算行列式

计算行列式：

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{-r_1 \rightarrow r_i} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

最后一列展开

$$(-1)^{n+1}(-2)^{n-1} = 2^{n-1}$$

例题：证明

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 证明：存在非零矩阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 使得 $AB = O$ 当且仅当 $\det A = 0$ 。

例题：证明

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 证明：存在非零矩阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 使得 $AB = O$ 当且仅当 $\det A = 0$ 。

充分性：若 $\det A = 0$, 则 A 不可逆, 故 $\exists x \neq 0$, 使得 $Ax = 0$ 。取 $B = (x, 0, \dots, 0)$ 即可。

例题：证明

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 证明：存在非零矩阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 使得 $AB = O$ 当且仅当 $\det A = 0$ 。

充分性：若 $\det A = 0$, 则 A 不可逆, 故 $\exists x \neq 0$, 使得 $Ax = 0$ 。取 $B = (x, 0, \dots, 0)$ 即可。

必要性：若存在非零矩阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 使得 $AB = O$, 则 B 的每一列都是 $Ax = 0$ 的解, 故 $Ax = 0$ 有非零解, 故 $\det A = 0$ 。

矩阵

定义：矩阵及其运算

- 矩阵是一个由数域 $\mathbb{F}$ 中元素按长方阵列排列成的二维数组。 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 。
- 加法： $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 。
- 数乘： $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$ 。
- 乘法：对于 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{p \times q}$, 当且仅当 $n = p$ 时有定义,
 $AB = C = (c_{ij})_{m \times q}$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 。

定义：转置与迹

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$:

- 矩阵 A 的转置定义为 $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ 。
- 若 A 为 n 阶方阵, 则称矩阵 A 的迹为 $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 。

命题：矩阵运算性质

设 A, B, C 为适当阶数的矩阵, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 则有以下性质:

- ① $(A^\top)^\top = A$; $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$; $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$; $(AB)^\top = B^\top A^\top$;
- ② $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$; $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$;
- ③ $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$;
- ④ $\text{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, 特别地, 对于实矩阵 A , $\text{tr}(AA^\top) = 0$ 当且仅当 $A = O$.

定义：逆矩阵

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 若存在矩阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $AB = BA = I_n$, 则称 A 可逆, 称 B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} 。
不可逆的方阵称为奇异阵。矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $\det A \neq 0$ 。

命题：逆矩阵的性质

设 A, B 为可逆矩阵，则有以下性质：

- ① $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$;
- ② 上/下三角矩阵可逆的充分必要条件是其对角线元素均不为零，且其逆矩阵仍为上/下三角矩阵；
- ③ 对称矩阵/反对称矩阵的逆矩阵仍为对称矩阵/反对称矩阵。

定义：伴随矩阵

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，则矩阵 A 的伴随矩阵定义为 $A^* = (A_{ji})_{n \times n}$ ，其中 A_{ji} 是 a_{ji} 的代数余子式。

性质： $AA^* = \det A \cdot I_n$ 。

命题：伴随矩阵性质

设 A, B 为 n 阶矩阵, $\lambda \in \mathbb{F}$, 则有以下性质:

- ① $\det A^* = (\det A)^{n-1}$;
- ② $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A \ (n \geq 2)$;
- ③ $(A^\top)^* = (A^*)^\top$;
- ④ $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1} A^*$;
- ⑤ $(AB)^* = B^* A^*$.

算法：计算逆矩阵

可以通过以下三种方法计算逆矩阵：

- ① 若 $\det A \neq 0$, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$;
- ② 将增广矩阵 $[A|I_n]$ 通过初等行变换化为 $[I_n|A^{-1}]$ 。注意一定不能使用列变换;
- ③ 使用 Sherman-Morrison 公式 $(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$, 适用于 A 可逆且 $1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$ 的情况。

命题：分块矩阵运算

- 分块矩阵是将矩阵分割为多个子矩阵，以便于处理较大的矩阵。设矩阵 A 可以分块表示为 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ， B 可以分块表示为 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ ，则在维度匹配时具有如下性质：
- 加法：** $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix};$
- 乘法：** $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$
- 除了分块为 2×2 的矩阵外，分块矩阵的加法与乘法也可以推广到更高维度的情况。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 A, B, C 是三个实对称矩阵，则 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$;
- ② 对 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{tr}((A - B)(A^\top - B^\top)) = 0$, 则 $A = B$;

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 A, B, C 是三个实对称矩阵，则 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$;
- ② 对 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{tr}((A - B)(A^\top - B^\top)) = 0$, 则 $A = B$;

① 正确。 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}((ABC)^\top) = \text{tr}(C^\top B^\top A^\top) = \text{tr}(CBA) = \text{tr}(ACB)$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 A, B, C 是三个实对称矩阵，则 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$;
- ② 对 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{tr}((A - B)(A^\top - B^\top)) = 0$, 则 $A = B$;

① 正确。 $\text{tr}(ABC) = \text{tr}((ABC)^\top) = \text{tr}(C^\top B^\top A^\top) = \text{tr}(CBA) = \text{tr}(ACB)$ 。

② 正确。 $\text{tr}((A - B)(A^\top - B^\top)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2$, 故 $\text{tr}((A - B)(A^\top - B^\top)) = 0$ 当且仅当 $A = B$ 。

例题：计算

$$\text{计算 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2025} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1} .$$

例题：计算

$$\text{计算 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2025} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1}.$$

由于 I 与任意矩阵可交换, 且 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 = O$, 故有:

例题：计算

$$\text{计算 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2025} \quad \text{与} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1}。$$

由于 I 与任意矩阵可交换, 且 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = O$, 故有:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2025} = \left(I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{2025} = I + 2025 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4050 \\ 0 & 1 & -2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & & & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2, \dots, n]{-r_{i-1} \rightarrow r_i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & & & \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & -2 & \cdots & 0 & 0 & & -1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_i \div 2, i \neq n]{\text{交换行}} \\
 & \begin{bmatrix} -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1, \dots, n-1]{r_i \rightarrow r_n} \begin{bmatrix} -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & & -1 & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow[i=1, \dots, n-1]{r_i \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & & & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & 1 & & & & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

例题：伴随矩阵与行列式

- ① 设 A, B 是 n 阶可逆方阵, $\det A = \lambda, \det B = \mu$, 计算 $\det \begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{bmatrix}$ 。
- ② 设矩阵 $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $B^* = B^\top$, 若 b_{11}, b_{12}, b_{13} 为 3 个相等正数, 求 b_{11} 。

例题：伴随矩阵与行列式

- ① 设 A, B 是 n 阶可逆方阵, $\det A = \lambda, \det B = \mu$, 计算 $\det \begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{bmatrix}$ 。
- ② 设矩阵 $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $B^* = B^\top$, 若 b_{11}, b_{12}, b_{13} 为 3 个相等正数, 求 b_{11} 。

①
$$\det \begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{bmatrix} = (-1)^n \det \begin{bmatrix} 2B & \\ & A^* \end{bmatrix} = (-2)^n \det B \cdot \det A^* = (-2)^n \mu \lambda^{n-1}.$$

例题：伴随矩阵与行列式

- ① 设 A, B 是 n 阶可逆方阵, $\det A = \lambda, \det B = \mu$, 计算 $\det \begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{bmatrix}$ 。
- ② 设矩阵 $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $B^* = B^\top$, 若 b_{11}, b_{12}, b_{13} 为 3 个相等正数, 求 b_{11} 。

① $\det \begin{bmatrix} O & A^* \\ 2B & O \end{bmatrix} = (-1)^n \det \begin{bmatrix} 2B & \\ & A^* \end{bmatrix} = (-2)^n \det B \cdot \det A^* = (-2)^n \mu \lambda^{n-1}.$

② $(\det B)^2 = \det B^* = \det B^\top = \det B \Rightarrow \det B = 0$ 或 $\det B = 1$,
 $\det B \cdot \delta_{ij} = (BB^*)_{ij} = (BB^\top)_{ij} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} b_{jk}$, 取 $i = j = 1$, 即有
 $0 < \sum_{k=1}^3 b_{1k}^2 = 3b_{11}^2 = \det B$, 故 $\det B = 1, b_{11}^2 = \frac{1}{3}, b_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

秩与相抵

定义：初等矩阵

初等矩阵分为三类：

- ① 交换两行（列）的初等矩阵 S_{ij} ；
- ② 某一行（列）乘以非零常数的初等矩阵 $D_i(\lambda)$ ；
- ③ 某一行（列）加上另一行（列）的若干倍的初等矩阵 $T_{ij}(\lambda)$ 。

对矩阵进行初等行变换（列变换）相当于将该矩阵左乘（右乘）对应的初等矩阵。

命题：初等矩阵的逆

初等矩阵的逆矩阵如下：

$$S_{ij}^{-1} = S_{ij}, \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$$

定理：矩阵的秩与相抵标准形

对于任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 都存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_s$ 和 $Q_1, \dots, Q_t$, 使得:

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中 r 是非负整数且由矩阵 A 唯一确定, 称为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank } A = r$ 。这等价于存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}, Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 。

若 $\text{rank } A = m$, 称矩阵 A 为行满秩矩阵; 若 $\text{rank } A = n$, 称矩阵 A 为列满秩矩阵。

定义：矩阵的相抵

设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ，若可以经过有限次初等行变换与初等列变换，将矩阵 A 变为矩阵 B ，则称矩阵 A 与矩阵 B 相抵。
这等价于存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}, Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ，使得 $B = PAQ$ 。

命题：相抵的等价性

相抵是等价关系，即满足：

- 自反性： $\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, A 与 A 相抵；
- 对称性： $\forall A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 若 A 与 B 相抵, 则 B 与 A 相抵；
- 传递性： $\forall A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 若 A 与 B 相抵, 且 B 与 C 相抵, 则 A 与 C 相抵。

定理：秩的性质

- A 与 B 相抵的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank } B$ 。
- 矩阵 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是秩为 r 的矩阵的唯一的相抵标准形。
- 初等变换不改变矩阵的秩，即 $\text{rank}(PAQ) = \text{rank } A$ 。
- 矩阵 A 的秩等于其最大非零子式的阶数。

命题：秩的性质与不等式

- ① $\text{rank } A + \text{rank } B = \text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix};$
- ② $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\};$
- ③ 若 P 为可逆矩阵, 则 $\text{rank}(PA) = \text{rank}(AP) = \text{rank}(A);$
- ④ 矩阵 A 某个子块的秩不大于矩阵 A 的秩;
- ⑤ 对实矩阵 A , $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^{\top}A) = \text{rank}(AA^{\top});$
- ⑥ $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \text{rank } A + \text{rank } B;$
- ⑦ $\text{rank} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix};$

- ⑧ Sylvester 不等式: $\text{rank}(AC) + n \geq \text{rank } A + \text{rank } C$;
- ⑨ Frobenius 不等式: $\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank } B$;
- ⑩ $n + \text{rank}(I_m - AB) = \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = m + \text{rank}(I_n - BA)$;
- ⑪ $\text{rank } A^* = \begin{cases} 0, & \text{rank } A < n - 1 \\ 1, & \text{rank } A = n - 1; \\ n, & \text{rank } A = n \end{cases}$
- ⑫ $\text{rank}(A^*)^* = \begin{cases} n, & \text{rank } A = n \\ 0, & \text{rank } A < n \end{cases}$.

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $A_1 A_2 \dots A_n = O$, 则 $\sum_{i=1}^n \operatorname{rank} A_i \leq n^2 - n$;
- ② 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, n 是偶数, 则 $A^2 - 2A + I = O$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A - I) = \frac{n}{2}$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $A_1 A_2 \dots A_n = O$, 则 $\sum_{i=1}^n \operatorname{rank} A_i \leq n^2 - n$;
- ② 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, n 是偶数, 则 $A^2 - 2A + I = O$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A - I) = \frac{n}{2}$ 。

- ① 正确。 $\sum_{i=1}^n \operatorname{rank} A_i \leq n + \operatorname{rank}(A_1 A_2) + \sum_{i=3}^n \operatorname{rank} A_i \leq$
 $2n + \operatorname{rank}(A_1 A_2 A_3) + \sum_{i=4}^n \operatorname{rank} A_i \leq \dots \leq (n-1)n + \operatorname{rank}(A_1 A_2 \dots A_n) = (n-1)n。$

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 设 $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $A_1 A_2 \dots A_n = O$, 则 $\sum_{i=1}^n \operatorname{rank} A_i \leq n^2 - n$;
- ② 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, n 是偶数, 则 $A^2 - 2A + I = O$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(A - I) = \frac{n}{2}$ 。

- ① 正确。 $\sum_{i=1}^n \operatorname{rank} A_i \leq n + \operatorname{rank}(A_1 A_2) + \sum_{i=3}^n \operatorname{rank} A_i \leq 2n + \operatorname{rank}(A_1 A_2 A_3) + \sum_{i=4}^n \operatorname{rank} A_i \leq \dots \leq (n-1)n + \operatorname{rank}(A_1 A_2 \dots A_n) = (n-1)n$ 。
- ② 错误。考虑 $A = I$ 即可。

例题：秩的计算

对于 n 阶方阵 $D_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix},$

- ① 计算 $\text{rank } D_n$;
- ② 记 B_n, C_n 为 D_n 的上三角部分/下三角部分, 能否利用 $D_n = B_n + C_n$ 的二项式展开式计算出 D_n^k ? 请说明理由。

- ① 计算 $\text{rank } D_n$;
- ② 记 B_n, C_n 为 D_n 的上三角部分/下三角部分, 能否利用 $D_n = B_n + C_n$ 的二项式展开式计算出 D_n^k ? 请说明理由。

- ① 计算 $\text{rank } D_n$;
- ② 记 B_n, C_n 为 D_n 的上三角部分/下三角部分, 能否利用 $D_n = B_n + C_n$ 的二项式展开式计算出 D_n^k ? 请说明理由。

$$\textcircled{1} \det D_n \xrightarrow{\text{第一行展开}} -\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列展开}} \det D_{n-2},$$

且 $\det D_1 = 0, \det D_2 = 1,$

- ① 计算 $\text{rank } D_n$;
- ② 记 B_n, C_n 为 D_n 的上三角部分/下三角部分, 能否利用 $D_n = B_n + C_n$ 的二项式展开式计算出 D_n^k ? 请说明理由。

$$\textcircled{1} \det D_n \xrightarrow{\text{第一行展开}} -\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一列展开}} \det D_{n-2},$$

且 $\det D_1 = 0, \det D_2 = 1,$

故 $\det D_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 从而 $\text{rank } D_n = \begin{cases} n-1, & n \text{ 为奇数} \\ n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

线性空间

定义：线性空间公理

设 $\mathbb{F}$ 是数域, V 是一个非空集合, V 上定义了加法与数乘两种运算, 且对任意 $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 满足以下八条公理:

- ① 交换律: $u + v = v + u$;
- ② 结合律: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- ③ 存在零元: $\exists 0 \in V$, 使得 $\forall v \in V, 0 + v = v$;
- ④ 存在逆元: $\forall v \in V, \exists -v \in V$, 使得 $v + (-v) = 0$;
- ⑤ 数乘结合律: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
- ⑥ 数乘分配律 1: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
- ⑦ 数乘分配律 2: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- ⑧ 数乘单位元: $1v = v$ 。

则称 $(V, +, \cdot)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 (向量空间), 其中的元素称为向量。若 $U \subset V$, 且 $\forall x, y \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \lambda x + \mu y \in U$, 则称 U 为线性空间 V 的子空间。

定义：线性组合与生成子空间

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$

- 向量 $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$ 称为向量 $v_1, v_2, \dots, v_m$ 的线性组合, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为该线性组合的系数。
- $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}$ 称为由向量 $v_1, \dots, v_m$ 所生成的子空间。

定义：向量组的等价

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，向量组 $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, S_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ ，若 S_1 中的每个向量都能由 S_2 线性表示，称为 S_1 能由 S_2 线性表示；如果 S_1 能由 S_2 线性表示，且 S_2 能由 S_1 线性表示，则称向量组 S_1 与向量组 S_2 等价。

向量组 S_1 能由向量组 S_2 线性表示的充分必要条件是 $\text{span}(S_1) \subset \text{span}(S_2)$ 。向量组 S_1 与向量组 S_2 等价的充分必要条件是 $\text{span}(S_1) = \text{span}(S_2)$ 。向量组的等价关系满足自反性、对称性与传递性，是一种等价关系。

定义：线性相关与线性无关

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 向量组 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$, 若存在不全为零的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$, 使得 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$, 则称向量组 S 线性相关; 否则称向

量组 S 线性无关。向量组 S 线性相关当且仅当方程
$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = 0$$
 有非零解。

若对向量组 S, T 有 $S \subset T$, 则 T 线性无关时 S 线性无关, S 线性相关时 T 线性相关。
若向量组 T 中向量由 S 中向量加长得到, 则 S 线性无关时 T 线性无关, T 线性相关时 S 线性相关。

定义：极大无关组与秩

设 S 是一个向量组, S_1 是 S 的一个子集, 且 S_1 线性无关, 若 S 中任一向量加入 S_1 后所得的新向量组均线性相关, 则称 S_1 为 S 的一个极大无关组。一个向量组的极大无关组不唯一, 但其向量个数相同。一个向量组与它的极大无关组等价, 一个向量组的任意两个极大无关组等价。

若对向量组 S, T 有 $S \subset T$, 则 T 线性无关时 S 线性无关, S 线性相关时 T 线性相关。若向量组 T 中向量由 S 中向量加长得到, 则 S 线性无关时 T 线性无关, T 线性相关时 S 线性相关。

向量组的秩定义为其极大无关组中向量的个数, 记为 $\text{rank}(a_1, \dots, a_m)$ 。

命题：向量组与秩的性质

- ① 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关的充分必要条件是 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m) = m$;
- ② 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$;
- ③ 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 能由 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 线性表示时
 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m) \leq \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;
- ④ 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 与 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 等价时 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{rank}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;
- ⑤ b 能由 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是
 $\text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m) = \text{rank}(a_1, a_2, \dots, a_m, b)$ 。
- ⑥ 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\text{rank}(A)$ 等于其列向量组的秩, 也等于其行向量组的秩。
- ⑦ 可逆矩阵的列向量组与行向量组均线性无关。
- ⑧ 设 $\text{rank } A = r$, 则 A 不为 0 的 r 阶子式所在的行 (列) 向量组构成矩阵 A 的行 (列) 向量组的一个极大无关组。

定义：基与维数

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$, 若 S 线性无关, 且 $V = \text{span}(S)$, 则称 S 为线性空间 V 的一个基。有限维线性空间 V 的任意两个基均含有相同个数的向量, 称该个数为线性空间 V 的维数, 记为 $\dim V$ 。若 $\dim V = n$, 则称 V 为 n 维线性空间。若 V 有基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 则任意向量 $v \in V$ 都可唯一表示为 $v = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$, 称 v 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 。

命题：坐标变换

设线性空间 V 的两个基分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则存在唯一的可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得 $[\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] P$, 且该矩阵 P 称为从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。若向量 $v \in V$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, \text{ 在基 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \text{ 下的坐标为 } (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top, \text{ 则有 } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

命题：有限维线性空间的性质

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，则有

- ① 设 $U \subset V$ 是 r 维子空间，则 U 中任意 $r+1$ 个向量线性相关，任意 r 个线性无关向量构成 U 的一个基；
- ② 设 $W \subset U \subset V$ ，则 $\dim W \leq \dim U \leq \dim V$ ，且 $\dim W = \dim U$ 当且仅当 $W = U$ 。
- ③ 设 $\dim V = n$ ， $a_1, a_2, \dots, a_s$ 是线性无关向量，则存在 V 中线性无关向量 $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_n$ ，使得 $a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_n$ 构成 V 的一个基。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
- ② 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta = \sum \lambda_i \alpha_i$ 且 $\forall i, \lambda_i \neq 0$, 则 $\forall j, \alpha_1, \dots, \beta, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
- ② 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta = \sum \lambda_i \alpha_i$ 且 $\forall i, \lambda_i \neq 0$, 则 $\forall j, \alpha_1, \dots, \beta, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

- ① 错误。反例: $n = 2$ 时, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det A = 0, \det B = 0$, 但 $\det(A + B) = 1 \neq 0$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间。
- ② 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta = \sum \lambda_i \alpha_i$ 且 $\forall i, \lambda_i \neq 0$, 则 $\forall j, \alpha_1, \dots, \beta, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

- ① 错误。反例: $n = 2$ 时, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\det A = 0, \det B = 0$, 但 $\det(A + B) = 1 \neq 0$ 。

- ② 正确。设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \beta, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\mu_1, \dots, \mu_n$, 使得

$$\sum_{i \neq j} \mu_i \alpha_i + \mu_j \beta = 0, \text{ 即 } \sum_{i \neq j} \mu_i \alpha_i + \mu_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \right) = 0, \text{ 从而}$$

$$\sum_{i \neq j} (\mu_i + \lambda_i \mu_j) \alpha_i + \mu_j \lambda_j \alpha_j = 0, \text{ 由于 } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ 线性无关, 故}$$

$$\mu_j = 0, \forall i \neq j, \mu_i + \lambda_i \mu_j = 0 \Rightarrow \forall i, \mu_i = 0, \text{ 与假设矛盾。}$$

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ③ 若 $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \subset \text{span}(\beta_1, \dots, \beta_t)$, 则 $s \leq t$;
- ④ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量组与 A 的行向量组等价;
- ⑤ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ③ 若 $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \subset \text{span}(\beta_1, \dots, \beta_t)$, 则 $s \leq t$;
- ④ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量组与 A 的行向量组等价;
- ⑤ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

③ 错误。反例: $\alpha_1 = \alpha_2 = (1, 0)^\top, \beta_1 = (1, 0)^\top$ 。

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ③ 若 $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \subset \text{span}(\beta_1, \dots, \beta_t)$, 则 $s \leq t$;
- ④ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量组与 A 的行向量组等价;
- ⑤ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

③ 错误。反例: $\alpha_1 = \alpha_2 = (1, 0)^\top, \beta_1 = (1, 0)^\top$ 。

④ 错误。如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ③ 若 $\text{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \subset \text{span}(\beta_1, \dots, \beta_t)$, 则 $s \leq t$;
- ④ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量组与 A 的行向量组等价;
- ⑤ 设 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

③ 错误。反例: $\alpha_1 = \alpha_2 = (1, 0)^\top, \beta_1 = (1, 0)^\top$ 。

④ 错误。如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

⑤ 正确。由于 C 的每一列都是 A 的列的线性组合, 其系数由 B 的对应列给出, 故 $\text{span col } C \subset \text{span col } A$, 又由 B 可逆有 $A = CB^{-1}$, 同理可得 $\text{span col } A \subset \text{span col } C$, 从而 $\text{span col } A = \text{span col } C$, 即 C 的列向量组与 A 的列向量组等价。

例题：构造向量

对于正整数 $m \geq n$, 在数组空间 $\mathbb{R}^n$ 中找出 m 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_m$, 使得任意 n 个向量都线性无关。

例题：构造向量

对于正整数 $m \geq n$, 在数组空间 $\mathbb{R}^n$ 中找出 m 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_m$, 使得任意 n 个向量都线性无关。

任取 m 个互异实数 $x_1, \dots, x_m$, 令 $a_i = (1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1})^\top, i = 1, 2, \dots, m$, 则任意 n 个向量 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ 组成的矩阵的行列式为 Vandermonde 行列式, 且不为零, 故任意 n 个向量线性无关。

例题：子空间与直和

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $A^2 = I$, 设 $W_1 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = x\}$, $W_2 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = -x\}$, 证明:
 W_1, W_2 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间且 $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$ 。

例题：子空间与直和

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $A^2 = I$, 设 $W_1 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = x\}$, $W_2 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = -x\}$, 证明:
 W_1, W_2 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间且 $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$ 。

由于 $\forall x, y \in W_1, \alpha, \beta \in \mathbb{F}, A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha x + \beta y$, 故 W_1 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间。
同理可证 W_2 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间。

例题：子空间与直和

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $A^2 = I$, 设 $W_1 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = x\}$, $W_2 = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = -x\}$, 证明:
 W_1, W_2 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间且 $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$ 。

由于 $\forall x, y \in W_1, \alpha, \beta \in \mathbb{F}, A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha x + \beta y$, 故 W_1 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间。
同理可证 W_2 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间。

对任意 $x \in \mathbb{F}^n$, 令 $x_1 = \frac{x + Ax}{2}, x_2 = \frac{x - Ax}{2}$, 则 $Ax_1 = x_1, Ax_2 = -x_2$, 即
 $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$, 且 $x = x_1 + x_2$, 故 $\mathbb{F}^n = W_1 + W_2$ 。又由于 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 故
 $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$ 。

线性方程组解集的结构

定理：解存在与唯一的条件

对于线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- 有解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A|b)$;
- 有唯一解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A|b) = n$ 。

定理：解集的结构

- **齐次**：线性方程组 $Ax = 0$ 的解集是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间 $\mathcal{N}(A)$ ，维数为 $n - \text{rank } A$ 。基称为基础解系。
- **非齐次**：线性方程组 $Ax = b$ 的解集为 $x_0 + \mathcal{N}(A)$ ，其中 x_0 是特解。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解，则对非齐次方程组 $Ax = b$ 有无穷多解；
- ② 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ ，则矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ ；
- ③ 若 $x_1, \dots, x_s$ 是方程组 $Ax = b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$ 是方程组的解时 $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解，则对非齐次方程组 $Ax = b$ 有无穷多解；
- ② 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ ，则矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ ；
- ③ 若 $x_1, \dots, x_s$ 是方程组 $Ax = b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$ 是方程组的解时 $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ 。

- ① 错误。反例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解，则对非齐次方程组 $Ax = b$ 有无穷多解；
- ② 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ ，则矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ ；
- ③ 若 $x_1, \dots, x_s$ 是方程组 $Ax = b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$ 是方程组的解时 $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ 。

- ① 错误。反例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。
- ② 正确。矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是对 B 的每一列 b_i ，方程组 $Ax = b_i$ 都有解，即 $\text{rank } A = \text{rank}(A|b_i), i = 1, 2, \dots, p$ ，等价于 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ 。

例题：判断正误

判断以下命题是否正确。若正确，请证明；若不正确，请给出反例。

- ① 若齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解，则对非齐次方程组 $Ax = b$ 有无穷多解；
- ② 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ ，则矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ ；
- ③ 若 $x_1, \dots, x_s$ 是方程组 $Ax = b$ 的解，则 $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$ 是方程组的解时 $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ 。

- ① 错误。反例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。
- ② 正确。矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是对 B 的每一列 b_i ，方程组 $Ax = b_i$ 都有解，即 $\text{rank } A = \text{rank}(A|b_i), i = 1, 2, \dots, p$ ，等价于 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B)$ 。
- ③ 错误。 $b = 0$ 时显然不成立。

例题：求解方程组

设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A , 满足 $\text{rank } A = 3$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其三个解, 满足 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^\top, 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^\top$ 。

- ① 证明：这个方程组是非齐次的；
- ② 求这个方程组的通解。

例题：求解方程组

设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A , 满足 $\text{rank } A = 3$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其三个解, 满足 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^\top, 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^\top$ 。

- ① 证明：这个方程组是非齐次的；
- ② 求这个方程组的通解。

- ① 若方程组为齐次方程组, 则解空间 V 满足 $\dim V = 1$, 故其中任意两个向量均线性相关, 但 $\alpha_1 \in V, 5\alpha_2 - 2\alpha_3 \in V$, 且显然 $\alpha_1, 5\alpha_2 - 2\alpha_3$ 线性无关, 矛盾。

例题：求解方程组

设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A , 满足 $\text{rank } A = 3$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是其三个解, 满足 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^\top$, $5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^\top$.

- ① 证明：这个方程组是非齐次的；
- ② 求这个方程组的通解。

- ① 若方程组为齐次方程组, 则解空间 V 满足 $\dim V = 1$, 故其中任意两个向量均线性相关, 但 $\alpha_1 \in V, 5\alpha_2 - 2\alpha_3 \in V$, 且显然 $\alpha_1, 5\alpha_2 - 2\alpha_3$ 线性无关, 矛盾。
- ② 设方程组为 $Ax = b$, 则 $A\alpha_1 = b, A(5\alpha_2 - 2\alpha_3) = 3b \Rightarrow A(5\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_1) = 0$, 故 $5\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_1$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个非零解, 且 $\dim \mathcal{N}(A) = 1$, 故齐次方程组的通解为 $k(5\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_1), k \in \mathbb{R}$, 非齐次方程组的通解为 $\alpha_1 + k(5\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_1), k \in \mathbb{R}$ 。