

期末复习

陈文轩

2026 年 8 月 1 日

线性变换与矩阵的相似

基变换与特征值的计算

首先回顾一些比较重要的算法和性质。

- $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性映射, 在基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 下矩阵为 A , P 是可逆矩阵, $\beta_i = P\alpha_i$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 下矩阵是 $P^{-1}AP$ 。
- 对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 可以通过以下步骤计算其特征值与特征向量:
 - ① 计算特征多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$, $\sum_{i=1}^s \lambda_i = n$, 这是关于 λ 的一个 n 次多项式, 从而有 n 个根;
 - ② 令 $p_A(\lambda) = 0$, 得到特征值 $\lambda_1(n_1 \text{ 重}), \lambda_2(n_2 \text{ 重}) \dots \lambda_s(n_s \text{ 重})$, 这些是 A 的特征值;
 - ③ 对每一个 $\lambda_i (1 \leq i \leq s)$, 求出线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$ 的非零解, 即为 λ_i 的特征向量;

特征值与特征向量的性质

以下是一些可能使用到的具体性质。

- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, $f(\lambda)$ 是多项式, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值, x 是 $f(A)$ 的对应特征向量;
- 若 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, x 是对应的特征向量;
- 若 λ 是 A 的特征值, x 是对应特征向量, 则 λ 是 A^T 的特征值, 但 x 不一定是对应特征向量;
- 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 则 $|\lambda| = 1$;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = A^T$, 则 λ 是实数, 且存在正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵;
- 若 λ 是实矩阵 A 的特征值, 且 $A = -A^T$, 则 λ 是纯虚数或零。
- 特征值是相似不变量, 即若 A, B 相似, 则 A, B 有相同的特征值。
- 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 则 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ 。
- 可对角化矩阵 A, B 乘法可交换当且仅当 A, B 可以同时相似对角化。

不是所有方阵都可以对角化，这里给出一些可对角化的充分条件：

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化；
- 若方阵 A 的所有特征值的代数重数等于几何重数，则 A 可对角化；
- 若 n 阶方阵 A 的所有特征值的几何重数之和等于 n ，则 A 可对角化。
- 若 A 的最小多项式没有重根，则 A 可对角化。

例题 1

设

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ① 求 A_a 的特征值与特征子空间;
- ② 判断 a 取何值时 A_a 可对角化, 并在可对角化时给出相似对角阵。

例题 1

设

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ① 求 A_a 的特征值与特征子空间;
- ② 判断 a 取何值时 A_a 可对角化, 并在可对角化时给出相似对角阵.

解: A_a 是上三角矩阵,

$$p_{A_a}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

故特征值为 1, 2.

$$V_1 = \begin{cases} \text{span}\{e_1, e_2\}, & a = 0, \\ \text{span}\{e_1\}, & a \neq 0, \end{cases} \quad V_2 = \text{span}\{(a, 1, 1)^\top\}.$$

例题 1

设

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ① 求 A_a 的特征值与特征子空间;
- ② 判断 a 取何值时 A_a 可对角化, 并在可对角化时给出相似对角阵.

解: A_a 是上三角矩阵,

$$p_{A_a}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

故特征值为 1, 2.

$$V_1 = \begin{cases} \text{span}\{e_1, e_2\}, & a = 0, \\ \text{span}\{e_1\}, & a \neq 0, \end{cases} \quad V_2 = \text{span}\{(a, 1, 1)^\top\}.$$

因此 A_a 可对角化当且仅当 $a = 0$.

例题 1

设

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ① 求 A_a 的特征值与特征子空间;
- ② 判断 a 取何值时 A_a 可对角化, 并在可对角化时给出相似对角阵.

解: A_a 是上三角矩阵,

$$p_{A_a}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

故特征值为 1, 2.

$$V_1 = \begin{cases} \text{span}\{e_1, e_2\}, & a = 0, \\ \text{span}\{e_1\}, & a \neq 0, \end{cases} \quad V_2 = \text{span}\{(a, 1, 1)^\top\}.$$

因此 A_a 可对角化当且仅当 $a = 0$.
当 $a = 0$ 时, 取

$$P = (e_1, e_2, (0, 1, 1)^\top), \quad P^{-1}A_0P = \text{diag}(1, 1, 2).$$

例题 2

证明: N 与 A 相似, 其中

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

例题 2

证明: N 与 A 相似, 其中

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

对 N , 有

$$\dim \ker N = n - 1, \quad \dim \ker(N - nI) = 1.$$

故 $0, n$ 的几何重数之和为 n , 所以 N 可对角化, 且相似标准形为 nE_{11} .

例题 2

证明: N 与 A 相似, 其中

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

对 N , 有

$$\dim \ker N = n - 1, \quad \dim \ker(N - nI) = 1.$$

故 $0, n$ 的几何重数之和为 n , 所以 N 可对角化, 且相似标准形为 nE_{11} 。

对 A 同理:

$$\dim \ker A = n - 1, \quad \dim \ker(A - nI) = 1.$$

因此 A 也可对角化, 且相似标准形同为 nE_{11} 。

例题 2

证明: N 与 A 相似, 其中

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

对 N , 有

$$\dim \ker N = n - 1, \quad \dim \ker(N - nI) = 1.$$

故 $0, n$ 的几何重数之和为 n , 所以 N 可对角化, 且相似标准形为 nE_{11} 。

对 A 同理:

$$\dim \ker A = n - 1, \quad \dim \ker(A - nI) = 1.$$

因此 A 也可对角化, 且相似标准形同为 nE_{11} 。
两者相似于同一个对角矩阵, 故 A, N 相似。

例题 3

设 $M_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为标准基,

$$\beta_1 = (-1, 0, 1)^\top,$$

$$\beta_2 = (0, 1, 1)^\top,$$

$$\beta_3 = (2, -1, -2)^\top.$$

记 $M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。已知

$$\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^\top,$$

$$\sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^\top,$$

$$\sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^\top.$$

求 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵 T_1, T_2 。

例题 3

设 $M_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为标准基,

$$\beta_1 = (-1, 0, 1)^\top,$$

$$\beta_2 = (0, 1, 1)^\top,$$

$$\beta_3 = (2, -1, -2)^\top.$$

记 $M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。已知

$$\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^\top,$$

$$\sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^\top,$$

$$\sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^\top.$$

求 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵 T_1, T_2 。

解:

$$\sigma(\beta_1) = -5\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3,$$

$$\sigma(\beta_2) = -\beta_2,$$

$$\sigma(\beta_3) = -3\beta_1 - 5\beta_2 - 4\beta_3.$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

例题 3

设 $M_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为标准基,

$$\beta_1 = (-1, 0, 1)^\top,$$

$$\beta_2 = (0, 1, 1)^\top,$$

$$\beta_3 = (2, -1, -2)^\top.$$

记 $M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. 已知

$$\sigma(\beta_1) = (1, 0, -3)^\top,$$

$$\sigma(\beta_2) = (0, -1, -1)^\top,$$

$$\sigma(\beta_3) = (-5, -1, 0)^\top.$$

求 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵 T_1, T_2 .

解:

$$\sigma(\beta_1) = -5\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3,$$

$$\sigma(\beta_2) = -\beta_2,$$

$$\sigma(\beta_3) = -3\beta_1 - 5\beta_2 - 4\beta_3.$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

记 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则

$$T_1 = BT_2B^{-1}.$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

例题 4

A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

- ① 给出 A 的所有可能的互异特征值;
- ② 若 n 是奇数, 证明 A^* 正定。

例题 4

A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

- ① 给出 A 的所有可能的互异特征值;
- ② 若 n 是奇数, 证明 A^* 正定。

解: 若 λ 是 A 的特征值, 则

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

因此 A 的可能特征值为 $-1, -2$ 。

例题 4

A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

- ① 给出 A 的所有可能的互异特征值;
- ② 若 n 是奇数, 证明 A^* 正定。

解: 若 λ 是 A 的特征值, 则

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

因此 A 的可能特征值为 $-1, -2$ 。由 A 对称可知 A^{-1} 对称, 且 A^{-1} 的全部可能特征值为

$$-1, \quad -\frac{1}{2}.$$

故 $A^{-1} \succ 0$ 。

例题 4

A 是 n 阶实对称矩阵, 且

$$A^2 + 3A + 2I = 0.$$

- ① 给出 A 的所有可能的互异特征值;
- ② 若 n 是奇数, 证明 A^* 正定。

解: 若 λ 是 A 的特征值, 则

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

因此 A 的可能特征值为 $-1, -2$ 。由 A 对称可知 A^{-1} 对称, 且 A^{-1} 的全部可能特征值为

$$-1, \quad -\frac{1}{2}.$$

故 $A^{-1} \prec 0$ 。

又 n 为奇数, 所以 $\det A < 0$ 。于是

$$A^* = \det A \cdot A^{-1} \succ 0.$$

正交变换与内积空间

范数与赋范空间

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$, X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 若函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

- 正定性: $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$;
- 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间。 $d(x, y) := \|x - y\|$ 是 X 上的一个度量, 称为典则度量。

内积与正交性

X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 若函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 满足:

- 对第一变元线性: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
- 对第二变元共轭线性: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
- 共轭对称: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X;$
- 正定性: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X,$ 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 X 上的一个内积, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为内积空间. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 是 X 上的一个范数, 称为由内积诱导的范数.

内积与正交性

X 是 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 若函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ 满足:

- 对第一变元线性: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
- 对第二变元共轭线性: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
- 共轭对称: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X;$
- 正定性: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X,$ 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 X 上的一个内积, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 称为内积空间. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 是 X 上的一个范数, 称为由内积诱导的范数.

X 是内积空间, 若对 $x, y \in X$, 有 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x, y 正交, 记作 $x \perp y$.

对 $M \subset X$, 若 $\forall y \in M, x \perp y$, 则称 x 正交于 M , 记作 $x \perp M$.

$M^\perp := \{x \in X | x \perp M\}$ 称为 M 的正交补. 此时若 M 是 X 的子空间, 有 $X = M \oplus M^\perp$.

- (Cauchy-Schwarz 不等式) X 是内积空间, 对任意 $x, y \in X$, 有 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, 等号成立当且仅当 x, y 线性相关。
- (极化恒等式 over $\mathbb{R}$) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是实内积空间, 则 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
- (极化恒等式 over $\mathbb{C}$) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是复内积空间, 则
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$
- (平行四边形法则) $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- (勾股定理) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, 则 $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 X 的一组基, 则 $G = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n \times n}$ 称为基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 Gram 矩阵, $G \succ 0$ 。对 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)y$, 有 $\langle \alpha, \beta \rangle = x^\top G y$ 。
- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ 分别是 X 的一组基, G_1 是基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 Gram 矩阵, G_2 是基 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 的 Gram 矩阵, 若可逆矩阵 P 使得 $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P$, 则 $G_2 = P^\top G_1 P$ 。

标准正交基与 G-S 正交化

- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $e_1, \dots, e_n$ 是 X 的一组基, 若 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, 则称 $e_1, \dots, e_n$ 是 X 的标准正交基。
- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 X 的一组基, 令

$$\beta_1 = \alpha_1, u_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, u_1 \rangle u_1, u_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, u_1 \rangle u_1 - \langle \alpha_3, u_2 \rangle u_2, u_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

$\vdots$

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_n, u_j \rangle u_j, u_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$$

则 $u_1, \dots, u_n$ 是 X 的一组标准正交基。

正交变换与对称变换

- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $T : X \rightarrow X$ 是线性变换,
 - 若对 $\forall x, y \in X$, 有 $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, 则称 T 是 X 上的正交变换。
 - 若对 $\forall x, y \in X$, 有 $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$, 则称 T 是 X 上的对称变换。
- $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, $T : X \rightarrow X$ 是线性变换, 则以下各条性质等价:
 - T 是正交变换
 - T 保范数: $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X$
 - T 把标准正交基映成标准正交基
 - T 在某一组基下的矩阵是正交矩阵

实对称矩阵的性质

实对称阵具有以下性质：

- 实对称阵的特征值是实数；
- 实对称阵属于不同特征值的特征向量是正交的。
- 实对称阵可以正交对角化；

例题 5

在 $\mathbb{R}^3$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = x^\top G y, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 1 证明这是一个内积;
- 2 设 $U = \text{span}\{u\}$, $u = (1, 0, 1)^\top$, 求 $U^\perp$;
- 3 求 $v = (1, 1, 0)^\top$ 在 U 上的正交投影与到 U 的距离。

例题 5

在 $\mathbb{R}^3$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = x^\top G y, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

解: $G = G^\top$, 且顺序主子式为 2, 3, 4, 故 $G \succ 0$, 所以这是内积。

- ① 证明这是一个内积;
- ② 设 $U = \text{span}\{u\}$, $u = (1, 0, 1)^\top$, 求 $U^\perp$;
- ③ 求 $v = (1, 1, 0)^\top$ 在 U 上的正交投影与到 U 的距离。

例题 5

在 $\mathbb{R}^3$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = x^\top G y, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

解: $G = G^\top$, 且顺序主子式为 2, 3, 4, 故 $G \succ 0$, 所以这是内积。
 $Gu = (2, 2, 2)^\top$, 因此

$$U^\perp = \{x \mid \langle x, u \rangle = 0\} = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

- 1 证明这是一个内积;
- 2 设 $U = \text{span}\{u\}$, $u = (1, 0, 1)^\top$, 求 $U^\perp$;
- 3 求 $v = (1, 1, 0)^\top$ 在 U 上的正交投影与到 U 的距离。

例题 5

在 $\mathbb{R}^3$ 上定义

$$\langle x, y \rangle = x^\top G y, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 1 证明这是一个内积;
- 2 设 $U = \text{span}\{u\}$, $u = (1, 0, 1)^\top$, 求 $U^\perp$;
- 3 求 $v = (1, 1, 0)^\top$ 在 U 上的正交投影与到 U 的距离。

解: $G = G^\top$, 且顺序主子式为 2, 3, 4, 故 $G \succ 0$, 所以这是内积。
 $Gu = (2, 2, 2)^\top$, 因此

$$U^\perp = \{x \mid \langle x, u \rangle = 0\} = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

又 $\langle v, u \rangle = 4$, $\langle u, u \rangle = 4$, 故

$$\text{proj}_U v = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = u.$$

$$d(v, U) = \|v - u\| = \sqrt{\langle v - u, v - u \rangle} = \sqrt{2}.$$

例题 6

设 V 为次数不超过 2 的实系数多项式空间。

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

- ① 证明这定义了 V 上的一个内积；
- ② 用 Schmidt 正交化将 $1, x$ 改造成标准正交向量组。

例题 6

设 V 为次数不超过 2 的实系数多项式空间。

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

- ① 证明这定义了 V 上的一个内积；
- ② 用 Schmidt 正交化将 $1, x$ 改造成标准正交向量组。

解：只需重点验证正定性：

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 \geq 0.$$

若取等，则

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0.$$

次数不超过 2 的多项式有三个不同零点，只能 $f = 0$ 。

例题 6

设 V 为次数不超过 2 的实系数多项式空间。

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

- ① 证明这定义了 V 上的一个内积；
- ② 用 Schmidt 正交化将 $1, x$ 改造成标准正交向量组。

解：只需重点验证正定性：

$$\langle f, f \rangle = f(0)^2 + f(1)^2 + f(2)^2 \geq 0.$$

若取等，则

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0.$$

次数不超过 2 的多项式有三个不同零点，只能 $f = 0$ 。令 $f_1 = 1, f_2 = x$ ，则

$$u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \beta_2 = f_2 - \langle f_2, u_1 \rangle u_1 = x - 1.$$

$$u_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1).$$

例题 7

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in X, \quad A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{s \times s}.$$

证明:

$$\text{rank } A = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

例题 7

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in X, \quad A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{s \times s}.$$

证明:

$$\text{rank } A = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

证明: 设 A_i 是 A 的第 i 列, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是极大线性无关组。

若 $\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i = 0$, 则对任意 k ,

$$\left\langle \alpha_k, \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\rangle = 0.$$

取 $k = 1, \dots, r$ 再线性组合, 得

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\|^2 = 0,$$

故 $\lambda_i = 0$, 于是 $A_1, \dots, A_r$ 线性无关。

例题 7

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in X, \quad A = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{s \times s}.$$

证明:

$$\text{rank } A = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

证明: 设 A_i 是 A 的第 i 列, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是极大线性无关组。

若 $\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i = 0$, 则对任意 k ,

$$\left\langle \alpha_k, \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\rangle = 0.$$

取 $k = 1, \dots, r$ 再线性组合, 得

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \right\|^2 = 0,$$

故 $\lambda_i = 0$, 于是 $A_1, \dots, A_r$ 线性无关。

若 $\alpha_k = \sum_{i=1}^r \mu_i \alpha_i$, 则

$$A_k = (\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle)_j = \sum_{i=1}^r \mu_i A_i.$$

故 $\text{rank } A = r = \text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ 。

以下是一个典型错误解答。请思考错误原因：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^\top \\ \vdots \\ \alpha_s^\top \end{bmatrix} [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s] := P^\top P, \text{ 由 } \text{rank}(P^\top P) = \text{rank } P \text{ 即得。}$$

以下是一个典型错误解答。请思考错误原因：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^\top \\ \vdots \\ \alpha_s^\top \end{bmatrix} [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s] := P^\top P, \text{ 由 } \operatorname{rank}(P^\top P) = \operatorname{rank} P \text{ 即得。}$$

注意： V 上内积不一定是欧氏空间上标准内积！

例题 8

已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 且

$$\alpha_1 = (-1, -1, 1)^{\top}, \quad \alpha_2 = (1, -2, -1)^{\top}$$

分别为属于特征值 $1, 2$ 的特征向量。

- ① 求属于特征值 3 的特征向量全体;
- ② 求矩阵 A 。

例题 8

已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 且

$$\alpha_1 = (-1, -1, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (1, -2, -1)^\top$$

分别为属于特征值 $1, 2$ 的特征向量。

- ① 求属于特征值 3 的特征向量全体;
- ② 求矩阵 A 。

解: 不同特征值对应特征向量正交,

$$V_3 = (\text{span}(\alpha_1, \alpha_2))^\perp = \{t(1, 0, 1)^\top \mid t \neq 0\}.$$

例题 8

已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 且

$$\alpha_1 = (-1, -1, 1)^\top, \quad \alpha_2 = (1, -2, -1)^\top$$

分别为属于特征值 $1, 2$ 的特征向量。

- 1 求属于特征值 3 的特征向量全体;
- 2 求矩阵 A 。

解: 不同特征值对应特征向量正交,

$$V_3 = (\text{span}(\alpha_1, \alpha_2))^\perp = \{t(1, 0, 1)^\top \mid t \neq 0\}.$$

归一化得

$$e_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^\top,$$

$$e_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^\top,$$

$$e_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\top.$$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$, 则

$$A = P \text{diag}(1, 2, 3) P^\top = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}.$$

二次型与对称矩阵的相合

相合的定义

- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵, 若存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^{\top}BP$, 则称 A, B 相合。
- 相合是一种等价关系, 即满足自反性、对称性、传递性。
- 每一个二次型都和一个对称矩阵一一对应, 由此可知矩阵的相合等价于对二次型换元。

类似于相抵/相似标准形, 我们想找到相合关系中等价类的代表元, 因此引入相合标准型的概念。

相合标准型的求法

以下是几种求相合标准形的方法：

- 正交相似/正交相合： A 是 n 阶实对称矩阵，可以正交相似对角化，即存在 P 是正交矩阵， $P^{\top}AP$ 是对角矩阵，此即为 A 的相合对角化；
- 配方法 (对二次型操作)：若 $Q(x)$ 有含平方项，则直接配方即可，否则利用 $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2)$ 构造出平方项；
- 初等变换：对 $\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$ 进行成对的行初等变换与列初等变换，最终得到 $\begin{bmatrix} P^{\top}AP \\ P \end{bmatrix}$ 。

由于相合标准型中对角项系数并不唯一，因此我们可以进一步求出唯一的相合规范型。

A 是对称矩阵，则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{\top}AP = \begin{bmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & O \end{bmatrix}$ ，其中 $r + s = \text{rank } A$ ， r

称为正惯性指数， s 称为负惯性指数， $r - s$ 称为符号差， r, s 由 A 唯一确定。

二次曲面的分类

在学习相合标准型之后，我们就可以对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面进行分类了，具体结论如下：
假设已经把二次曲面化为标准形式，则有：(以下假设 $a, b, c > 0$)

- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ，则曲面为椭球面；
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$ ，则曲面为单叶双曲面；
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 - cz^2 = 1$ ，则曲面为双叶双曲面；
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz = 0$ ，则曲面为椭圆抛物面；
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 - cz = 0$ ，则曲面为双曲抛物面；
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$ ，则曲面为圆锥面；
- 若标准形式为 $ax^2 + by^2 = 1$ ，则曲面为椭圆圆柱面；
- 若标准形式为 $ax^2 - by^2 = 1$ ，则曲面为双曲圆柱面；
- 若标准形式为 $ax^2 - by = 0$ ，则曲面为抛物圆柱面；

正定, 半正定, 负定, 半负定矩阵的定义

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^T = A,$

- 若 $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x > 0,$ 则称 A 是正定的, 记作 $A \succ 0;$
- 若 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \geq 0,$ 则称 A 是半正定的, 记作 $A \succeq 0;$
- 若 $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x^T A x < 0,$ 则称 A 是负定的, 记作 $A \prec 0;$
- 若 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T A x \leq 0,$ 则称 A 是半负定的, 记作 $A \preceq 0;$

正定的等价命题

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^\top = A$, 以下命题等价:

- A 是正定的;
- A 的正惯性指数是 n , 负惯性指数是 0 ;
- A 的特征值全是正的;
- 存在唯一的 $B \succ 0$ 使得 $A = B^2$;
- 存在可逆矩阵 P 使得 $A = P^\top P$ (相合于单位阵);
- A 的顺序主子式全为正。

半正定的等价命题

对 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^\top = A$, 以下命题等价:

- A 是半正定的;
- A 的正惯性指数是 $r = \text{rank } A$, 负惯性指数是 0;
- A 的特征值全是非负的;
- 存在 $B \succeq 0$ 使得 $A = B^2$ 且 $\text{rank } A = \text{rank } B$;
- 存在 P 使得 $A = P^\top P$ 且 $\text{rank } A = \text{rank } P$;
- A 的所有主子式全为非负。
- A 的所有 k 阶主子式之和非负。

例题 9

设

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_t(x) = x^\top A_t x.$$

- ① 将 Q_t 配方化为对角形;
- ② 求 A_t 的正、负惯性指数及秩;
- ③ 求 A_t 正定、半正定或不定时 t 的取值范围。

例题 9

设

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_t(x) = x^\top A_t x.$$

- ① 将 Q_t 配方化为对角形;
- ② 求 A_t 的正、负惯性指数及秩;
- ③ 求 A_t 正定、半正定或不定时 t 的取值范围。

解:

$$Q_t = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + tx_3)^2 + (2 - t^2)x_3^2.$$

例题 9

设

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_t(x) = x^\top A_t x.$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 + tx_3, \quad y_3 = x_3,$$

则变换可逆, 且

$$Q_t = y_1^2 + y_2^2 + (2 - t^2)y_3^2.$$

- ① 将 Q_t 配方化为对角形;
- ② 求 A_t 的正、负惯性指数及秩;
- ③ 求 A_t 正定、半正定或不定时 t 的取值范围。

解:

$$Q_t = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + tx_3)^2 + (2 - t^2)x_3^2.$$

例题 9

设

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_t(x) = x^\top A_t x.$$

- ① 将 Q_t 配方化为对角形;
- ② 求 A_t 的正、负惯性指数及秩;
- ③ 求 A_t 正定、半正定或不定时 t 的取值范围。

解:

$$Q_t = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + tx_3)^2 + (2 - t^2)x_3^2.$$

令

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2 + tx_3, \quad y_3 = x_3,$$

则变换可逆, 且

$$Q_t = y_1^2 + y_2^2 + (2 - t^2)y_3^2.$$

因此

$$\begin{cases} |t| < \sqrt{2}: & A_t \succ 0, \\ |t| = \sqrt{2}: & A_t \succeq 0, \\ |t| > \sqrt{2}: & (p, q, r) = (2, 1, 3), A_t \text{ 不定}. \end{cases}$$

例题 10

设

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

- ① 利用正交变换把 Q 化为标准型，并写出正交变换矩阵；
- ② 判断 $Q(x) = -1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的曲面类型。

例题 10

设

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

对应特征向量为

$$x_1 = t(1, 0, -1)^\top$$

$$x_2 = t(-1, 2, 0)^\top$$

$$x_3 = t(2, 1, 2)^\top$$

① 利用正交变换把 Q 化为标准型, 并写出正交变换矩阵;

② 判断 $Q(x) = -1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的曲面类型。

将其正交归一化后使用

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad P^\top AP = \text{diag}(5, 5, -4).$$

解: 二次型对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

因而 $x = Py$ 后,

$$Q = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2.$$

特征值为 $5, 5, -4$ 。

例题 10

设

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

- ① 利用正交变换把 Q 化为标准型, 并写出正交变换矩阵;
- ② 判断 $Q(x) = -1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的曲面类型。

解: 二次型对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

特征值为 $5, 5, -4$ 。

对应特征向量为

$$x_1 = t(1, 0, -1)^\top$$

$$x_2 = t(-1, 2, 0)^\top$$

$$x_3 = t(2, 1, 2)^\top$$

将其正交归一化后使用

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad P^\top AP = \text{diag}(5, 5, -4).$$

因而 $x = Py$ 后,

$$Q = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2.$$

由 $Q(x) = -1$, 即 $4y_3^2 - 5y_1^2 - 5y_2^2 = 1$, 曲面为双叶双曲面。

例题 11

A 是 n 阶实对称矩阵且

$$\det A < 0.$$

证明:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top A x < 0.$$

例题 11

A 是 n 阶实对称矩阵且

$$\det A < 0.$$

证明:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top A x < 0.$$

证明: 对 A 作正交相似对角化:

$$P^\top A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

例题 11

A 是 n 阶实对称矩阵且

$$\det A < 0.$$

证明:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top A x < 0.$$

证明: 对 A 作正交相似对角化:

$$P^\top A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

由于

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n < 0,$$

至少有一个特征值 $\lambda_i < 0$ 。

例题 11

A 是 n 阶实对称矩阵且

$$\det A < 0.$$

证明:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top Ax < 0.$$

证明: 对 A 作正交相似对角化:

$$P^\top AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

由于

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n < 0,$$

至少有一个特征值 $\lambda_i < 0$ 。

取 $x = Pe_i$, 则

$$x^\top Ax = e_i^\top P^\top AP e_i = \lambda_i < 0.$$

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A 正定，则存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP \text{ 为对角矩阵,}$$

且 $P^{\top}BP$ 的对角元全是

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

的根。

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A 正定，则存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP \text{ 为对角矩阵,}$$

且 $P^{\top}BP$ 的对角元全是

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

的根。

证明：由 $A \succ 0$ ，存在可逆矩阵 Q 使

$$Q^{\top}AQ = I_n.$$

又 $Q^{\top}BQ$ 实对称，故存在正交矩阵 S 使

$$S^{\top}Q^{\top}BQS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A 正定，则存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP \text{ 为对角矩阵,}$$

且 $P^{\top}BP$ 的对角元全是

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

的根。

证明：由 $A \succ 0$ ，存在可逆矩阵 Q 使

$$Q^{\top}AQ = I_n.$$

又 $Q^{\top}BQ$ 实对称，故存在正交矩阵 S 使

$$S^{\top}Q^{\top}BQS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

取 $P = QS$ ，则

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A 正定，则存在可逆矩阵 P ，使得

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP \text{ 为对角矩阵,}$$

且 $P^{\top}BP$ 的对角元全是

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

的根。

证明：由 $A \succ 0$ ，存在可逆矩阵 Q 使

$$Q^{\top}AQ = I_n.$$

又 $Q^{\top}BQ$ 实对称，故存在正交矩阵 S 使

$$S^{\top}Q^{\top}BQS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

取 $P = QS$ ，则

$$P^{\top}AP = I_n, \quad P^{\top}BP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

由 $A = (P^{\top})^{-1}P^{-1}$ ，

$$\det(\lambda A - B) = \frac{\det(\lambda I - P^{\top}BP)}{(\det P)^2}.$$

故每个 λ_i 都是 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的根。

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A, B 均半正定，则存在可逆矩阵 H 使得

$$H^{\top} A H, \quad H^{\top} B H$$

均为对角矩阵。

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A, B 均半正定，则存在可逆矩阵 H 使得

$$H^\top A H, \quad H^\top B H$$

均为对角矩阵。

证明：由 $A + B \succeq 0$ ，取可逆 P 使

$$P^\top (A + B) P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

设

$$P^\top A P = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_4 \end{bmatrix}, P^\top B P = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^\top & -A_4 \end{bmatrix}.$$

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A, B 均半正定，则存在可逆矩阵 H 使得

$$H^\top A H, \quad H^\top B H$$

均为对角矩阵。

证明： 由 $A + B \succeq 0$ ，取可逆 P 使

$$P^\top (A + B) P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

设

$$P^\top A P = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_4 \end{bmatrix}, P^\top B P = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^\top & -A_4 \end{bmatrix}.$$

由半正定性， $A_4 \succeq 0$ 且 $-A_4 \succeq 0$ ，故 $A_4 = O$ 。
若 $A_2 \neq O$ ，可取 u, v 使 $u^\top A_2 v < 0$ 。于是

$$\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = u^\top A_1 u + 2\lambda u^\top A_2 v.$$

取 λ 足够大，与半正定矛盾，故 $A_2 = O$ 。

例题 12

A, B 为 n 阶实对称矩阵。证明：
若 A, B 均半正定，则存在可逆矩阵 H 使得

$$H^\top A H, \quad H^\top B H$$

均为对角矩阵。

证明：由 $A + B \succeq 0$ ，取可逆 P 使

$$P^\top (A + B) P = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

设

$$P^\top A P = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & A_4 \end{bmatrix}, P^\top B P = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^\top & -A_4 \end{bmatrix}.$$

由半正定性， $A_4 \succeq 0$ 且 $-A_4 \succeq 0$ ，故 $A_4 = O$ 。
若 $A_2 \neq O$ ，可取 u, v 使 $u^\top A_2 v < 0$ 。于是

$$\begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^\top & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda v \end{bmatrix} = u^\top A_1 u + 2\lambda u^\top A_2 v.$$

取 λ 足够大，与半正定矛盾，故 $A_2 = O$ 。
因此

$$P^\top A P = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad P^\top B P = \begin{bmatrix} I_r - A_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

取正交矩阵 Q 使 $Q^\top A_1 Q$ 对角化，则 $Q^\top (I_r - A_1) Q$ 也为对角矩阵。

$$H = P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

即为所求。